



ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO  
REALE



G. 11. 20.









ARITHMETICA  
*UNIVERSALIS.*



ARITHMETICA

UNIVERSALIS

ARITHMETICA  
UNIVERSALIS;  
SIVE DE  
COMPOSITIONE  
ET  
RESOLUTIONE  
ARITHMETICA

Auctore IS. NEWTON, Eq. Aur.

Cum Commentario

JOHANNIS CASTILLIONEI,

*in almo Lyceo Trajectino Philosophiæ, Matheseos  
& Astronomiæ Professoris Ordinarii &c.*

TOMUS SECUNDUS.



AMSTELODAMI,  
Apud MARCUM MICHAELEM REY,

MDCCLXI.



ARITHMETICA

UNIVERSALIS

SIVE DE

COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE

ARTIS ARITHMETICAE

JOHANNIS DE WITTON, IN ARTE

ARTIS ARITHMETICAE

JOHANNIS DE WITTON

ARTIS ARITHMETICAE

ARTIS ARITHMETICAE

ARTIS ARITHMETICAE

ARTIS ARITHMETICAE

ARTIS ARITHMETICAE

ARTIS ARITHMETICAE

# ARITHMETICA UNIVERSALIS

## SIVE DE

# COMPOSITIONE

## ET

# RESOLUTIONE

## ARITHMETICA

## LIBER.

### PARS ALTERA

#### CAPUT I.

*Quomodo æquationes resolvendæ sunt.*

Postquam igitur in quæstionis alicujus solutione ad æquationem per-  
ventum est, & æquatio illa debite ordinata est & reducta; ubi quan-  
titates quæ per species designantur & pro datis habentur, revera dantur  
in numeris, pro ipsis substituendi sunt numeri illi in æquatione, & habe-  
bitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem satisfaciet quæstioni.  
Ut si in sectione anguli in quinque partes æquales, sumendo  $r$  pro radio  
circuli,  $q$  pro subtensa complementi anguli propositi ad duos rectos, &  $x$   
pro subtensa complementi quintæ partis anguli illius, pervenissem ad hanc  
æquationem

$$x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0.$$

Ubi in casu aliquo particulari dantur in numeris radius  $r$ , & linea dati an-  
guli complementum subtendens  $q$ ; ut quod radius sit 10 & subtensa 3,  
substituto numeros illos in æquatione pro  $r$  &  $q$ , & provenit æquatio nu-  
meralis

$$x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0,$$

Tom. II.

A

cujus

cujus radix tandem extracta erit  $x$ , seu linea complementum quintæ partis anguli illius dati subtendens.

## CAP. II.

*De natura radicum æquationis.*

I. **R**adix vero numerus est qui si in æquatione pro litera vel specie radicem significante substituitur, efficiet omnes terminos evanescere. Sic æquationis

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

unitas est radix, quoniam scripta pro  $x$  producit

$$1 - 1 - 19 + 49 - 30,$$

hoc est nihil. Sed æquationis ejusdem plures esse possunt radices. Nam si in hac eadem æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

pro  $x$  scribas numerum 2, & pro potestatibus  $x$  similes potestates numeri 2, producet

$$16 - 8 - 76 + 98 - 30,$$

hoc est nihil. Atque ita si pro  $x$  scribas numerum 3 vel numerum negativum  $-5$ , utroque casu producet nihil, terminis affirmativis & negativis in hisce quatuor casibus se mutuo destruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3 &  $-5$ , quilibet scriptus in æquatione pro  $x$  impleat conditionem ipsius  $x$ , efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquantur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

II. Et ne mireris eandem æquationem habere posse plures radices, sciendum est plures esse posse solutiones ejusdem problematis.

Ut si circularum duorum datorum quæreretur intersecitio; duæ sunt eorum intersecitioes, atque adeo quæstio admittit duas responsas; & proinde æquatio intersecitioem determinans habebit duas radices, quibus intersecitioem utramque determinet, si modo nihil in datis sit quo responsum ad unam intersecitioem determinetur.

Sic & si arcus APB pars quinta AP inveniendæ esset, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum APB, tamen æquatio qua quæstio solvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB; quæ quintæ partes, si divides totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, SF, FP, erunt AF, AQ, AFS, AQR. Quoniam igitur quærendo quintas partes arcuum quos recta AB subtendit, ad casus omnes determinandos circumferentia tota secari debet in quinque punctis P, Q, R,



R, S, F, ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem semper æquationem incideris five quæras quintam partem arcus APB, five quintam partem arcus ASB, five alterius cujusvis ex arcubus quintam partem. Unde si æquatio qua quinta pars arcus APB determinatur, non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, sequeretur majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor est, eo quod subtenfa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate necesse est æquationem qua respondetur, tot habere radices, quot sunt quæstæ quantitatis casus diversi ab iisdem datis pendentes & eadem argumentandi ratione determinandi.*

III. *Potest vero æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures.*

Sic æquatio

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

quatuor habet radices 1, 2, 3, &  $-5$ ; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro  $x$  efficiet terminos omnes se mutuo destruere, ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

IV. *Ceterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligitur.*

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, &  $-5$ , supponendum erit  $x$  ambigue significare numeros illos, seu esse

$$x = 1, x = 2, x = 3, \text{ \& } x = -5,$$

vel quod perinde est,

$$x - 1 = 0, x - 2 = 0, x - 3 = 0, \text{ \& } x + 5 = 0;$$

Et multiplicando hæc in se, prodibit multiplicatione  $x - 1$ , in  $x - 2$ ; hæc æquatio

$$xx - 3x + 2 = 0,$$

quæ duarum est dimensionum ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in  $x - 3$  prodibit

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0,$$

æquatio trium dimensionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per  $x + 5$  fit

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

ut supra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor Factoribus,

$$x - 1, x - 2, x - 3, \& x + 5,$$

in se continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil est, quod sub omnibus sit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil est, quod sub omnibus continetur nihil esse non potest. Hoc est, non potest

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30,$$

esse nihilo æquale ut oportet, nisi his quatuor casibus ubi est  $x - 1 = 0$ , vel  $x - 2 = 0$ , vel  $x - 3 = 0$ , vel denique  $x + 5 = 0$ , proinde soli numeri 1, 2, 3, &  $-5$  valere possunt  $x$  seu radices esse æquationis. Et simile est ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari possumus omnes generari, quamvis Factores ab invicem secernere solet esse difficillimum, & ipsum est quod æquationem resolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur Factores.

V. Radices vero sunt duplices, affirmativæ, ut in allato exemplo 1, 2, & 3, & negativæ, ut  $-5$ . Ex his vero aliquæ non raro evadunt impossibiles.

Sic æquationis

$$xx - 2ax + bb = 0,$$

radices duæ, quæ sunt

$$a + V(aa - bb), \& a - V(aa - bb)$$

reales quidem sunt ubi  $aa$  majus est quam  $bb$ , at ubi  $aa$  minus est quam  $bb$ , evadunt impossibiles eo quod  $aa - bb$  tunc evadat negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica est impossibilis. Omnis enim radix possibilis sive affirmativa sit, sive negativa, si per seipsam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impossibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem

$$x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0,$$

unam quidem realem radicem habere quæ est 2, duas vero impossibiles,

$$1 + V - 2, \& 1 - V - 2.$$

Nam quælibet ex his

$$2, 1 + V - 2, \& 1 - V - 2$$

scripta in æquatione pro  $x$ , efficiet omnes ejus terminos scilicet mutuo destruerent; sunt vero

$$1 + V - 2, \& 1 - V - 2$$

numeri impossibiles, eo quod extractionem radices quadraticæ ex numero negativo  $-2$  præsupponant.

VI. *Æquationum vero radices sæpe impossibiles esse æquum est, ne casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt, exhibeant possibiles.*

Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, & pro circuli radio & rectæ a centro ejus distantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio intersectionem definiens habetur, si pro litera designante distantiam rectæ a centro ponatur numerus minor radio, intersectio possibilis erit; sin major, fiet impossibilis; & æquationis radices duæ quæ intersectiones duas determinant, debent esse perinde possibiles vel impossibiles ut rem ipsam vere expriment. Atque ita si circulus CDEF, & ellipsis ACBF se mutuo secant in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam positione datam AB, demittantur perpendiculara CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus e perpendicularis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus secat ellipsim in quatuor punctis, habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor illa perpendiculara. Quod si circuli radius, manente centro ejus, minuatur donec, punctis E & F coalescentibus, circulus tandem tangat ellipsim, ex radicibus duæ illæ quæ perpendiculara EI & FK jam coincidentia expriment, evadent æquales. Et si circulus adhuc minuatur ut ellipsim in puncto EF ne quidem tangat sed fecer tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quæ perpendiculara EI, FK, jam facta impossibilia, exprimebant, fient una cum perpendicularis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales, deinde impossibiles evadere solent. Et inde fit quod radicum impossibilium numerus semper sit par.

VII. *Sunt tamen radices æquationum aliquando possibiles ubi schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in schemate quod ad æquationem nil spectat.*

Ut si in semicirculo AED datis diametro AB, & linea inscripta AD, demissoque perpendicularo DC, quærerem diametri segmentum AC, foret

$$\frac{ADq}{AB} = AC. \text{ Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quantitas ubi}$$

linea inscripta AD major est quam diameter AB; per schema vero AC tunc evadit impossibilis. Nimirum in schemate linea AD supponitur inscribi in circulo, atque adeo diametro circuli major esse non potest; in æquatione vero nihil est quod a conditione illa pendeat. Ex hac sola linearum conditione colligitur æquatio, quod sint AB, AD, & AC continue proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones schematis, non necesse est ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius est in schemate quam in æquatione, potest illud limitibus arctare, hanc non item. Qua de causa ubi æquationes sunt imparium dimensionum, adeoque radices omnes impossibiles habere non possunt; schemata quantitativis a quibus radices omnes pendent, sæpe limites imponunt, quos transgredi servatis schematum conditionibus impossibile est.

VIII. *Ex radicibus vero quæ reales sunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppositas solent tendere.*



TAB.  
VIII.  
Fig. 9.

Sic in Figura nona quærendo perpendicularum CG, incidetur in æquationem cujus duæ erunt affirmativæ radices CG ac DH a punctis C & D tendentes versus unam plagam, & duæ negativæ EI & FK, tendentes a punctis E & F versus plagam oppositam. Aut si in linea AB ad quam perpendiculara demittuntur, detur aliquod punctum P, & pars ejus PG, a puncto illo dato ad perpendicularorum aliquod CG se extendens, quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK, quarum quæsitæ PG, & quæ a puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

IX. Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, numerus radicum affirmativarum & negativarum ex signis terminorum æquationis cognosci potest. Tot enim sunt radices affirmativæ quot signorum in continua serie mutationes de + in — & — in +; ceteræ negativæ sunt.

Ut in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordine

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad -$$

variationes secundi — a primo +, quarti + a tertio —, & quinti — a quarto +, indicant tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At ubi radices aliquæ impossibiles sunt regula non valet, nisi quatenus impossibiles illæ, quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ, pro ambiguis habeantur. Sic in æquatione

$$x^3 + px^2 + 3ppx - q = 0,$$

signa indicant unam esse affirmativam radicem & duas negativas. Finge  $x = 2p$  seu  $x - 2p = 0$ , & multiplica æquationem priorem per hanc  $x - 2p = 0$ , ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit hæc æquatio

$$x^4 - px^3 + pp^2x^2 - \frac{6p^3}{q}x + 2pq = 0,$$

quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo duæ impossibiles quæ pro ambiguitate sua, priori casu negativæ, posteriori affirmativæ esse videntur.

Verum quot radices impossibiles sunt, cognosci fere potest per hanc regulam.

X. Constitue seriem fractionum quarum denominatores sunt numeri in hac progressionis: 1, 2, 3, 4, 5, &c. pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca su-  
per

per terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum +; sin minus, signum —. Sub primo vero & ultimo termino colloca signum +. Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum serie mutationes de + in — & — in +.

Ut si habeatur æquatio

$$x^3 + pxx + 3ppx - q = 0:$$

Divido seriei hujus  $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3}$  fractionum secundam  $\frac{2}{2}$  per primam  $\frac{3}{1}$ , & tertiam  $\frac{1}{3}$  per secundam  $\frac{2}{2}$ , & fractiones prodeunt  $\frac{1}{3}$  &  $\frac{1}{3}$  colloco super medijs terminis æquationis ut sequitur.

$$\begin{array}{ccccccc} & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{3} & & \\ x^3 & + & pxx & + & 3ppx & - & q = 0 \\ + & - & - & + & + & - & + \end{array}$$

Dein quoniam quadratum secundi termini  $pxx$  ductum in imminentem fractionem  $\frac{1}{3}$ , nimirum  $\frac{ppx^4}{3}$ , minus est quam primi termini  $x^3$  & tertii  $3ppx$  rectangulum  $3ppx^4$ , sub termino  $pxx$  colloco signum —. At quia tertii termini  $3ppx$  quadratum  $9p^2xx$  ductum in imminentem fractionem  $\frac{1}{3}$ , majus est quam nihil, atque adeo multo majus quam secundi termini  $pxx$ , & quarti  $q$  rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino  $x^3$  & ultimo  $q$  colloco signa +. Et signorum subscriptorum quæ in hac sunt serie + — ++ mutationes duæ, una de + in —, alia de — in + indicant duas esse radices impossibiles. Sic & æquatio

$$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0,$$

duas habet radices impossibiles.

$$\begin{array}{ccccccc} & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{3} & & \\ x^3 & - & 4xx & + & 4x & - & 6 = 0 \\ + & - & - & + & + & - & + \end{array}$$

Æquatio item

$$x^3 - 6xx - 3x - 2 = 0,$$

duas

duas habet.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3}{8} & & \frac{4}{9} & & \frac{3}{8} & & \\ x^4 * & - & 6xx & - & 3x & - & 2 = 0 \\ + & + & + & & - & & + \end{array}$$

Nam hæc fractionum series  $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$  dividendo secundam per primam, tertiam per secundam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem  $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$  super mediis æquationis terminis collocandam. Dein secundum di termini, qui hic nihil est, quadratum ductum in fractionem imminuentem  $\frac{3}{8}$  producit nihil, quod tamen majus est quam rectangulum negativum  $- 6x^6$  sub terminis utrinque positis  $x^4$  &  $- 6xx$  contentum. Quare sub termino illo deficiente scribo  $+$ . In ceteris pergo ut in exemplo superiori; & signorum subscriptorum prodit hæc series  $+++ - +$ , ubi duæ mutationes indicant duas radices impossibiles. Et ad eundem modum in æquatione

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0,$$

deteguntur impossibiles duæ.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{5} \\ x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2xx - 5x - 4 = 0 \\ + & & + & & - & & + & & + & & + \end{array}$$

XI. Ubi termini duo vel plures simul defunt, sub primo terminorum deficientium collocandum est signum  $-$ , sub secundo signum  $+$ , sub tertio signum  $-$ , & sic deinceps, semper variando signa, nisi quod sub ultimo terminorum simul deficientium semper collocandum est signum  $+$  ubi termini deficientibus utrinque proximi habent signa contraria. Ut in æquationibus

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 + ax^4 * * * + a^4 = 0, \\ + & + & - & - & + & & + \end{array}$$

&c

$$\begin{array}{ccccccc} x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0, \\ + & + & - & - & + & & + \end{array}$$

quarum prior quatuor, posterior duas habet impossibiles radices. Sic & æquatio

$x^7$



# R A D I C U M Æ Q U A T.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3}{7} & \frac{5}{9} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{5}{9} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & - 2x^6 & + 3x^5 & - 2x^4 & + x^3 & * & * - 3 = 0 \\ + & - & + & - & + & - & + \end{array}$$

sex habet impossibiles.

XII. Hinc etiam cognosci potest utrum radices impossibiles inter affirmativas radices lateant an inter negativas. Nam signa terminorum signis subscriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas esse impossibiles quot sunt ipsum variationes, & tot negativas quot sunt ipsorum successiones sine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{ccccccc} x^5 & - 4x^4 & + 4x^3 & - 2xx & - 5x & - 4 & = 0 \\ + & - & + & - & + & - & + \end{array}$$

quoniam signis infra scriptis variantibus + — +, quibus radices duæ impossibiles indicantur, imminentes termini

$$- 4x^4 + 4x^3 - 2xx,$$

signa habent — + —, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impossibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum signa

$$+ - + - - -$$

per tres variationes indicent tres esse affirmativas radices, & reliquas duas negativas esse, & inter affirmativas lateant duæ impossibiles, sequitur æquationis unam esse radicem vere affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Quod si æquatio fuisset

$$\begin{array}{ccccccc} x^5 & - 4x^4 & - 4x^3 & - 2xx & - 5x & - 4 & = 0 \\ + & - & - & - & - & - & + \end{array}$$

tunc termini subscriptis signis prioribus variantibus + — imminentes, nimirum — 4x<sup>4</sup> — 4x<sup>3</sup> per signa sua non variantia — & — indicant unam ex negativis radicibus impossibilem esse; & termini signis subscriptis posterioribus variantibus — + imminentes, nimirum — 2xx — 5x per signa sua non variantia — & — indicant aliam ex negativis radicibus impossibilem esse. Quamobrem cum æquationis signa

$$+ - - - - -$$

per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, ceteras quatuor negativas esse; sequitur unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat.

# COMMENTARIUS

A D

## CAPUT II.

Jam & ex rei natura, & ex tot superius evolutis exemplis constat dari quæstiones, seu problemata arithmetica, & geometrica.

Hic de arithmetice agit Auctor; sed quæ dicam, utrisque possunt aptari.

1. *Æquatio igitur est aggregatum plurium quantitatum notarum, & quæsitum quomodocunque mixtarum, quod totum est nihilo par, & quod oritur ex omnibus problematis legibus algebraice expressis.*

2. *Igitur quantitas quæsitæ, ubi æquationis ope reperitur, satisfacit omnibus problematis legibus.*

3. *Et si plures sint quantitates ita comparatæ, plures quoque per æquationem invenitur, ut vidimus sectione III. Cap. I. N<sup>o</sup>. 17 & c. pag. 109.*

4. *Inventio autem harum quantitatum per æquationem dicitur æquationis resolutio.*

5. *Quantitates vero sic inventæ dicuntur æquationis radices.*

6. *Sed cum tota æquatio nihilo par sit, nec datæ quantitates mutantur; quæsitæ vero eadem sint ante, & postquam nobis notæ sunt (nos enim, non illæ mutationem patimur) liquet quod si radix in æquatione pro litera vel specie radicem significantem substituantur, efficiet omnes terminos evanescere & c.: quæ est Newtoniana radicis descriptio. N<sup>o</sup>. I.*

Hinc ostendendum sibi proponit Auctor.

1. *Æquationem tot habere posse radices, quot dimensiones, & non plures.*

2. *Æquationes generari per continuam radicem multiplicationem.*

3. *Radices esse aut reales aut imaginarias; realium vero alias esse affirmativas seu veras, alias negativas seu falsas.*

4. *Cur aliquando radices æquationis sint imaginariæ.*

5. *Quid indicent radices affirmativæ, quid negativæ.*

6. *Quot radices affirmativas, quot negativas habeat æquatio ab imaginariis immunis.*

7. *Si vero quas habeat imaginarias, quot imaginarias habeat.*

Horum capitulum nonnulla jam explicavimus; alia melius & brevius me explicaturum confido, si mutem Auctoris ordinem. Quare totum hoc caput, non per partes, ut hactenus feci, sed explicatione continua explanare conabor.

7. Potestas, cujus index est numerus par, positiva est, seu radix sit positiva, seu negativa (Tom. I. Sect. I. Cap. V. N<sup>o</sup>. 80. pag. 22.) Er-

go omnis radix formæ  $\sqrt[n]{a}$ , est impossibilis, quod pro radicibus quadratis, vel quando  $n = 1$ , sæpius jam observavimus.

8. Cum

8. Cum autem potestatis negativæ, cujus index est numerus impar, radix inveniri possit, constat.

1. Omnem quantitatem impossibilem esse radicalem, cujus exponentis est par.

2. Omnes quantitates impossibiles revocari ad formam  $b\sqrt[n]{V-1}$ . Nam  
est  $a = +a \cdot \sqrt[n]{V-1}$ , &  $\sqrt[n]{V-1} = \sqrt[n]{V-1} \cdot \sqrt[n]{V-1} = \sqrt[n]{V-1}$ . Semper autem  
possibilis est quantitas  $\sqrt[n]{V-1}$ ; ea ergo exponatur per  $b$ , & fiet  $\sqrt[n]{V-1} = b\sqrt[n]{V-1}$ .  
Est enim  $\sqrt[n]{V-1} = \sqrt[n]{V-1}$ .

9. Aggregatum ex quantitatibus possibilibus & ex quantitatibus impossibilibus est impossibile. Cum enim adsit pars impossibilis, patet aggregatum definiri non posse, atque ideo esse impossibile.

10. Quantitates impossibiles algebraicæ omnes revocantur ad formam  $a \pm b\sqrt[n]{V-1}$ . Nam hujusmodi quantitas concrescit ex quantitatibus possibilibus & ex impossibilibus, vel additione, vel subtractione, vel multiplicatione, vel divisione; nam elevatio ad potestatem cujus exponentis est numerus integer, recidit in multiplicationem.

Jam  $c + e\sqrt[n]{V-1} \pm f + g\sqrt[n]{V-1}$ , facile revocatur ad indicatam formam, cum sit  $c + e\sqrt[n]{V-1} \pm f + g\sqrt[n]{V-1} = a \pm f + (e+g)\sqrt[n]{V-1}$  quæ quantitas, ponendo

$$c \pm f = a \text{ \& } e + g = b, \text{ fit } a + b\sqrt[n]{V-1}$$

Pariter

$$(c + e\sqrt[n]{V-1})(f + g\sqrt[n]{V-1}) = cf + ef\sqrt[n]{V-1} + eg\sqrt[n]{V-1} + eg = cf - eg + (ef + eg)\sqrt[n]{V-1} = a + b\sqrt[n]{V-1}$$

ponendo

$$cf - eg = a \text{ \& } ef + eg = b$$

denique

$$\frac{c + e\sqrt[n]{V-1}}{f + g\sqrt[n]{V-1}} = \frac{(c + e\sqrt[n]{V-1})(f - g\sqrt[n]{V-1})}{(f + g\sqrt[n]{V-1})(f - g\sqrt[n]{V-1})} =$$

$$\frac{cf + ef\sqrt[n]{V-1} - eg\sqrt[n]{V-1} + eg}{ff + gg} = a + b\sqrt[n]{V-1}$$

ponendo

$$\frac{cf + eg}{ff + gg} = a \text{ \& } \frac{ef - eg}{ff + gg} = b.$$

*Vera est propositio etiam de quantitatibus transcendentibus, sed de his nunc non loquimur.*

11. Radix æquationis est impossibilis vel imaginaria, quando ejus pars aliqua est imaginaria, cujus formula est supra inventa  $a + b\sqrt{-1}$ . N<sup>us</sup> 9. 10.

12. Radix est possibilis vel realis, quando ejus nulla pars est imaginaria, etiam si contineat partem radicalem, sed possibilem.

13. Radices reales esse posse vel affirmativas, vel negativas, jam sæpe superius vidimus. Reales inquam, semper enim comparari potest pars rationalis  $a$  cum irrationali  $\sqrt{c}$ , quando hæc realis est, sed non cum irrationali  $b\sqrt{-1}$ , quæ nullo pacto potest definiri.

14. Hinc patet optime distribui radices.

1. In rationales, & in irrationales. *Rationalis* est quæ nullam habet partem irrationalem; *irrationalis* quæ vel tota vel pro parte irrationalis est.

2. Irrationales vel surdæ dividuntur in *possibiles*, ut  $a \pm \sqrt{b}$ ;  $a \pm \sqrt[3]{b}$  &c; & in *impossibiles*, quarum forma est  $a \pm b\sqrt{-1}$ .

3. In reales & imaginarias. *Reales* sunt quæ vel rationales sunt, vel irrationales quidem, sed possibiles. *Imaginariæ* sunt tantum irrationales & impossibiles.

4. Tandem reales aliæ sunt *positivæ* aut *veræ*, aliæ *negativæ* aut *falsæ*.

15. Quid accidat in genere si ex eadem incognita & ex singulis cognitis  $x \pm a = 0$ ;  $x \pm b = 0$ ;  $x \pm \gamma = 0$ , &c. efficiantur æquationes simplices, & hæc invicem ducantur, vidimus Tom I. N<sup>us</sup> 111 - 114. pag. 28. Constat autem aggregatum futurum æqualem nihilo.

16. Æquatio dicitur *affecta*, quando alios habet terminos præter altissimum incognitæ, & terminum omnino cognitum, qui a nonnullis vocatur *homogeneum comparationis*. Sic  $x^m \pm ax^n \dots \pm b = 0$  est æquatio affecta, seu unus adsit terminus, præter primum  $x^m$  & ultimum  $b$ , seu plures.

17. Si æquatio affecta constat ex Factoribus simplicibus formæ  $x \pm a$  (seu  $a$  sit realis seu imaginaria) in se ductis, & si hæc æquatio exprimat omnes conditiones problematis, constat ex æquationibus simplicibus formæ  $x \pm a = 0$ . Nam ex continua multiplicatione æquationum simplicium  $x = \mp a$ ;  $x = \mp \beta$ ; &c. ad numerum  $m$ , oritur æquatio non affecta  $x^m = A$ , ubi  $A = a\beta\gamma$  &c. ad eundem numerum  $m$ .

18. Ex continua multiplicatione æquationum simplicium  $x + a = 0$ ,  $x + \beta = 0$ ; &c. ad numerum  $p$ ; &  $x + \mu = v$ ;  $x + \xi = \pi$ , &c. ad numerum  $n$  (pono autem  $p + n = m$ ) oritur quidem æquatio affecta

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \dots + T = 0,$$

sed quæ non exprimit omnes conditiones problematis, quandoquidem  $v$ ;  $\pi$ ; &c. quæ non sunt in primo membro æquationum simplicium, non sunt in primo membro æquationis affectæ hinc oriundæ: nam hujus primum membrum conficitur ex primis illarum membris in se ductis. Sed neque sunt in secundo membro, quia hoc est  $= 0$ ; siquidem  $x + a = 0$ ;  $x + \beta = 0$  &c., multiplicando dant factum  $X = 0$ ; sed  $x + \mu = v$ ;  $x + \xi = \pi$  &c., dant

dant factum  $Z = \sqrt{x}$  &c; & multiplicando ordine hæc facta, habetur  $XZ = 0. \sqrt{x}$  &c.  $= 0$ . Desunt ergo prorsus in æquatione composita literæ  $\sqrt{x}$ ; &c; quæ ideo non exprimit omnes conditiones problematis. Utrumque est contra hypothesim. Patet autem utrumque fieri secundum hypothesim, si assumantur Factores simplices formæ  $x \pm a = 0$ ; id est æquatio potest habere tot radices, quot dimensiones.

19. Non autem potest habere plures; nam hæ expressæ per totidem æquationes simplices inter se multiplicari deberent, ut conficiatur æquatio complectens omnes leges problematis (Tom. I. Sect. III. Cap. I. N<sup>o</sup> 44. &c. pag. 112. &c.) & hinc oriretur æquatio plurium dimensionum, quam proposita. Quare proposita haberet minorem dimensionum numerum, per hypothesim, & non minorem quia exponere debet omnes conditiones problematis.

20. Nunc, si æquationes simplices sint formæ  $x - a = 0$ ; id est si omnes radices sint affirmativæ, (nam si  $x - a =$ , profecto est  $x = a$ ), atque ideo omnes reales (N<sup>o</sup> 12. & 13.); tunc æquatio hinc oriunda habebit omnes terminos aliquam sedem numero imparem occupantes (primum, tertium, quintum, septimum, &c.) affirmativos; reliquos autem negativos. (Tom. I. Sect. I. Cap. V. N<sup>o</sup> 114. pag. 28; & N<sup>o</sup> 77-79. pag. 22.). Nam omnis terminus, præter ultimum, est aliqua potestas quantitatis  $x$  (Tom. I. Sect. I. Cap. V. N<sup>o</sup> 111. & 112. pag. 28.), quæ est semper positiva, quia radix  $x$  est positiva. Coefficienti primi termini est unitas; coefficienti tertii, quinti, septimi, &c. termini, est ordine aggregatum ex factis binorum, quaternorum, senorum &c. Factorum secundorum (ibidem N<sup>o</sup> 114.); quæ facta sunt positiva, quia Factores sunt quidem negativi, sed numero pares; & aggregatum ex factis positivis est positivum. Sed coefficienti termini secundi, quarti, sexti, &c. est ordine aggregatum ex singulis Factoribus secundis, ex factis ternorum, quinquorum, septenorum, &c. Factorum secundorum, qui semper numero impari sumendi sunt, atque ideo semper præbent facta negativa.

21. Si vero æquationes simplices, sint formæ  $x + a =$ ; id est si omnes radices æquationis affectæ sint negativæ, æquatio habebit omnes terminos positivos; quod per se patet.

22. Æquatio, cujus omnes radices sunt positivæ, aut omnes negativæ, semper completa est, vel nullo termino caret, quia non sunt in coefficientibus singulorum terminorum facta contrariis signis affecta, quæ se mutuo destruere possint.

23. Æquatio completa ordinis  $m$ , habet radices numero  $m$ , terminos autem numero  $m + 1$ . Quapropter si ea omnes habeat radices positivas, habebit signorum permutationes ad numerum  $m$ ; & si ea habeat omnes radices negativas, habebit successiones ad eundem numerum  $m$ . Signorum autem permutationem voco duorum signorum proximorum alternationem, quando nempe primum signum est  $+$  & sequens est  $-$ , aut contra, quando primum est  $-$  & sequens est  $+$ . Successionem autem dico, quando signa duo proxima sunt vel utraque positiva, vel utraque negativa.

24. Sicut, in æquatione, cujus radices sunt omnes positivæ, tot permutatio-

tationes, quot radices; & in æquatione, cujus radices sunt omnes negativæ, tot successiones quot radices.

25. Sint  $m; n; p$ ; numeri integri & positivi, & sit  $m$  non minor quam  $n+p$ ; & sit  $m$  numerus Factorum omnium; ac habeantur omnia facta diversa ex Factorum diversorum numero  $n$ , atque hæc singula ducantur in aliquod factum ex  $p$  Factoribus, qui non sunt in multiplicandis factis ex  $n$  Factoribus, tunc orientur omnia facta diversa ex  $n+p$  Factoribus, quæ possunt completi Factores postremo sumtos,

Ex. gr. sit  $m = 8$ , & omnes Factores sint

$$a; b; c; d; e; f; g; h;$$

ponatur  $n = 1 = p$ ; omnia facta diversa ex Factorum diversorum numero  $n$ , erunt Factores ipsi, e quibus eligatur unum  $a$ ; manebunt Factores diversi, præter  $a$ , ad numerum  $m - 1 = 7$ ; nempe

$$b; c; d; e; f; g; h;$$

qui si ducantur in  $a$ , fient septem facta in quibus est  $a$ , nempe

$$ab; ac; ad; ae; af; ag; ah.$$

Nunc e septem reliquis eximatur  $b$ , manebunt sex Factores diversi,

$$c; d; e; f; g; h.$$

qui singuli ducti in  $b$  dabunt sex facta ex binis Factoribus continentia  $b$ , id est

$$bc; bd; be; bf; bg; bh.$$

Pariter, omnia facta ex binis, in quibus non est  $a$ , sunt

$$bc; bd; be; bf; bg; bh.$$

$$cd; ce; cf; cg; ch.$$

$$de; df; dg; dh.$$

$$ef; eg; eh.$$

$$fg; fh.$$

$$gh.$$

quæ ducta in  $a$ , dabunt omnia facta ex ternis Factoribus comprehendentia  $a$ . Idem facile intelligitur de superioribus factis, quæ sunt multiplicando factum aliquod per Factorem unius dimensionis.

Sumatur nunc factum duarum dimensionum  $ab$ ; omnia facta ex binis Factoribus carentia tum  $a$ , tum  $b$ , sunt

$$cd;$$



$cd; ce; cf; cg; cb.$   
 $de; df; dg; ab.$   
 $ef; eg; eb.$   
 $fg; fb.$   
 $gb.$

quæ si multiplicentur per factum  $ab$ , habebuntur omnia facta ex quaternis, complectentia factum  $ab$ . Et sic de ceteris.

Evidens autem in genere est theorema propositum. Factum constans ex Factoribus diversis, numero  $p$ , sit  $A$ ; & omnia facta diversa, quæ confici possunt ex  $n$  Factoribus diversis, sint  $B; C; D; E$ ; &c. Erunt profecto  $AB; AC; AD; AE$ ; &c. omnia facta diversa, quæ haberi poterunt ex  $n + p$  Factoribus diversis, & quæ continebunt idem factum  $A$ .

Omnes Factores diversi sunt numero  $m$ ; ex his auferuntur Factores numero  $p$ , ut conficiatur factum  $A$ ; supersunt ergo Factores diversi  $m - p$ , qui  $n$  eni jungendi sunt, quot modis possunt, ut obtineantur omnia facta diversa ex  $n$  Factoribus;  $B; C; D; E$ ; &c. Horum autem numerus est

$$\frac{m-p \cdot m-p-1 \cdot m-p-2 \cdot \dots \cdot m-p-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

ut constat conferendo numeros 109. & 121. Sect. I. Cap. V. pag. 27. & 29. Tomi I. Ergo eadem series

$$\frac{m-p \cdot m-p-1 \cdot m-p-2 \cdot \dots \cdot m-p-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

exprimet numerum factorum diversorum  $AB; AC; AD; AE$ ; &c.

26. Si vero cuncta facta diversa  $B; C; D; E$ ; &c. ex  $n$  Factoribus, multiplicentur per  $a$  unum ex  $p$  Factoribus ipsius  $A$ ; tunc habebuntur omnia facta diversa ex  $n + 1$  Factoribus, quæ illum Factorem  $a$  complecti possunt; nec complectuntur reliquos factores ipsius  $A$ .

Sint, ex. gr.

$cde; cdf; cdg; cdh; cef; ceg; ceh; df; deg; deb; fg; cfh; dfg; dfh;$   
 $efg; fgh; egh; dgh; efb; fgb;$

omnia facta diversa ex ternis Factoribus, quæ obtineri possunt multiplicando ex octo Factoribus

$a; b; c; d; e; f; g; h;$

sex posteriores; & sit  $A = ab$ . Illa facta ex ternis ducta in  $a$ , consicient omnia facta ex quaternis, quæ complecti possunt Factorem  $a$ , nec tamen complectuntur Factorem  $b$ . Si vero eadem facta ex ternis ducantur in  $b$ , obtinebuntur omnia facta diversa ex quaternis quæ complecti possunt  $b$ , nec tamen complectuntur  $a$ .

Quod

Quod si factum A esset unius dimensionis, & omnia facta ex  $n$  Factoribus, quæ haberi possunt multiplicando  $n$  .. nos ex  $n - 1$  Factoribus, ducantur in A (aut  $a$ ), habebuntur omnino omnia facta diversa ex  $n + 1$  Factoribus, quæ complectuntur Factorem A (aut  $a$ ).

$\alpha; \beta; \gamma; \delta; \&c.$

27. Si omnia facta diversa ex  $p$  Factoribus diversis, ducantur in omnia facta diversa A; B; C; D; &c. ex  $n$  Factoribus diversis, qui non sunt in prioribus factis  $\alpha; \beta; \gamma; \delta; \&c.$ , unum idemque factum  $\alpha\delta$ , repetitum invenietur toties quoties indicat fractio

$$\frac{p+n \cdot p+n-1 \cdot p+n-2 \cdot p+n-3 \dots p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n}$$

Ex. gr. sit  $p = 3; n = 4$ , atque ideo  $p+n = 7$  factum  $abcdefg$  ex septem Factoribus diversis, componetur ex uno facto ternorum Factorum,

& ex uno quaternorum, modis  $35 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 5$ , nempe ex

$abc \cdot defg; abd \cdot cefg; abe \cdot cdg; abf \cdot cdeg; abg \cdot cdef; acd \cdot befg; ace \cdot bdfg; acf \cdot bdeg; acg \cdot bdef; ade \cdot befg; adf \cdot bceg; adg \cdot bcef; aef \cdot bcdg; aeg \cdot bcdf; afg \cdot bcde; bcd \cdot aefg; bce \cdot acfg; bef \cdot adcg; beg \cdot adcf; bde \cdot acfg; bdf \cdot aceg; bdg \cdot acef; bef \cdot acdg; beg \cdot acdf; bfg \cdot acde; cde \cdot abfg; cdf \cdot abeg; cdg \cdot abef; cef \cdot abdg; ceg \cdot abdf; cfg \cdot abde; def \cdot abcg; deg \cdot abcf; dfg \cdot abce; efg \cdot abcd.$

Sic autem demonstrari potest theorema. Hujusmodi factum habebit omnino Factores  $p+n$ , e quibus sumi debent  $n$  quot modis diversis fieri potest, (ut nempe habeantur omnia facta diversa ex  $n$  Factoribus); sed e quantitatibus numero  $p+n$ , sumi possunt  $n$ , modis

$$\frac{p+n \cdot p+n-1 \cdot p+n-2 \cdot p+n-3 \dots p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot n}$$

Harum combinationum quævis dat factum ex  $n$  Factoribus, quod ductum in factum ex  $p$  Factoribus, qui non sunt in primo facto, dat factum ex  $n+p$  Factoribus, quod factum erit semper idem, quia iidem sunt Factores  $n+p$ . Ergo idem factum repetitum invenietur modis &c.

Observandum, quod idem modorum numerus inveniretur, si consideraretur factum ex  $p$  Factoribus, qui desumuntur a totali Factorum numero  $n+p$ . Tunc enim numerus hic esset, ponendo  $n$  minorem quam  $p$

$$\frac{p+n \cdot p+n-1 \cdot p+n-2 \dots p+1 \cdot p \cdot p-1 \cdot p-2 \dots n+2 \cdot n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1 \cdot n \cdot n+1 \cdot n+2 \dots p+1 \cdot p}$$

ubi unitatem æquat fractio

$$\frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3 \dots n + 3 \cdot n + 2 \cdot n + 1}{n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \cdot n + 4 \dots p - 2 \cdot p - 1 \cdot p},$$

quæ unitas cum per multiplicationem non mutet numerum cui juncta est, is relinquitur qualis erat in N°. præcedente; cui facile apratur idem ratio- cinium quando  $p$  minor est quam  $n$ .

29. Si numerus alteruter  $n$  vel  $p$ , puta  $p$ , fiat unitas, & sit  $n + 1 = m$ ; tunc omnia facta diversa ex  $m - 1 = n$  Factoribus ducta in singulos Factor- es qui ab iis absunt, præbunt idem factum  $m \dots$  ies repetitum. Quan- doquidem fractio Ni. 28. tunc fiet

$$\frac{n + 1 \cdot n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \dots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n - 3 \cdot n - 2 \cdot n - 1 \cdot n}$$

in qua ad unitatē revocatur fractio

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \dots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n - 3 \cdot n - 2 \cdot n - 1 \cdot n},$$

manet ergo  $\frac{n + 1}{1} = m$ .

30. Quando radices omnes sunt rationales ostensum est Sect. I. Cap. V. N°. 114. pag. 28. Tomi I. esse coefficientem cognitum secundi termini summam omnium radicum; coefficientem termini tertii summam omnium factorum ex binis radicibus; coefficientem quarti termini summam omnium factorum ex ternis radicibus; in genere coefficientem termini locum  $n$  occupantis in æquatione esse summam omnium factorum ex  $n - 1$  radicibus. Nunc vi- dendum est quid accidat quando radices aliquæ sunt irrationales, & quando sunt imaginariæ.

31. Ex eo quod coefficiens termini secundi est summa omnium radicum, fuit hunc coefficientem esse vere summam, si radices sint vel omnes positivæ, vel omnes negativæ; sed esse differentiam, si radicum aliquæ sint positivæ, aliquæ negativæ; & hanc differentiam habituram signum summæ majoris; id est negativum si summa radicum positivarum sit major quam summa radi- cum negativarum, & contra.

32. Ideo, si summa radicum positivarum æquet summam radicum negati- varum, coefficiens termini secundi erit 0, aut deficiet terminus secundus; Et si terminus secundus deficiat, æqualis erit summa radicum positivarum summæ radicum negativarum. Secus enim superesset harum summaram dif- ferentia, & coefficiens secundi termini non posset esse 0.

33. Idem, verbis mutatis, intelligitur de coefficientibus reliquorum ter- minorum.

34. Quando æquatio libera est ab irrationalibus oportet ut irrationales se destruant in coefficiente secundi termini, si quæ sunt in Factoribus.

35. Si est  $a + b\sqrt{A} = c + d\sqrt{B}$ ; erit  $a = c$ ; &  $b\sqrt{A} = d\sqrt{B}$ .

Tom. II.

C

Non

Non enim, sed, si fieri potest, sit  $a = c + e$ , &  $a - c = e$ . Quia erat ex hypothesi

$$a + b\sqrt[n]{A} = c + d\sqrt[n]{B}; \text{ erit } a - c + b\sqrt[n]{A} - d\sqrt[n]{B} = 0 = e + b\sqrt[n]{A} - d\sqrt[n]{B}.$$

Fiat nunc ut  $b$  ad  $d$  sic  $\sqrt[n]{B}$  ad  $\sqrt[n]{C}$ ; eritque  $b\sqrt[n]{C} = d\sqrt[n]{B}$ ; ac

$$e + b(\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{C}) = 0; \text{ vel } \frac{e}{b} = \sqrt[n]{C} - \sqrt[n]{A}$$

id est differentia duarum surdarum æqualis quantitati rationali, quod est absurdum.

36. Fortius vera est propositio si  $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A}$  tunc enim  $a + b\sqrt[n]{A} - c - d\sqrt[n]{A} = 0$ , &  $\frac{a - c}{d - b} = \sqrt[n]{A}$ .

37. Quare si polynomium aliquod constet e pluribus terminis rationalibus, & e pluribus surdis, sitque totum polynomium  $= 0$ ; summa tum rationalium tum irrationalium pariter seorsim  $= 0$ .

38. Eodem pacto ostendemus quod si polynomium constet & pluribus terminis realibus & pluribus imaginariis, sitque totum polynomium  $= 0$ ; erit summa realium seorsim  $= 0$ ; & summa imaginariorum pariter seorsim  $= 0$ .

39. Radices imaginariæ revocantur (per Num. 10.) ad formam

$$m + n\sqrt{-1} \text{ vel } m + n\sqrt{-p}$$

& radices reales, ut constat, ad formam

$$m + n\sqrt{+1} \text{ vel } m + n\sqrt{+p}$$

ubi  $m$  &  $n$  sunt quantitates quælibet, vel rationales, vel surdæ; complexæ vel incomplexæ, sed reales. Earum formam, qua conficere possint æquationem rationalem, nunc non quærimus, tantum solliciti de radicibus quadraticis.

40. Omne factum ex pari numero Factorum, quorum singuli continent quantitatem  $n\sqrt{+p}$ , complectitur rationalem ipsius  $n\sqrt{+p}$  expressionem, nempe factum ex binis secundam, e quaternis quartam, e senis sextam &c. potestatem ejus radicalis vel primam, secundam, tertiam, ipsius  $p$ .

41. Omne factum ex impari Factorum numero complectitur ipsam radicalem; nempe summa radicum, ipsam radicalem; factum ex ternis, quinis, septenis, radicalem eandem ductam in ejusdem secundam, quartam, sextam &c. potestatem.

42. Si quantitas surda est realis, ejus potestates omnes sunt rationales positivæ, seu sit  $+n\sqrt{p}$ , seu  $-n\sqrt{p}$ . Est enim  $(\pm n\sqrt{p})^{2r} = +n^{2r}p^r$ . Sed po-

potestates impares sunt irrationales positivæ, si sit  $+n\sqrt{p}$ ; nam  $(+n\sqrt{p})^r = +n^r p^{\frac{r}{2}}$ ; & negativæ si sit  $-n\sqrt{p}$ , quia  $(-n\sqrt{p})^r = -n^r \cdot p^{\frac{r}{2}}$ .

43. Si quantitas furda est imaginaria &  $r$  numerus par, quantitas  $n^{2r} p^r$  est rationalis & positiva; secus vero rationalis negativa; ita ut ejus potestates secunda, quarta, sexta, octava, decima, duodecima &c; sint alterne negativæ & positivæ. Nam

$$(\pm n\sqrt{-1})^2 = +n^2 \cdot -1 = -n^2; (\pm n\sqrt{-1})^4 = +n^4 \cdot -1 \cdot -1 = +n^4.$$

$$(\pm n\sqrt{-1})^6 = (\pm n\sqrt{-1})^4 \cdot (\pm n\sqrt{-1})^2 = +n^4 \cdot -n^2 = -n^6 \text{ \&c.}$$

Harum vero exponentes sunt

$$2 = 2.1; 4 = 2.2; 6 = 2.3; 8 = 4.2; 10 = 2.5; 12 = 6.2 \text{ \&c.}$$

itaque est, ordine

$$r = 1; r = 2; r = 3; r = 4; r = 5; r = 6 \text{ \&c.}$$

44. Si quantitas furda est imaginaria, &  $r$  numerus impar, est  $(\pm n\sqrt{-1})^r$  quantitas imaginaria & alterne positiva & negativa. Sit enim  $r = 2s+1$ , erit  $(\pm n\sqrt{-1})^r = \pm n^{2s+1} \cdot -1^{\frac{r}{2}}$ . Cum autem sit, ordine,  $s = 1$ ;

$s = 2$ ;  $s = 3$  &c. hi reddent ipsas  $+n^{2s+1}$  alterne negativæ & positivæ; sed ipsas  $-n^{2s+1}$  alterne positivæ & negativæ.

45. Si æquatio

$$0 = O + Nx + Mx^3 + Lx^3 + Kx^4 + Ix^5 + Hx^6 + \text{\&c.}$$

sit divisibilis per  $x + m + n\sqrt{p} = 0$ , erit divisibilis etiam per  $x + m - n\sqrt{p}$ .

Cum enim æquatio proposita dividi possit per  $x + m + n\sqrt{p} = 0$ , est

$$x = -m - n\sqrt{p}, \text{ \& est } -m - n\sqrt{p}$$

una radicum æquationis. Ergo ea substituta pro  $x$ , dabit quantitatem nihilo æqualem. Sed hæc substitutio præbet

$$0 = O - Nm + M(m^3 + n^3 p) - L(m^3 + 3mn^2 p) + K(m^4 + 6m^2 n^2 p + n^4 p^2)$$

$$- Nn\sqrt{p} + 2Mmn\sqrt{p} - L(3m^2 n\sqrt{p} + n^3 p\sqrt{p}) + K(4m^3 n\sqrt{p} + 4mn^2 p\sqrt{p})$$

$$- I(m^5 + 10m^3 n^2 p + 5mn^4 p^2) + \text{\&c.}$$

$$- I(5m^4 n\sqrt{p} + 10m^2 n^2 p\sqrt{p} + n^4 p^2\sqrt{p}) + \text{\&c.}$$

Est ergo (Nº. 35.)

$$0 = -Nn\sqrt{p} + 2Mmn\sqrt{p} - L(3m^2n\sqrt{p} + n^3p\sqrt{p}) +$$

$$K(4m^3n\sqrt{p} + 4mn^3p\sqrt{p}) - I(5m^4n\sqrt{p} + 10m^2n^3p\sqrt{p} + n^5p^2\sqrt{p}) + \&c.$$

quæ æquatio dividi potest tum per  $+n\sqrt{p}$ , tum per  $-n\sqrt{p}$ . Est ergo utraque radix hujus æquationis.

46. Observandum non ideo confici posse, ergo  $n\sqrt{p} = 0$ , nam eadem æquatio non complectitur omnes conditiones problematis, cum sit tantum pars propositæ, quæ omnes complectebatur.

47. Eadem propositio demonstrari potest etiam ex eo quod ipsa pars

$$0 = 0 - Nm + M(m^2 + n^2p) - L(m^3 + 3mn^2p) + \&c.$$

continent tantum potestates pares ipsius  $n\sqrt{p}$ ; altera vero pars

$$0 = -Nn\sqrt{p} + 2Mmn\sqrt{p} - L(3m^2n\sqrt{p} + n^3p\sqrt{p}) + \&c.$$

omnes potestates impares ejusdem  $-n\sqrt{p}$ . Ergo hæc eadem pars altera divisa per  $-n\sqrt{p}$ , continebit tantum ejusdem potestates pares. Tum vero utraque æquatio obtinetur omnino eadem, seu ponatur  $+n\sqrt{p}$ , seu  $-n\sqrt{p}$ . Ergo &c.

48. Si quantitas realis  $\pm n\sqrt{p}$  fieret imaginaria  $\pm n\sqrt{-p}$ , æquatio oriatur eadem, præter aliquot signa mutata secundum ostensa N<sup>o</sup> 42. 43. 44. Quæ signorum mutatio vim præcedentis non infringit. Igitur

49. Si qua æquatio Factorem habet  $x \pm m + n\sqrt{p} = 0$ , eadem habet etiam Factorem  $x \pm m - n\sqrt{p} = 0$  & si qua æquatio Factorem habet  $x \pm m + n\sqrt{-p} = 0$ , eadem habet etiam Factorem  $x \pm m - n\sqrt{-p} = 0$  & vicissim.

Idem etiam sic ostendi potest. Quoniam æquatio proposita dividi potest per  $x \pm m + n\sqrt{\pm p} = 0$ , una e quantitatibus solventibus æquationem propositam continetur in hac æquatione simplici; ergo etiam aliæ quantitates, quæ cum hac necessario junctæ sunt, si quæ sunt, solvunt æquationem propositam. Atqui si  $x \pm m + n\sqrt{\pm p} = 0$ , necessario  $x \pm m = -n\sqrt{\pm p}$ , &  $xx \pm 2mx + mm = nn \pm p$ . Hujus autem æquationis radices necessariae sunt  $x = \mp m + n\sqrt{\pm p}$  &  $x = \mp m - n\sqrt{\pm p}$ . Ergo &c.

50. Quare hujusmodi æquatio dividi potest per Factorem trinomialem

$$xx \pm 2mx + mm \mp nnp = 0 = (x \pm m + n\sqrt{\pm p})(x \pm m - n\sqrt{\pm p})$$

51. Tunc autem, si radices sunt reales, habebitur  $-nnp$ ; nam  $+n\sqrt{p} \cdot -n\sqrt{p} = -nnp$ . Sed, si radices sunt imaginariæ, habebitur  $+nnp$ ; quia  $+n\sqrt{-p} \cdot -n\sqrt{-p} = -nn \cdot -p = +nnp$ .

52. Factor trinomialis N<sup>o</sup> 50. semper est realis & immunis a radicali quadratica  $\sqrt{\pm p}$ .

53. Ex demonstratis sub N<sup>o</sup> 47. 48. fluere videtur quod absurda est æquatio præbens unum e duobus Factoribus ibi descriptis, & non alterum. Ideo si qua æquatio comperiatur habere radicem unam  $x = \pm m \pm n\sqrt{\pm p}$ , aut



aut necessario habebit aliam  $\beta = \pm m - n\sqrt{p}$ ; aut falsa erit hypothesis præbens  $\alpha = \pm m + n\sqrt{\pm p}$ , & excludens  $\beta = \pm m - n\sqrt{\pm p}$ .

54. Aequatio ordinis imparis  $2s + 1$  habet ultimum terminum conflatum ex Factoribus  $2s + 1$ . Ergo æquatio ordinis imparis, si rationalis est, non potest habere Factores omnes formæ

$$x \pm m \pm n\sqrt{\pm p} = 0$$

Nam ultimus terminus necessario esset irrationalis.

55. Quare omnis æquatio ordinis imparis habet saltem unam radicem realem, & si plures habet reales, earum numerus est semper impar.

56. Aequatio ordinis parisi  $2s$ , habet ultimum terminum conflatum ex Factoribus numero  $2s$ . Eadem confici potest ex  $s$  Factoribus trinomialibus descriptis N<sup>o</sup>. 50. Sed ubi radices singulorum Factorum trinomialium sunt imaginariæ, hi Factores ultimum terminum habent positivum. Ergo

57. Si æquatio ordinis parisi  $2s$  habet omnes radices imaginarias, habet ultimum terminum positivum. Et si æquatio ordinis parisi  $2s$  habet ultimum terminum negativum, ea habet saltem duos Factores reales, formæ

$$x \pm m + n\sqrt{p} = 0 \text{ \& } x \pm m - n\sqrt{p} = 0$$

58. Sed ultimus terminus Factoris trinomialis hinc orti est  $mm - np$ , qui positivus est quando  $m$  superat  $n\sqrt{p}$ , vel quando utraque radix æquationis  $\mp m \pm n\sqrt{p}$ , est positiva; & si hujusmodi essent omnes ultimi termini omnium Factorum trinomialium, darent ultimum terminum æquationis compositæ positivum. Ergo, quando ultimus terminus æquationis compositæ, ordinis parisi, negativus est, ultimus terminus unius saltem Factoris trinomialis negativus est, atque ideo  $m$  est minor quam  $n\sqrt{p}$ . Tunc autem  $x \pm m + n\sqrt{p} = 0$  dat  $x = \mp m - n\sqrt{p}$ , quæ radix est negativa; &  $x \pm m - n\sqrt{p} = 0$  præbet  $x = \mp m + n\sqrt{p}$ , quæ radix est positiva, Igitur

59. Omnis æquatio ordinis parisi habens ultimum terminum negativum, habet saltem duas radices reales, alteram positivam, alteram negativam.

60. Cum vero ultimi termini Factorum binomialium, formæ  $-qq$ , dent factum positivum, si eorum numerus est par, negativum si impar; constat omnem æquationem ordini parisi  $2s$ , habens ultimum terminum negativum, habere radicum realium numerum impariter parem, nempe duas, quod ostendimus, vel, si plures, aut sex, aut decem, &c. nunquam quatuor, octo &c;

61. Quævis radix realis  $\sqrt[n]{A}$ , geometrice potest determinari, querendo

$x = 1$  medias proportionales inter unitatem &  $A$ . Sic  $\sqrt[3]{A}$  invenitur prima duarum proportionalium inter 1 &  $A$ , est enim

$$1 \text{ ad } \sqrt[3]{A} \text{ ut } \sqrt[3]{A} \text{ ad } \sqrt[3]{AA} \text{ ut } \sqrt[3]{AA} \text{ ad } \sqrt[3]{AA^2} = A$$

C 3

Par

Pariter  $\sqrt[n]{A}$ ;  $\sqrt[n]{A}$  &c, est prima trium, quatuor &c. proportionalium inter, & A.

Hæ mediæ proportionales vel per curvarum intersectionem, vel mechanice per instrumenta, possunt semper inveniri. Licet ergo quamlibet quantitatem realem exponere sine signo, etiamsi non semper ex datis in æquatione liceat exponere valorem incognitæ sine signo, quinimo etiamsi aliquando nullo pacto possimus exponere. Aliud est æquationem solvere, idest exponere per datas in æquatione valorem incognitæ, aut invenire quantitatem simplicem, cujus potestates positæ pro incognitæ potestatibus respondentibus, reddant æquationem nihilo æqualem, aut tandem quæ juncta simbolo incognitæ per signum aptum, æquationem dividat sine residuo: aliud est inquirere quid accadat quando omnes radices æquationis sunt reales.

62. Cum poni possit  $\sqrt[n]{A} = a$ , quando  $\sqrt[n]{A}$  est quantitas realis, patet idem fieri posse quando  $\sqrt[n]{A} = \sqrt[r]{B} \pm \sqrt[r]{C} \pm \sqrt[r]{D} \pm \&c.$  Nam ex N<sup>o</sup>. LXXXIII. Sect. I. Cap. VIII. Tom. I. pag. 76, omnes radicales revocari possunt ad eundem exponentem  $m$ . Singulæ radicales exponi possunt sine signo per  $\beta$ ;  $\gamma$ ;  $\delta$ , & harum aggregarum per unicum symbolum, quomodocunque ea junctæ sint per signa + & —.

63. Idem fieri potest quando sunt radicales radicalium, ut si esset  $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \pm \sqrt[r]{C - D + \sqrt[r]{E}}$ ; ex gr. si haberetur  $\sqrt[7]{ab + \sqrt[5]{cd - ef + \sqrt[3]{G}}}$ . Nam inveniri potest valor ipsius  $\sqrt[r]{E} = a$ ; deinde valor  $\sqrt[r]{C - D + a} = \beta$ ; ac tandem valor ipsius  $\sqrt[n]{B} \pm \beta$ .

64. Ponamus igitur æquationem ordinis  $m$ , habentem omnes radices reales, constari ex æquationibus simplicibus

$$x + a = 0; x + b = 0; x + c = 0; x + d = 0 \&c$$

donec numerus Factorum simplicium sit  $m$ , quandoquidem hoc fieri potest, seu adsint radicales meræ, seu radicales & rationales, seu meræ rationales.

65. Constat coefficientem secundi termini, vel  $x^{m-1}$ , esse harum summam

$$a + b + c + d + e + f + \&c = A$$

& coefficientem tertii termini, vel ipsius  $x^{m-2}$  esse summam factorum ex binis, nempe

$$a(b + c + d + e + f + g + \&c) + b(c + d + e + f + g + \&c) + c(d + e + f + g + \&c) + d(e + f + g + \&c) + e(f + g + \&c) + \&c. = B$$

66. Nunc dico quod si  $A = 0$ , erit, in hac hypothefi, B quantitas negativa. Enim fit

$$a + b + c + d + e + f + g + \&c = 0$$

erit

$$a = -b - c - d - e - f - g - \&c.$$

&c

$$\begin{aligned} a(b + c + d + e + f + g + \&c) &= (-b - c - d - e - f - g - \&c) \text{ in} \\ (+b + c + d + e + f + g + \&c) &= \\ - (b + c + d + e + f + g + \&c)^2 \end{aligned}$$

Sed in hoc quadrato complexo & negativo, sunt negative summa quadrata simplicia, idest  $bb$ ;  $cc$ ;  $dd$ ;  $ee$ ;  $ff$ ;  $gg$ ;  $\&c$ , & præterea bina rectangula ex singulis in summam fequentium, pariter negative sumta, idest.

$$\begin{aligned} - 2b(c + d + e + f + g + \&c) &- 2c(d + e + f + g + \&c) - \\ 2d(e + f + g + \&c) &- 2e(f + g + \&c) - \&c. \end{aligned}$$

Atqui eadem rectangula, sed simpla & positive sumta, sunt in reliqua parte coefficientis B. Manet igitur omnino in hac hypothefi, pro B summa quadratorum & rectangulorum negative sumtorum.

67. Hoc ratiocinium se extendit ad alias hypothefes secundum quas esse potest  $A = 0$ ; quæ tandem ad duas revocantur. Nam

*Primo* fieri potest ut quantitates  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ; &c. in coefficiente A junctæ sint utcumque signis + & -.

*Secundo* fieri potest, ut eæ se destruant per partes, quemadmodum, si binæ, ternæ, quaternæ &c. se destruant, ut si sit  $a + b = 0 = c + d = e + f = g + h$  &c, vel  $a + b + c = 0 = d + e + f = g + h + i$  &c vel  $a + b = 0 = c + d + e = f + g + h + i$  &c, & sic de reliquis.

68. Nam statim, quomodocumque hæ quantitates se destruant, semper erit eorum aggregatum nihilo æquale, ut patet, quia si  $a + b = 0$ , &  $c + d = 0$  erit etiam, addendo æqualibus  $a + b + c + d = 0$  &c. Ceterum idem constat ex hypothefi, ex qua est  $A = 0$ . Tamen non semper eadem invenitur summa factorum ex binis, ut postea videbimus.

69. Quomodocumque junctæ sint quantitates  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ; &c in coefficiente  $A = 0$ , eæ omnes, præter eam quæ reliquarum summæ ponitur æqualis, ex. gr. præter  $a$ , habebunt in valore ipsius  $a$  signa contraria, his, quæ habebant in ipso coefficiente A, ut patet per regulas transpositionis. Ex. gr. fit

A

$$A = 0 = a + b - c + d - e - f + g + \&c$$

erit

$$a = -b + c - d + e - f - g - \&c.$$

70. Semper igitur rectangula post substitutionem valoris pro  $a$ , habebunt signa opposita iis quæ prius habebant. Quod ut pateat, ponatur summa omnium

$$a + b - a = A$$

summa factorum ex binis erit

$$a(b - a) - ba.$$

Et quando

$$A = 0 = a + b - a, \text{ atque ideo } a = -b + a$$

fit

$$a(b - a) = (-b + a)(+b - a) = -(b - a)^2 = -bb + 2ab - aa$$

Habent ergo  $-ba$  in summa factorum ex binis, &  $+ba$  in valore prioris partis  $a(b - a)$  invento per substitutionem, signa contraria; & hæcenus superest

$$B = -bb + ba - aa.$$

Cum autem sit  $bb$  ad  $ba$  ut  $ba$  ad  $aa$ , est  $bb + aa$  major quam  $2ba$ , & fortius quam  $ba$ . Est ergo  $-bb + ba - aa$  quantitas negativa.

Ponatur nunc

$$-a = -c + \beta$$

est summa factorum ex binis, erit

$$a(b - c + \beta) + b(-c + \beta) - c\beta$$

Quia vero est  $a = -b + c - \beta$ , erit prima pars hujus facti, id est

$$a(b - c + \beta) = (-b + c - \beta)(+b - c + \beta) = -(+b - c + \beta)^2 = -bb - 2b(-c + \beta) - cc + 2c\beta - \beta\beta$$

Habent ergo  $+b(-c + \beta)$  &  $-c\beta$  in summa factorum ex binis, &  $-b(-c + \beta)$  ac  $+c\beta$  in valore prioris partis  $a(b - c + \beta)$  signa contraria, & hæcenus superest

$$B = -bb + bc - b\beta cc + c\beta - \beta\beta$$

ubi

ubi quantitas —  $cc + 2c\beta - \beta\beta$  probabitur negativa, ut supra. Sed, per idem ratiocinium est

$$bb \text{ ad } b(-c + \beta) \text{ ut } b(-c + \beta) \text{ ad } (-c + \beta)^2$$

atque ideo

$$bb + (-c + \beta)^2 \text{ major quantitas quam } 2b(-c + \beta)$$

ergo quantitas negativa erit

$$— bb + 2b(— c + \beta) — cc + 2c\beta — \beta\beta$$

& fortius, quantitas

$$— bb + b(— c + \beta) — cc + c\beta — \beta\beta$$

in qua dimidiata pars quantitatum positivarum sumpta est.

Constat hoc ratiocinium extendi posse in infinitum, ponendo utcumque

$$\text{primo } \beta = \pm d \pm \gamma; \text{ deinde } \gamma = \pm e \pm \delta \text{ \&c.}$$

71<sup>a</sup> Quare ostensum est id quod propositum fuerat N<sup>o</sup> 66. 67. & quod huc recidit.

Omnis æquatio carens secundo termino, habet tertium negativum, si omnes ejus radices sunt reales.

72. Quare, si æquatio carens secundo termino habet tertium terminum positivum, ea habet aliquot, saltem, radices imaginarias.

Hoc necessario sequitur ex demonstratis. Tamen sic ostendi potest, Quando secundus terminus evanescit, est

$$B = — bb + bx — aa. (N<sup>o</sup>. 70.)$$

Ea quantitas tunc erit positiva, quando  $aa$  est minor quam  $bx — bb$ . Sit ergo

$$aa = bx — bb — cc, \text{ erit } a = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(— 3bb — 4cc)}$$

quæ quantitas est imaginaria.

73 Neque tamen dici potest, si quæ sint radices imaginariæ in æquatione quæ caret secundo termino, ea habebit tertium positivum. Nam æquatio quævis

$$x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} + \&c = 0$$

ducatur in Factorem trinomialem, cujus radices sunt imaginariæ, & cujus formula est

Tom. II.

D

25

$$x^2 + 2mx + mm + np = 0$$

fiet

$$\begin{aligned} x'^2 + Ax'^{r+1} + Bx'^r + &\&c \\ + 2mx'^{r+1} + 2mAx'^r + &\&c \\ + mmx'^r + &\&c \\ + np x'^r + &\&c \end{aligned} = 0$$

in qua, ut evanescat secundus terminus, esse debet  $A = -2m$ ; quare ponendo in coefficiente tertii termini  $-4mm$  pro  $+2mA$ , is, deletis delendis, fit

$$B = 3mm + np$$

& fieri potest ut  $B + np$  sit major, vel minor, quam  $3mm$ .

Vel, ex N<sup>o</sup>. 70, erit B quantitas negativa si  $aa$  est major quam  $bb$  —  $bb$ .  
Sit

$$aa = bb - bb + cc; \text{ \& ideo } a = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-3bb + 4cc)}$$

fieri potest ut  $\sqrt{(-3bb + 4cc)}$  sit imaginaria, nempe si  $3bb$  major est quam  $4cc$ . Ergo æquatio habens terminum secundum evanescentem, & tertium negativum, habere potest radices imaginarias.

74. Ceterum, si summa omnium radicum  $A = 0$  quia radices se destruunt binæ, ternæ, &c; summa factorum ex binis B; ex ternis C; ex quaternis D; &c. libera erit a tot radicalibus diversis, quot sunt æquationes oriundæ ex radicibus se destruentibus; sic si summa radicum sit

$$A = a + b + c + d + e + f + g + h + i + k + \&c$$

ad numerum  $m$ , & ponatur una  $a$  æqualis summæ reliquarum omnium, erunt in summis B; C; D; &c.  $m - 1$  radices diversæ.

Si sit

$$a = -b - c; d = -e - f - g; h = -i - k - l - p; \text{ ita}$$

ut habeantur æquationes ad numerum  $n$ , minorem quam  $m$ , erunt in summis B; C; D; &c.,  $m - n$  radicales diversæ. Quia nempe totidem exterminantur, pro iis ponendo valores suos.

75. Præterea in valore quantitatis B invento ad Num. 70. ex generali hypothefi quod  $A = 0$ , tot delentur facta ex binis, quot sunt æquationes peculiare nihil æquales per hypothefim. Sic erat



$$\begin{aligned}
 B = & -bb - b(c+d+e+f+g+h+i+k+\&c) \\
 & -cc - c(d+e+f+g+h+i+k+\&c) \\
 & -dd - d(e+f+g+h+i+k+\&c) \\
 & -ee - e(f+g+h+i+k+\&c) \\
 & -\&c. - \&c.
 \end{aligned}$$

Si nunc sit  $d+e+f+g = 0 = h+i+k+\&c$   
delebuntur

$$b(d+e+f+g+h+i+k+\&c) = b(0+0) =$$

$$c(d+e+f+g+h+i+k+\&c) =$$

$$d(h+i+k+\&c) = e(h+i+k+\&c) \&c.$$

& supererit omnino

$$B = -bb - bc - cc - dd - d(e+f+g) - ee - e(f+g) \&c$$

76. Quapropter si binæ se destruant, manebunt sola quadrata. Tunc autem necessario radicum numerus est par. Constat autem hujusmodi mutationes in valore ipsius B, non infringere vim ratiocinii superius allati.

Hinc etiam, æquatio rationalis nullum habens coefficientem fractum, nullam habet radicem fractam.

Nam si est

$$A = a + b + c + \dots + \frac{m}{n}$$

statim coefficientis termini secundi fractus est.

Si est

$$A = a + b + c + \dots + \frac{m}{n} - \frac{m}{n}$$

erit fractio  $\frac{mm}{nn}$  in B coefficiente tertii termini

Si una fractio sit æqualis pluribus, ut sit

$$A = a + b + c + \dots + \frac{m}{n} - \frac{p}{q} - \frac{r}{s} - \&c;$$

$$\&c \text{ sit } \frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \&c$$

erit in B fractio

D 2

(—

$$\left(-\frac{p}{q} - \frac{r}{s} + \&c\right) \left(+\frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \&c\right).$$

Demonstratum est N<sup>o</sup> 20. 21. quod æquatio cujus omnes radices sunt affirmativæ, habet terminos alterne positivos & negativos; & quod æquatio cujus radices omnes sunt negativæ, habet omnes terminos affirmativos.

78. Neque tamen dici potest, æquatio cujus signa alternant, habet omnes radices positivas; quia potest habere radices imaginarias, quæ neque positivæ sunt, neque negativæ.

Nam æquatio quadratica formæ

$$xx - ax + A = 0.$$

habet duas radices imaginarias, quando est  $aa$  minor quam  $4A$ . Si plures æquationes hujusmodi, in quibus coefficientes secundi termini sint  $-\beta$ ;  $-\gamma$ ;  $-\delta$ ;  $-\&c.$ , & ultimi termini sint  $+B$ ;  $+C$ ;  $+D$ ;  $+\&c.$ , inter se ducantur, conficiunt compositam, cujus omnia signa alternabunt, ut constat e superiore demonstratione.

79. Potest igitur hujusmodi æquatio oriri tum e radicibus realibus, tum e radicibus imaginariis, quin ex æquationibus simplicioribus, quorum aliquæ habeant radices reales, aliquæ imaginarias.

80. Æquatio rationalis gradus imparis habere nequit omnes radices formæ  $m + n\sqrt{p}$ . (N<sup>o</sup> 54.)

81. Omnis æquatio gradus imparis, cujus signa alternant, habet ultimum terminum negativum. Sit enim  $2r+1$  exponens altissimi termini, hæc æquatio habebit terminos numero  $2r+2$ . Ultimus ergo occupabit sedem numero parem, constabit ex impari Factorum numero, quod etiam constat ex eo quod ultimus terminus sit factum ex omnibus radicibus; atqui hæc habent omnes signum  $-$  in Factoribus simplicibus. Ergo &c.

82. Omnis æquatio gradus paris habet in eadem hypothefi, ultimum terminum positivum.

83. Si omnes æquationis radices sunt negativæ, atque ideo omnes Factores formæ.

$$x + m = 0$$

Omnes termini erunt positivi. (N<sup>o</sup> 20. 21.)

Sed cum radices quadraticæ semper sint binæ, æquales & oppositæ; binarum factum, ut omnia signa sint positiva, esse debet formæ

$$xx + px + q = 0$$

cujus radices sunt reales si  $\frac{1}{4}pp$  superat  $q$ , secus imaginariæ, æquatio cujus omnia signa sunt positiva, habere potest radices vel omnes reales, vel omnes imaginarias, vel partim reales, partim imaginarias.

84. Ergo æquatio cujus omnia signa nec alternant nec positiva sunt, habet aliquot radices positivas, aliquot negativas; aut omnes imaginarias.

85. Æquatio quadratica oriri potest ex duobus Factoribus rationalibus.

si ejus Factores sint imaginarii formæ

$$x \pm m + n\sqrt{-p} = 0, \text{ \& } x \pm m - n\sqrt{-p} = 0,$$

oriatur æquatio

$$x^2 \pm 2mx + mm + nnp,$$

Si ejus Factores sint reales, & formæ

$$x \pm m + n\sqrt{p} = 0; \text{ \& } x \pm m - n\sqrt{p} = 0,$$

oriatur æquatio

$$x^2 \pm 2m + mm - nnp = 0$$

86. Harum æquationum termini ultimi differunt quantitate  $2nnp$ .

87. Æquatio quævis.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots Nx + O = 0$$

ducta in  $x + a$ , fit.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x^{n+1} & + & Ax^n & + & Bx^{n-1} & + & Cx^{n-2} & + & Dx^{n-3} & + & Ex^{n-4} & \dots & + & O & x & + & aO = 0 \\ +a & & +aA & & +aB & & +aC & & +aD & & & & & +aN \end{array}$$

88. Qua propter, si æquatio proposita resolvi potest in Factores, erit

$$A = a + \beta; B = b + \beta a; C = c + \beta b; \text{ \&c}$$

ponendo  $a; b; c$  &c. esse coefficientes æquationis uno gradu inferioris

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \text{\&c} \dots p = 0$$

& hanc esse ductam in  $x + \beta$ , ut conficiat propositam ordinis  $n$ . Hoc ratiocinium prosequi licet quamdiu æquatio resolvi potest in Factores.

89. Omnis æquatio, cujus radices sunt reales, resoluta in Factores concipi potest; ut constat ex terminis. *Concipi* inquam potest, non *resolvi*, quia latet adhuc methodus generalis determinandi radices æquationum ex earum coefficientibus.

90. Si æquatio habeat omnes radices reales; & ex ea excerpantur tres termini continui, quorum primus & ultimus habeant eadem signa, semper factum e coefficientibus primi & ultimi termini ex excerptis, majus erit

quadrato coefficiente termini medii. Nam ex æquatione ordinis  $n$  excerpantur tres termini continui

$$Lx^{n-r} + Mx^{n-r-1} + Nx^{n-r-2}$$

Erit

$$L = l + ak; M = m + al; N = n + am \text{ \&c}$$

idest, quivis coefficientis propositæ constabit ex duobus coefficientibus continuis æquationis ordinis  $n-1$ , altero ut erat, & præcedente ducto in radicem realem  $a$ . Quare

$$LN = (l + ak)(n + am) = ln + alm + ank + aakm$$

atque

$$MM = mm + 2alm + aall$$

Eritque  $LN$  minor quantitas quam  $MM$ , si  $ln$  minor est quam  $mm$ , &  $ank$  minor quam  $alm$  vel  $nk$ , quam  $lm$ , &  $aakm$  minor quam  $aall$ , vel  $km$  minor quam  $ll$ . Sunt autem  $k$ ;  $l$ ;  $m$ ; coefficientes æquationis inferioris, nempe ordinis  $n-1$ ; qui singuli conficiuntur ex coefficientibus æquationis inferioris & ordinis  $n-2$ , ductis in radicem realem  $\beta$ ; siquidem æquatio proposita radices omnes habet reales; & sic progrediendo per radices reales deveniemus tandem ad æquationem quadraticam

$$\beta x^2 + \gamma x + \zeta$$

in qua, si  $\beta\zeta$  sit minor quam  $\gamma\gamma$ , vera erit propositio de æquatione trium dimensionum; atque ideo de æquatione quatuor dimensionum &c; cum veritas propositionis in æquatione ordinis  $n$ , pendeat ab ejus veritate in æquatione ordinis  $n-1$ , &c.

Atqui æquatio quadratica, si duo termini extremi habeant eadem signa, donari potest hac forma

$$xx \pm \frac{\gamma x + \zeta}{\beta}$$

cujus radices sunt

$$x \pm \frac{\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - 4\beta\zeta)}}{2\beta} \text{ \& } x \pm \frac{\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - 4\beta\zeta)}}{2\beta}$$

quæ reales non sunt nisi sit  $\gamma\gamma$  major quantitas quam  $4\beta\zeta$ ; Ergo fortius est  $\gamma\gamma$  major quam  $\beta\zeta$ ; quando radices ejus æquationis sunt reales.

¶ 1. Hæc autem propositio converti nequit. Sic æquatio

$$x^4 + 4mx^3 + 6m^2x^2 + 4m^3x + m^4 - n^4p^4 = 0$$

in qua pono  $nm$  majorem quam  $nnp$ , ita est constituta ut  $1 \cdot 6m^4$  sit minor quam  $4m \cdot 4m^3 = 6m^4$ ; &  $4m \cdot 4m^3 = 16m^4$  minor quam  $6m^4 \cdot 6m^4 = 36m^4$  ac  $6m^4(m^4 - n^4p^4) = 6m^8 - 6m^4n^4p^4$  minor quam  $4m^3 \cdot 4m^3 = 16m^6$ . Tamen ea æquatio duas habet radices imaginarias  $x + m + n\sqrt{-p} = 0$  &  $x + m - n\sqrt{-p}$ .

Si vero termini extremi æquationis quadraticæ, ad quam tandem deveniatur, haberent signa contraria, nihil posset confici. Nam æquatio

$$xx \pm \frac{nx - \zeta}{d}$$

habet radices semper reales

$$x \pm \frac{n + \sqrt{(n^2 + 4d^2)}}{2d} \quad \& \quad x \pm \frac{n - \sqrt{(n^2 + 4d^2)}}{2d}$$

seu sit  $n$  major seu minor quam  $4d^2$ .

92. Ut indicarem duos terminos continuos,  $r.mum$ , &  $r+1...num$ , habere eadem signa, dixi N<sup>o</sup>. 23. esse signorum *successionem*; ut explicarem duos terminos continuos habere signa contraria, dixi *mutationem*; nunc *successionem* vel *mutationem* ambigue vocabo *signorum relationem*.

93. Æquatio ordinis  $n$  habet  $n$  signorum relationes: constat ex N<sup>o</sup>. 23.

94. Æquatio ordinis  $n$ , quam dicam *compositam*, ducta in Factorem simplicem formæ  $x \pm \alpha$ , dat æquationem ordinis  $n+1$ , quam vocabo *compositam*, in qua termini sunt numero  $n+2$ ; signorum relationes  $n+1$ ; & termini quorum coefficientes constant duabus partibus, numero  $n$ . Nam hæc æquatio composita constat duabus *seriebus*, quarum una

$$x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} \dots + Rx$$

est ipsa componens.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots + R$$

ducta in  $x$ . Altera vero series,

$$\pm \alpha x^n \pm \alpha Ax^{n-1} \pm \alpha Bx^{n-2} \pm \alpha Cx^{n-3} \pm \alpha Dx^{n-4} \dots \pm \alpha R$$

est eadem componens ducta in  $\alpha$ . Ita vero disponendæ sunt hæc series ut primus, secundus, tertius &c. terminus secundæ seriei subfit ordine, secundo, tertio, quarto &c. termino primæ. Hinc ultimus terminus  $\alpha R$  secundæ seriei sequetur ultimum  $Rx$  primæ, ut primus  $x^{n+1}$  primæ præcedit primum

num  $x^n$  secundæ. Igitur primus & ultimus terminus compositæ sunt incomplexi; reliqui omnes complexi & quidem duabus partibus. Omnium autem terminorum numerus in composita est  $n+2$ ; ablati duobus, primo & ultimo qui sunt incomplexi, manet complexorum numerus  $n$ , qui pariter est numerus relationum signorum in componente.

95. Quæcunque sit relatio signorum in componente, manebit omnino eadem, si componens multiplicetur per quantitatem incomplexam seu positivam, seu negativam; sed in prima hypothefi signa manebunt in facto qualia erant in componente; in secunda hypothefi signa positiva mutabuntur in negativa, & negativa in positiva. Patet ex legibus signorum in multiplicatione.

96. Igitur tot & iisdem locis erunt tum successiones tum mutationes in facto, quot & quibus locis erant in componente.

97. Atqui componens prius ducitur in  $x$ , quæ quantitas semper est positiva. Igitur tot & iisdem locis prima series compositæ habebit mutationes & successiones, quot composita, si numerus locorum computetur ab altissimo termino in utraque. Si vero considerentur exponentes ipsius  $x$ , hi erunt in prima serie compositæ aucti unitate, ita ut si exponentes duorum terminorum sint  $n-r$ , &  $n-r-1$ , atque hi habeant eadem signa in componente; termini quorum exponentes sunt  $n-r+1$  &  $n-r$  in prima serie compositæ habeant eadem signa. Si vero termini quorum exponentes sunt  $n-p$  &  $n-p-1$  in componente habeant signa contraria, termini quorum exponentes sunt  $n-p+1$ , &  $n-p$ , habeant signa opposita in prima serie compositæ. Et quidem eadem erit mutatio in utraque; id est vel  $e-$  in  $+$ , vel  $e+$  in  $-$ .

98. Idem constat de secunda serie compositæ, si Factor simplex sit  $x+z$ .

99. Cum autem termini secundæ seriei in composita uno loco promoveantur singuli, dum secunda series jungitur primæ ut compleatur æquatio composita, constat tot futuros in composita coefficients complexos, quorum partes habent signa opposita, quot sunt mutationes in componente; & hanc signorum *oppositionem* accidere in iis terminis compositæ qui habent eodem exponentes ac primi termini singularum mutationum in componente. Tot autem in composita erunt termini complexi, quorum duæ partes habent eadem signa, quot sunt successiones in componente; & hæc signorum *similitudo* locum habebit in terminis compositæ, qui habent eodem exponentes ac termini successivi in componente, præter ultimos cujusque successioneis. Ex. gr. sit componens

$$x^9 + Ax^8 + Bx^7 - Cx^6 - Dx^5 + Ex^4 - Fx^3 + Gx^2 - Hx - I = 0$$

in qua sunt quinque mutationes, prima  $ex + Bx^7$  in  $- Cx^6$ ; secunda  $ex - Dx^5$  in  $+ Ex^4$ ; tertia  $+ Ex^4$  in  $- Fx^3$ , quarta  $ex - Fx^3$  in  $+ Gx^2$ ; quinta denique  $ex + Gx^2$  in  $- Hx$ . Igitur primi termini singularum mutationum, habent exponentes 7; 5; 4; 3; 2. Termini, qui in composita ex hac &  $x+z$  habent hos eodem exponentes, constabunt duabus partibus oppositis. Exponentes terminorum successivorum in componente, sunt

9; 8;



9; 8; 7. & 6 ac 5, & 1 ac 0; hinc demtis 7 ac 5, (qui sunt communes h. terminis ac primis singularum mutationum,) & 0, (qui est exponens ultimi termini,) manent 9; 8; 6; 1; exponentes terminorum constantium duabus partibus similibus in composita ut supra. Revera composita est

$$\begin{aligned} x^{10} + A x^9 + B x^8 - C x^7 - D x^6 + E x^5 - F x^4 + G x^3 - \\ + a x^2 - aA x - aB x^2 - aC x^2 - aD x^2 + aE x^2 - aF x^2 + \\ - H x^2 - I x - aI = 0 \end{aligned}$$

100. Si vero Factor simplex sit  $x - a$ , quæ diximus de prima serie, huc repetenda erunt; sed in secunda pro signis positivis scribenda erunt negativa, & contra. Sic eadem æquatio novem dimensionum multiplicata per  $x - a$ , fiet

$$\begin{aligned} x^{10} + A x^9 + B x^8 - C x^7 - D x^6 + E x^5 - F x^4 + G x^3 - \\ - a x^9 - aA x^8 - aB x^7 + aC x^6 + aD x^5 - aE x^4 + aF x^3 - \\ - H x^2 - I x + aI = 0 \end{aligned}$$

101. Quapropter ubi erant signorum oppositiones in prima hypothefi, erunt similitudines in hac secunda; & ubi erant similitudines, erunt oppositiones.

Sic exemplum præbebat terminos in quibus  $x$  habet exponentes 9; 8; 6; 1, constantes duabus partibus similibus; & eos in quibus  $x$  exponentes habet 7; 5; 4; 3; 2, constantes duabus partibus oppositis, quando nempe proposita ducta erat in  $x + a$ : nunc, (eadem proposita ducta in  $x - a$ ) termini, in quibus  $x$  habet exponentes 9; 8; 6; 1, constant duabus partibus oppositis; & termini, in quibus  $x$  habet exponentes 7; 5; 4; 3; 2, constant duabus partibus similibus.

102. Una radix negativa addita æquationi ordinis  $n$ , ut fiat æquatio ordinis  $n + 1$ , addet unicam successionem. Et una radix positiva unicam mutationem.

Nam, quatenus eadem sunt mutationes & successiones in composita ab altissimo termino  $x^{n+1}$  ad penultimum  $Sx$ , quæ sunt in tota composita, nempe ab ejus altissimo termino  $x^n$  ad ultimum  $S$ ; si radix est negativa, una additur successio in composita, a penultimo termino  $Sx$  ad ultimum  $aS$ , qui tunc semper habet idem signum ac ultimus componentis, aut penultimus compositæ. Hoc autem accidit.

*Primo* quando omnia signa componentis sunt positiva.

*Secundo*, quando sunt quidem signa tum positiva tum negativa; sed est semper  $a$  minor quam coëfficiens unius termini ex componente divisus per coëfficiëntem termini præcedentis pariter e componente desumpti. Quando.

doquidem si est  $\alpha$  minor quam  $A$ ; & quam  $\frac{B}{A}$ ; & quam  $\frac{C}{D}$ ; & quam  $\frac{D}{E}$

&c.; erit pariter  $\alpha A$  minor quam  $B$ ;  $\alpha B$  minor quam  $C$ ;  $\alpha C$  minor quam  $D$  &c. Igitur in composita praevalent signa seriei superioris, quæ sunt eadem ac signa componentis (Nº. 94.)

102. Sed quando radix est positiva, ultimus terminus compositæ habet signum contrarium signo quod habebat ultimus terminus componentis: hoc autem signum idem est ac signum penultimi termini compositæ. Quare in hac hypothesi addita est compositæ una mutatio a penultimo termino ad ultimum.

Æquatio multiplicata per Factorem  $x - \alpha$  habet ab altissimo termino  $x^{n+1}$  ad penultimum & easdem successiones & mutationes quas habebat composita, quando praevalent omnia signa seriei superioris (Nº. 100.)

103. In hac hypothesi composita habebit mutationes & successiones iisdem locis, in quibus eas habebat componens.

104. Quæ diximus de toto intelliguntur de parte. Tot sunt termini in composita ab altissimo  $x^{n+1}$  ad aliquem  $(F.. \alpha E)x^{n-r+1}$ , quot in componente ab altissimo  $x^n$  ad  $Fx^{n-r}$ . Quare tot esse possunt mutationes & successiones in composita, quot in componente, intra hos limites. Quod ubi accidit nulla neque mutatio neque successio introducta est in composita, ut patet ex terminis.

105. Neque mutari potest relatio signorum in aliquo compositæ termino, nisi is constet duabus partibus oppositis. Hoc autem ut accidat, quando Factor est  $x + \alpha$ , aut radix negativa, necessario duo termini continui æquationis componentis habebunt signa contraria. Sint ergo duo termini continui æquationis componentis.

$$+ Fx^{n-r} \quad \text{---} \quad Gx^{n-r-1}$$

vel pro secunda hypothesi:

$$- Fx^{n-r} \quad + Gx^{n-r-1}$$

e quibus & e termino præcedente ..  $Ex^{n-r+1}$ , fiant multiplicando per  $x + \alpha$ , duo termini continui compositæ

$$+ Fx^{n-r+1} \quad - Gx^{n-r} \\ \dots \alpha E \quad \quad + \alpha F$$

vel pro secunda hypothesi,

$$- Fx^{n-r+1} \quad + Gx^{n-r} \\ \dots \alpha E \quad \quad - \alpha F$$

106. Quando autem Factor est  $x - \alpha$ , aut radix positiva; terminus compositæ habebit duas partes affectas signo contrario, quando duo termini continui ex æquatione componente habent eadem signa. Sint ergo duo termini æquationis componentis

$$+Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1}$$

vel, pro secunda hypothesi

$$-Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1}$$

e quibus, & e termino præcedente ..  $Ex^{n-r+1}$ , fiant multiplicando per  $x - \alpha$ , duo termini continui compositæ

$$\begin{array}{r} +Fx^{n-r+1} + Gx^{n-r} \\ \dots \alpha E \qquad \qquad -\alpha F \end{array}$$

vel, pro secunda hypothesi

$$\begin{array}{r} -Fx^{n-r+1} - Gx^{n-r} \\ \dots \alpha E \qquad \qquad +\alpha F \end{array}$$

& nulla fiat mutatio in primo horum terminorum, sed ea fiat in secundo tum N<sup>o</sup>. 105. tum N<sup>o</sup>. 106.

107. Est ergo  $\alpha F$  major quam  $G$ , atque ideo  $\alpha$  major quam  $\frac{G}{F}$ ; & quando radix est negativa, mutatio quæ erat in componente ab  $\pm Fx^{n-r}$  ad  $\mp Gx^{n-r-1}$  N<sup>o</sup>. 105. facta est successio in composita; quandoquidem ponendo

$$+F \dots \alpha E = +f \text{ \& } -G + \alpha F = +g,$$

termini compositæ fient

$$+fx^{n-r+1} + gx^{n-r},$$

vel pro secunda hypothesi

$$-fx^{n-r+1} - gx^{n-r}.$$

108. At quando radix est positiva, successio quæ erat in componente a  $\pm Fx^{n-r}$  ad  $\pm Gx^{n-r-1}$  (N<sup>o</sup>. 106.) facta est mutatio in composita, siquidem, ex superiore denominatione, termini compositæ fient

E 2

$+fx$

$$+fx^{n-r+1} - gx^{n-r}$$

vel pro secunda hypothesi

$$-fx^{n-r+1} + gx^{n-r}$$

109. Nunc dico aut, quando radix est negativa, nullam aliam successione introductam esse in composita; aut siquæ præterea mutationes componentis versæ sint in successiones in composita, vicissim totidem successiones componentis versas esse in mutationes in composita.

Aut enim termini sequentes componentis habent eadem signa ac terminus  $Gx^{n-r-1}$ , aut sunt qui signa habent contraria.

Si omnes habent eadem signa, erit reliqua componens

$$-Hx^{n-r-2} -Ix^{n-r-3} -Kx^{n-r-4} -Lx^{n-r-5} \dots -Qx^1 -Rx -S$$

vel in secunda hypothesi

$$+Hx^{n-r-2} +Ix^{n-r-3} +Kx^{n-r-4} +Lx^{n-r-5} \dots +Qx^1 +Rx +S = 0$$

unde fiet æquatio composita, addendo terminum præcedentem

$$+gx^{n-r} -Hx^{n-r-1} -Ix^{n-r-2} -Kx^{n-r-3} -Lx^{n-r-4} \dots -Qx^1 -Rx^1 -Sx -aS = 0$$

$$\quad -aG \quad -aH \quad -aI \quad -aK \quad \dots -aP \quad -aQ \quad -aR \quad -aS$$

aut in secunda hypothesi

$$-gx^{n-r} +Hx^{n-r-1} +Ix^{n-r-2} +Kx^{n-r-3} +Lx^{n-r-4} \dots +Qx^1 +Rx^1 +Sx +aS = 0$$

$$\quad +aS \quad +aH \quad +aI \quad +aK \quad \dots +aP \quad +aQ \quad +aR \quad +aS$$

ubi singuli termini constant duabus partibus habentibus eadem signa, & nullam patiuntur mutationem. Erat autem mutatio in componente a termino

$Fx^{n-r}$  ad terminum  $Gx^{n-r-1}$ ; & est mutatio in composita a termino

$gx^{n-r}$  ad sequentem. Tot autem sunt termini in composita quot in componente, a termino cujus exponents est  $n-r-1$  ad ultimum inclusive. Ergo

in utraque a termino cujus exponents est  $n-r$  ad ultimum inclusive, una est mutatio, & idem successione numerus. Una ergo addita est successio

in composita a termino  $fx^{n-r+1}$  ad proximum  $gx^{n-r}$ .

Si qui termini habent signa contraria, ita ut reliqua æquatio componens sit

$$-Hx^{n-r-2} -Ix^{n-r-3} \dots -Mx^{n-r-s+1} +Nx^{n-r-5} \dots +Qx^1 +Rx +S$$

vel in secunda hypothesi

$$+Hx$$

$$+Hx^{n-r-2} + Ix^{n-r-3} \dots + Mx^{n-r-s+1} - Nx^{n-r-s} \dots - Qx^3 - Rx - S$$

atque ideo composita

$$\begin{array}{ccccccc} -Hx^{n-r-1} & -Ix^{n-r-2} & \dots & +Nx^{n-r-s+1} & \dots & +Qx^3 + Rx^2 + Sx & \\ -aG & -aH & \dots & -aM & \dots & +aP + aQ + aR + aS & \end{array}$$

vel in secunda hypothesi

$$\begin{array}{ccccccc} +Hx^{n-r-1} & +Ix^{n-r-2} & \dots & -Nx^{n-r-s+1} & \dots & -Qx^3 - Rx^2 - Sx & \\ -aG & +aH & \dots & +aM & \dots & -aP - aQ - aR - aS = 0 & \end{array}$$

aut prævalebunt signa seriei superioris, aut signa seriei inferioris in terminis quorum duæ partes habent signa opposita.

Si prævalent signa seriei superioris, tot erunt in composita mutationes & successiones a termino  $gx^{n-r}$  ad ultimum quot in componente, ut patet e superioribus.

Si prævalent signa seriei inferioris, fiet æquatio composita

$$+gx^{n-r} - bx^{n-r-1} - ix^{n-r-2} \dots - nx^{n-r-s+2} + mx^{n-r-s+1} - ox^{n-r-s} + \dots$$

atque una erit mutatio totidemque successiones tum in composita tum in componente a termino cujus exponens est  $n-r$  ad terminum, cujus exponens est  $n-r-s+1$ . Pariter una est mutatio in utraque a termino cujus exponens est  $n-r-s$ ; & ab hoc termino ad ultimum totidem sunt successiones in utraque. Ergo rursus una est in componente introducta successio. Idem per se intelligitur de altera hypothesi.

Tandem quatenus alternant termini in componente, ab illo qui primam patitur mutationem in composita, rursus in hac nulla nova successio introducit, quia alternant pariter in componente, mutatis signis, quod constat e superioribus. Sic enim componens, signis alternantibus ad terminum usque cujus exponens est  $n-r-s$ ,

$$+Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1} + Hx^{n-r-2} - Ix^{n-r-3} + Kx^{n-r-4} - \&c.$$

unde composita

$$\begin{array}{ccccccc} +fx^{n-r+1} & -Gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} & -Ix^{n-r-2} & +Kx^{n-r-3} & -\&c. & \\ & +aF & -aG & +aH & -aI & +\&c. & \end{array}$$

& sit, per hypothesim,  $a$  major quam  $\frac{G}{F}$ ; erit fortius  $a$  major quam  $\frac{H}{G}$ ;

& quam  $\frac{I}{H}$ ; & quam  $\frac{K}{I}$  &c. (Nº. 90). Prævalent ergo signa seriei inferioris, & composita fit

E 3.

+fx

$$+fx^{n-r+1} + gx^{n-r} - bx^{n-r-1} + ix^{n-r-2} - kx^{n-r-3} + \&c.$$

& in utraque totidem sunt mutationes a termino cujus exponens est  $n-r$  ad terminum cujus exponens est  $n-r-5$ .

110. Sed, quando radix est positiva, aut nulla alia mutatio introducta est in composita, aut siquæ præterea successiones componentis factæ sunt mutationes in composita, totidem vicissim mutationes componentis factæ sunt successiones in composita.

Aut enim sequentes in componente termini habent eadem signa ac terminus  $Gx^{n-r-1}$ , aut sunt qui habent signa contraria.

Si omnes habent eadem signa, erit reliqua componens, in prima hypothesisi, quam solam perpendisse sufficiet,

$$+Hx^{n-r-2} +Ix^{n-r-3} +Kx^{n-r-4} +Lx^{n-r-5} \dots +Qx^1 +Rx +S$$

unde, multiplicando per  $x - a$ , & addendo terminum præcedentem, fiet composita

$$\begin{array}{cccccccc} -gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} & +Ix^{n-r-2} & +Kx^{n-r-3} & +Lx^{n-r-4} & \dots & +Qx^1 & +Rx^1 & +Sx \\ -aG & -aH & -aI & -aK & -aL & \dots & -aP & -aQ & -aR & -aS \end{array}$$

in qua prævalere debent signa serici inferioris, quia posita est  $a$  major quam  $\frac{G}{F}$ , & quantitates  $\frac{G}{F}$ ;  $\frac{H}{G}$ ;  $\frac{I}{H}$ ;  $\frac{K}{I}$ ;  $\frac{L}{K}$  &c. semper decreſcunt per N<sup>um</sup> 90. Quare fiet composita

$$+fx^{n-r+1} -gx^{n-r} -kx^{n-r-1} -ix^{n-r-2} -kx^{n-r-3} -lx^{n-r-4} \dots -qx^1 -rx^2 -sx \dots aS$$

tot autem sunt successiones in composita quot in componente a termino cujus exponens est  $n-r$  ad ultimum; tot erant mutationes & successiones in composita ab altissimo termino  $x^{n-r+1}$  ad  $fx^{n-r+1}$  quot in componente ab altissimo termino  $x^n$  ad  $Fx^{n-r}$ . Una ergo supervenit mutatio in composita a termino  $fx^{n-r+1}$  ad terminum sequentem  $gx^{n-r}$ .

Si qui termini habent signa contraria, ut sit æquatio componens

$$+Fx^{n-r} +Gx^{n-r-1} +Hx^{n-r-2} +Ix^{n-r-3} \dots -Mx^{n-r-5} +Nx^{n-r-4} +\&c,$$

unde fiet composita, retinendo primum terminum Ni. 108.

$$\begin{array}{cccccccc} +fx^{n-r+1} & +Gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} & +Ix^{n-r-2} & \dots & -Mx^{n-r-4} & +Nx^{n-r-3} & +\&c. \\ -aF & -aG & -aH & -aI & \dots & -aL & +aM & -\&c. \end{array}$$

id

id est, quia a termino cujus exponens est  $n - r$  ad terminum cujus exponens est  $n - r - s + 2$  inclusive, prævalent signa inferiora (Nº. 90.), & duo sequentes constant partibus similibus,

$$+fx^{n-r+1} - gx^{n-r} - hx^{n-r-1} - ix^{n-r-2} \dots - mx^{n-r-r+1} + nx^{n-r-s} \pm \&c.$$

Jam totidem sunt successiones in composita ac in componente a termino cujus exponens est  $n - r$  ad terminum cujus exponens est  $n - r - s + 1$ . In utraque est mutatio a termino cujus exponens est  $n - r - s + 1$  ad sequentem cujus exponens est  $n - r - s$ ; & in componente rursus mutatio est a termino cujus exponens est  $n - r - s$  ad sequentem. Hæc mutatio, aut fit successio in componente, si nempe fit  $+nx^{n-r-s} + ox^{n-r-s-1}$  &c. compensabit mutationem jam introductam  $+fx^{n-r+1} - gx^{n-r}$ , aut manebit mutatio, ita ut sit

$$+nx^{n-r-1} - ox^{n-r-s-1}$$

Tunc autem in omnibus terminis sequentibus prævalebunt signa inferiora. Eruntque duo ultimi termini compositæ vel

$$+Sx - aR \text{ vel } -Sx + aR + aS$$

qui, prævalentibus signis inferioribus, habebunt successionem, quæ compensabit novam mutationem introductam.

Quatenus vero pergunt alternare termini componentis, alternabunt etiam termini compositæ, qui singuli constabunt duabus partibus habentibus eadem signa. Ergo &c.

III. Sit nunc  $(\pm G \mp aF) x^{n-r} = 0$ , terminus præcedens & terminus sequens habebunt signa contraria, quare seu ponatur  $+$  seu  $-$  pro termino evanescente, semper habebitur una successio & una variatio.

Subsumimus terminos, quorum exponentes sunt in composita  $n - r + 1$  &  $n - r - 1$ . habere semper signa contraria, quando nihilo æqualis est terminus cujus exponens est  $n - r$ . Hoc autem sic probatur.

112. Si composita multiplicatur per Factorem  $x + a$ , vel si nova radix introducta est negativa, duo termini continui componentis, e quibus conficitur terminus evanescens compositæ, necessario habent signa contraria (Nº. 105.) Igitur tres continui termini æquationis componentis esse possunt.

II.

$$+Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1} + Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$$+Rx$$

$$\begin{array}{r} +Fx^{n-r+1} - Gx^{n-r} + Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E \qquad + \alpha F \qquad - \alpha G \end{array}$$

I I.

$$-Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1} - Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$$\begin{array}{r} -Fx^{n-r+1} + Gx^{n-r} - Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E \qquad - \alpha F \qquad + \alpha G \end{array}$$

I I I.

$$+Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1} - Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$$\begin{array}{r} +Fx^{n-r+1} - Gx^{n-r} - Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E \qquad + \alpha F \qquad - \alpha G \end{array}$$

I V.

$$-Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1} + Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$$\begin{array}{r} -Fx^{n-r+1} + Gx^{n-r} + Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E \qquad - \alpha F \qquad + \alpha G \end{array}$$

113. Quando autem æquatio componens multiplicatur per Factorem  $x-\alpha$ ; vel quando positiva est nova radix introducta, duo termini continui æquationis componentis, qui conficiunt evanescentem compositæ terminum, necessario habent eadem signa (N°. 106.) Igitur tres continui componentis termini esse possunt.

I.

$$+Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1} + Hx^{n-r-2}$$

unde, in hac hypothefi, tres continui compositæ termini

$$\begin{array}{r} +Fx^{n-r+1} + Gx^{n-r} + Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E \qquad - \alpha F \qquad - \alpha G \end{array}$$

I I.



## I I.

$$—Fx^{n-r} — Gx^{n-r-1} — Hx^{n-r-2}$$

unde, in hac hypothesi, tres continui compositæ termini

$$\begin{array}{ccc} —Fx^{n-r+1} & —Gx^{n-r} & —Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E & + \alpha F & + \alpha G \end{array}$$

## I I I.

$$+Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1} — Hx^{n-r-2}$$

unde, in hac hypothesi, tres continui compositæ termini

$$\begin{array}{ccc} +Fx^{n-r+1} & +Gx^{n-r} & —Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E & —\alpha F & —\alpha G \end{array}$$

## I V.

$$—Fx^{n-r} — Gx^{n-r-1} + Hx^{n-r-2}$$

unde tres continui compositæ termini in hac hypothesi

$$\begin{array}{ccc} —Fx^{n-r+1} & —Gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} \\ \dots \alpha E & + \alpha F & + \alpha G \end{array}$$

Est autem  $\alpha = \frac{G}{F}$ , quia ponitur evanescere terminus, cujus in composita exponens est  $n-r$ .

114. Sed in duobus prioribus casibus tum Ni. 112. tum Ni. 113. est  $\frac{G}{F}$  major quam  $\frac{H}{G}$  (Nº. 90). Ergo  $\alpha$  major quam  $\frac{H}{G}$ . Quare in termino horum duorum casuum prævalet signum inferius. Ponitur autem primus terminus nullam subire mutationem & servare suum signum; & signum seriei inferioris in hypothesi Ni. 112. in tertio termino compositæ idem quod signum secundi termini in componente, atque ideo contrarium signo primi termini, quod idem est in composita & in componente; sed in secunda hypothesi, signum seriei inferioris in tertio termino compositæ, contrarium est signo secundi termini in componente, quod idem est ac signum primi termini tum compositæ tum componentis. Ergo in his duobus prioribus casibus primus & ultimus compositæ terminus habent signa contraria.

In aliis duobus casibus tum Ni. 112. tum Ni. 113. signum tertii termini

ni in componente ponitur oppositum signo prioris termini tum in componente, tum in composita; & tertius terminus compositæ constat duabus partibus similibus. Quare semper primus & ultimus terminus compositæ habent signa contraria.

115. Igitur, quando medius terminus evanescit, signa trium horum terminorum sunt, vel

$$+; *; —$$

vel

$$—; *; +$$

inter quæ, seu pro termino deficiente ponatur  $+$ , seu  $—$ , erit una successio & una variatio. Quare etiam in hac hypothefi radix negativa introductæ in æquatione unam successionem, & radix positiva unam mutationem.

116. Quapropter, si æquatio habens omnes radices positivas, atque ideo omnia signa alternantia, multiplicetur per Factorem  $x + a$ , vel augeatur radice negativa, unam acquirere successionem. Si hæc rursus multiplicetur per similem Factorem, adhuc unam acquirere successionem. &c.

117. Si vero æquatio habens omnes radices negativas, atque ideo omnia signa positiva, multiplicetur per Factorem  $x — a$ , vel augeatur radice positiva, acquirere unam mutationem. Si hæc rursus multiplicetur per similem Factorem, adhuc unam acquirere mutationem &c. Ergo

118. Æquatio, cujus omnes radices sunt reales, tot habet radices positivas quot mutationes signorum continuorum, & tot radices negativas, quot signorum continuorum successiones. Si quis autem æquationis terminus desit, licet pro eo ponere  $+$  vel  $—$  ad arbitrium.

119. Sed si quæ sunt radices imaginariæ in æquatione, fallit regula, tum quia deficit propositio demonstrata N°. 90. tum quia radices imaginariæ neque positivæ sunt, neque negativæ.

Atque hæc est notissima regula CARTESII, vel, ut alii volunt HARRIOTTI, de qua NEWTONUS artic. IX. Hanc fallere affirmat Hallejus (in Addit. pag. 47.), sed nunquam fallit, quando æquationis radices omnes sunt possibiles. Hanc conditionem disertis verbis apponit NEWTONUS art. IX. CARTESIUS autem (Epist. LXIX. part. III. pag. 286. Edit. Blavianæ Amstelodami 1683. datam ad D. de CARCAVI) ait, *secunda ejus obiectio mera falsitate nititur; neque enim pag. 373. dixi quod me dixisse vult, nimirum totidem veras dari radices quoties signa  $+$  &  $—$  inveniuntur mutata, neque unquam id dicendi animum habui. Dixi saltem posse dari totidem; & disertis verbis demonstravi pag. 380. quando totidem non habeantur, nimirum, tum cum aliquæ harum radicum sunt imaginariæ. Addere potuisset, cum nostro & omnibus recentioribus, veram esse regulam, etiam ubi sunt imaginariæ, dummodo illæ, quæ neque positivæ sunt neque negativæ, habeantur pro ambiguis, id est vel positivæ censeantur, vel negativæ, pro re nata.*

Hanc regulam primus, quod sciam, demonstravit Joannes Andreas SEGNER,

GNER, postea Celeberrimus Professor in Academia Gottingana, in epistola data ad celeberr. *Georgium Erhardum* HAMBERGERUM, anno 1718. atque edita Jenæ apud *Christianum Franciscum* Buckium. Id, ut videtur, nesciens acutissimus Abbas de GUA, anno 1741. suam concinnavit demonstrationem, quæ anno 1744 edita fuit in libro, cui titulus *Histoire de l'Academie des sciences, année 1741. &c. A Paris de l'Imprimerie royale.*

120. Quantitas imaginaria speciem quidem præbet quantitatis, quandoquidem exprimi potest, sed quantitas non est, quia neque arithmetice, neque geometricè potest definiri, uno verbo quia est impossibilis. Igitur æquatio quæ omnes habet radices imaginarias, nullam habet radicem, id est nulla quantitas est quæ problemati respondeat, vel quæstionis leges implere possit. Cum autem proponi possint quæstiones, quarum leges inter se pugnent, etiamsi fortasse alte recondita jaceat repugnantia, eæ ad æquationem deductæ præbere debent æquationem omnino radicibus carentem, vel nullas habentem radices nisi imaginarias. Et quando leges quæstionis pugnant in certis casibus, non in aliis, æquationes certis in casibus habebunt radices imaginarias; in aliis reales; ut Newtonus N<sup>o</sup>. V. & VI. pag. 4, 5. hujus.

121. Mirum videri potest quod omnis æquatio gradus imparis unam saltem habeat radicem realem, cum nequeat intelligi cur proponi non possint quæstiones deducentes ad æquationem gradus imparis, quarum leges inter se pugnent. Tamen res est demonstrata.

122. Veteres Algebra scriptores, versati circa quæstiones arithmeticas, non agnoverunt radices negativas. CARDANUS primus eas observasse dicitur. Recentiores omnes illas admittunt, præter acutissimum MAZERE, qui in libro anglie scripto & in gallicam linguam versa a Filio meo, eas respuit. Quid significant quantitates negativæ in bonis, motu, & lineis, docuit NEWTONUS Art. VI. Sect. 1. Partis I. pag. 4. ubi videri possunt observationes nostræ sub N<sup>o</sup>. 11. pag. 4. & sub N<sup>o</sup>. 77. pag. 21. & sub N<sup>o</sup>. 78. 79. pag. 22.

123. In genere dici posse reor quod radices negativæ indicant Problema alio pacto proponi posse, quam quo propositum fuerat. Rem explicemus exemplis.

In XII. Probl. Arithm. part. I. pag. 122. quærentur motus duorum corporum sphericorum in eadem recta motorum sibi que occurrentium. Ubi corpora sibi obviam eunt ante conflictum, accedunt unum ad aliud differentia velocitatum. Differentiam pariter velocitatum post conflictum assumit Auctor; & ponit velocitatem ipsius A post conflictum esse  $\frac{aA - x}{A}$ ; id est velocitatem  $a$ , minutam quidem esse, sed tendere ad easdem plagas: atque ideo sic proponit problema. *Datis sphericorum corporum in eadem recta motorum, ad easdem plagas tendentium, sibi que occurrentium, magnitudinibus & moribus, determinare velocitatem, qua unumquodque pergit tendere ad easdem plagas post conflictum.* Problema sic propositum solvit  $x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$ ; unde

prodit velocitas ipsius A post conflictum  $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$ ; & velocitas ipsius B pariter post conflictum  $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$ . Sed si velocitas ipsius

A post conflictum invenitur negativa, recte monet auctor hoc indicare quod corpus A post conflictum tendit ad plagam contrariam, vel retrocedit. Tunc autem non differentia, sed summa velocitatum recedunt corpora A & B; & sic proponendum est problema. *Datis quæ supra, determinare velocitatem, tum qua post conflictum corpus B pergit tendere ad plagas easdem, tum qua corpus A retrocedit.* In hac hypothefi celeritas corporis A post

conflictum exponenda est per  $\frac{x - aA}{A}$ , quia celeritas, quam corpus A habebat ante conflictum, minuit celeritatem quam habebit post conflictum. In prima hypothefi, ut A pergeret ferri ad easdem plagas, oportebat ut  $x$  esset minor quam  $aA$ . In secunda, ut A retrocedat, oportet ut  $x$  sit major quam  $aA$ . Hic obiter observandum quam hæc conveniant cum doctrina quantitatum negativarum ac positivarum. Nam, in prima hypothefi est  $\frac{aA - x}{A}$  quantitas positiva, tendens nempe ad easdem plagas; ea fit negativa in altera hypothefi, in qua tendit ad plagas contrarias: quare positiva erit  $\frac{x - aA}{A}$ . Nunc ponendo

$$\frac{x - aA}{A} + \frac{x + bB}{B} = a - b$$

erit rursus

$$x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$$

$$\frac{x - aA}{A} = \frac{\text{sed } aB - 2bB - aA}{A + B}$$

quæ quantitas est opposita quantitati inventæ in prima hypothefi; & positiva est quando corpus A retrocedit, sed vicissim fit negativa quando progreditur. Hæc facile accommodantur ad alterum casum, corporum nempe obviam euntium. Aliud exemplum videbimus intra N°. 129.

124. Positivæ radices æquationis *indicare solent*, non autem *semper indicant*: (vide infra N°. 128.) quantitates inæquales Problema propositum solventes. Exemplâ videri possunt in parte I. Probl. XIII. pag. 132. Probl. XIV. pag. 133. ubi duo numeri, major & minor, ad unum, nempe ad eorum differentiam, revocati fuerunt in nota. Item Probl. XV. pag.

134. & seq., ubi vitandam esse ambiguitatem monet Auctor, qui eandem regulam affert & explicat pag. 201; & ejus utilitatem ostendit exemplo ad Probl. XLI. pag. 264.

125. Certum est æquationem oriri saltem tot dimensionum, quot sunt quantitates diversæ idem problema solventes. Sed vicissim dici nequit, tot sunt quantitates diversæ problema solventes, quot sunt æquationis dimensiones. Nam

126. *Primo* esse possunt casus, in quibus problema est impossibile. Hos etiam complecti debet æquatio, quæ habebit aliquot radices imaginarias.

127. *Secundo*, fieri potest ut problema proponi possit alio pacto, quam quo propositum fuit, ut vidimus N<sup>o</sup>. 123. Tunc æquatio habebit radices negativas.

128. *Tertio*, etiam radices positivæ aliquando indicant non quantitates solventes problema propositum, sed quantitates solventes aliud problema proposito affine. Exemplum præbet Probl. V. Geometricum partis I. pag. 162. & sequentibus. Ibi, datis trianguli rectanguli basi =  $b$ , & & summa laterum ac perpendiculari =  $a$ , queritur perpendicularum =  $x$ , & laterum differentia =  $y$ , quibus cognitis cognoscitur triangulum. Prima solutio dat æquationem finalem

$$xx = 2x(a+b) - aa + bb$$

cujus æquationis duæ sunt radices positivæ

$$a+b - \sqrt{(2ab+2bb)} \text{ \& } a+b + \sqrt{(2ab+2bb)}$$

Harum prima sola solvit problema propositum, ut ostensum est in nota pag. 165. Altera autem solvit affine problema datis trianguli rectanguli basi =  $b$ , ac perpendiculari =  $a$ , queritur summa laterum & perpendiculari =  $x$ . Tunc enim summa laterum superest =  $x - a$ ; & posita ut in

loco citato, laterum differentia =  $y$ , est latus majus =  $\frac{x-a+y}{2}$ , &

latus minus =  $\frac{x-a-y}{2}$ ; unde, premendo Auctoris vestigia, devenitur ad eandem æquationem finalem.

$$xx = 2x(a+b) - aa + bb.$$

129. Pariter in Probl. sequente pag. 168., ubi datis trianguli rectanguli summa laterum =  $a$ , & perpendiculari =  $b$ , queritur latus unum =  $x$ , & alterum =  $a - x$ , devenitur æquationem finalem quatuor dimensionum, cujus tres sunt radices positivæ.

I.

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{aa}{4} + bb\right)} - \sqrt{(aa + bb)}.$$

F 3

II.

## I I.

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bb - b\sqrt{aa + bb}}.$$

## I I I.

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bb + b\sqrt{aa + bb}}$$

## I V.

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bb + b\sqrt{aa + bb}}$$

Has esse dico positivas, præter tertiam. Constat, si constat de prima; quod facile ostenditur. Est enim

$$aa + bb \text{ major quam } bb; \text{ ergo}$$

$\sqrt{aa + bb}$  major quam  $b$ , & multiplicando per  $b$ ,

$b\sqrt{aa + bb}$  major quam  $bb$ : quare negativa est quantitas  $+bb - b\sqrt{aa + bb}$ .  
Hinc

$\frac{aa}{4}$  major est quam  $\frac{aa}{4} + bb - b\sqrt{aa + bb}$ , & extrahendo radicem,  $\frac{a}{2}$  major quam  $\sqrt{\frac{aa}{4} + bb - b\sqrt{aa + bb}}$ . Igitur &c.

Nunc duæ priores solvunt problema propositum; duæ posteriores servantur problemati datam ponenti laterum differentiam  $= a$ , & quærenti eorum summam  $= x$ ; ut observatum fuit ad pag. 170.

Sed pag. 171. quæsitæ fuit basis  $= x$ , & deventum ad

$$x = -b \pm \sqrt{bb + aa}. \text{ Harum radicum sola positiva}$$

$$x = -b + \sqrt{bb + aa} \text{ solvit problema propositum. Altera, quæ}$$

in hoc problemate negativa est, inservit problemati in quo basis  $x$  quæritur datis perpendiculari  $= b$  & laterum differentia  $= a$ .

Tunc enim, posita laterum summa  $= y$ , devenitur ad æquationem

$$xx = 2bx + aa$$

cujus radix positiva est  $b + \sqrt{bb + aa}$ , quæ erat negativa propositi, & vicissim hujus negativa radix  $b - \sqrt{bb + aa}$  fit positiva propositi. Idem accidit in problemate VII.

130. Casus tertius Problem. XIII. pag. 183. exhibet ejusdem rei exemplum observatione dignum, quia radix negativa pertinet ad aliam lineam pariter problema solventem. Problema casus tertii hoc est. Angulum rectum CBD, data recta  $CD = a$ , ita (Tab. a Fig. 1.) subtendere ut recta DA ducta ad datum punctum A, conficiat angulum CDA pariter rectum. Ibi diximus  $BA = a$  &  $BD = x$ ; & (nota  $b$ ,) invenimus æquationem

$$x^4 = -bbxx + aabb$$

cujus quatuor sunt radices

Prima & secunda reales

$$x = \pm \sqrt{\frac{bb}{2}} + b\sqrt{\left(\frac{bb}{4} + aa\right)}$$

tertia & quarta imaginariæ

$$x = \pm \sqrt{\frac{bb}{2}} - b\sqrt{\left(\frac{bb}{4} + aa\right)}$$

quarum duæ primæ solvunt problema, positiva pro BD; negativa pro Bd. Sed si, reliquis manentibus, dicatur  $AD = x$ , quia est BA ad AD ut AD ad AC, erit  $AC = \frac{xx}{b}$ . Est autem  $CA^2 = AD^2 + DC^2$ ; id est

$$\frac{x^4}{b^2} = x^2 + a^2, \text{ \& } x^4 = b^2x^2 + a^2b^2$$

cujus quatuor sunt radices

Prima & secunda reales

$$x = \pm \sqrt{\frac{bb}{2}} + b\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + aa\right)}$$

tertia & quarta imaginariæ

$$x = \pm \sqrt{\frac{bb}{2}} - b\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + aa\right)}$$

Patet ergo, radices quæ erant reales in prima hypothefi, fieri imaginarias in secunda, & contra. Hoc autem accidit quia quantitas

$$xx = -\frac{bb}{2} - b\sqrt{\left(\frac{bb}{4} + aa\right)}$$

quæ

quæ est radix negativa æquationis pertinentis ad primam hypothesim, sit radix positiva æquationis pertinentis ad alteram hypothesim; nam ea æquatio præbet

$$xx = \frac{bb}{2} + b\sqrt{\left(\frac{bb}{4} + aa\right)}$$

Ex his patet quam caute procedendum sit in radicum electione.

131. Ut rem paucis absolvam, distinguendum puto inter quantitates problema solventes, & æquationis Factores. Quæ quantitates, vel imaginariæ vel reales; positivæ vel negativæ, æquationem propositam reddunt evanescentem, positæ pro incognita; eæ junctæ cum incognita per signa apta, dividunt æquationem propositam, & vicissim æquationem eandem restitunt multiplicatione continua, aut tandem præbent æquationis Factores; sed non omnes Factores æquationis solvunt problema propositum. Quantitates solæ reales problema solvunt; & si positivæ five negativæ sunt æquationis Factores; sed radices negativæ solvunt directe problema diversum a proposito, & in alia æquatione fiunt positivæ, ut melius videbimus in capite sequente N<sup>o</sup>. 11. . 14. Neque semper omnes radices positivæ solvunt problema propositum; sed aliquando pertinent ad aliud, priori quidem affine, sed diversum tamen; aliquando ad quantitates diversas, quæ solvunt idem problema. Hic autem distinguimus quantitates *diversas* ab *inæqualibus*. In N<sup>o</sup>. 130. si recta BD habere posset duos valores inæquales, haberentur duæ radices inæquales æquationis. Sed cum etiam DA solvere posset problema, rectæ BD & DA sunt duæ quantitates diversæ.

Multis aliis modis, (quis enim omnes recenserebit?) fieri potest ut non omnes radices æquationis, etiam si positivæ sint, solvant problema propositum.

132. Sponte patet Factores formæ  $x + m = 0$  per continuum multiplicationem gignere æquationes omnium graduum, *secundi* si duo sunt Factores; si tres, quatuor, quinque, .. *n*, *tertii*, *quarti*, *quinti*, ... *n* ... *mi*. Sed non quævis data æquatio conficitur ex Factoribus realibus, cum sint æquationes quarum radices sunt imaginariæ. Neque constat quomodo ex datis æquationis coefficientibus detegi possint Factores vel reales vel imaginarii, sic enim haberetur generalis æquationum solutio. Fieri potest ut sint æquationes, in quibus relatio inter cognitæ & incognitæ nullo alio pacto potest exprimi, quam per æquationem ipsam.

Regula qua detegitur numerus radicum impossibilium, explicata reperitur in Additamento.



## CAPUT III.

*De transmutationibus æquationum.*

I. **C**eterum æquationis cujuscvis radices omnes affirmativæ in negativas & negativæ in affirmativas mutari possunt, idque mutando tantum signa terminorum alternorum.

Sic æquationis

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0,$$

radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas, mutando tantum signa secundi, quarti, & sexti termini ut hic fit,

$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0.$$

Easdem habet hæc æquatio radices cum priore, nisi quod hic affirmativæ sunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles quæ ibi inter affirmativas latebant, hic latent inter negativas, ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

II. Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. Possumus enim supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate utcumque compeni, & perinde pro ea substituere quod æquipollens esse fingitur. Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate subducere; atque ita efficere ut earum aliquæ, quæ prius erant negativæ, jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ. Sic in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

si radices unitate augeri vellem, fingo  $x + 1 = y$ , seu  $x = y - 1$ , & perinde pro  $x$  scribo in æquatione  $y - 1$ , & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de  $x$  similem potestatem de  $y - 1$ , ad hunc modum.

$x^4.$	$y^4 - 4y^3 + 6yy - 4y + 1$
$- x^3.$	$- y^3 + 3yy - 3y + 1$
$- 19xx.$	$- 19yy + 38y - 19$
$+ 49x.$	$+ 49y - 49$
$- 30.$	$- 30$
Summa	$y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0.$

Et æquationis prodeuntis  
Tom. II.

G

y<sup>4</sup>

$$y^4 - 5y^3 + 10yy + 80y - 96 = 0,$$

radices erunt 2, 3, 4, — 4, quæ prius erant 1, 2, 3, — 5, unitate jam factæ majores. Quod si pro  $x$  scripisssem  $y + 1\frac{1}{2}$  prodiisset æquatio

$$y^4 + 5y^3 - 10yy - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0,$$

cujus duæ fuissent radices affirmativæ,  $\frac{1}{2}$ , &  $1\frac{1}{2}$ ; ac duæ negativæ, —  $\frac{1}{2}$

& —  $6\frac{1}{2}$ . Pro  $x$  vero scribendo  $y - 6$  prodiisset æquatio cujus radices fuissent 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem scribendo  $y + 4$  radices jam numero quaternario diminutæ evassent — 3, — 2, — 1, — 9, negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices, siquæ impossibiles sunt, hæ aliquando facilius detegentur quam prius. Sic in æquatione

$$x^3 - 3ax - 3a^3 = 0,$$

radices nullæ per præcedentem regulam apparent impossibiles. At si augas radices quantitate  $a$  scribendo  $y - a$  pro  $x$ , in æquatione resultante  $y^3 - 3ayy - a^3 = 0$ , radices duæ impossibiles jam per regulam illam detegi possunt.

III. Eadem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere. Hoc enim fiet si cognitam quantitatem secundi termini æquationis propositæ per numerum dimensionum æquationis divisam, subducamus de quantitate quæ pro novæ æquationis radice significanda assumitur, & residuum substituiamus pro radice æquationis propositæ. Ut si proponatur æquatio

$$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0,$$

cognitam quantitatem secundi termini, quæ est — 4, divisam per numerum dimensionum æquationis, 3, subduco de specie quæ pro nova radice significanda assumitur, puta de  $y$ , & residuum  $y + \frac{4}{3}$  substituo pro  $x$ , & provenit,

$$\begin{array}{r} y^3 + 4yy + \frac{16}{3}y + \frac{64}{27} \\ - 4yy - \frac{32}{3}y - \frac{64}{9} \\ + 4y + \frac{16}{3} \\ - 6 \\ \hline y^3 + * - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0. \end{array}$$

IV. Eadem methodo potest & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio

$$x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0,$$

& finge  $x = y - e$ , & substituendo  $y - e$  pro  $x$  orietur hæc æquatio.

$$\begin{array}{rcll} y^4 & - & 4e & + & 6ee & - & 4e^3 & + & e^4 \\ & - & 3 & + & 3 & - & 5 & - & 2 \end{array} = 0$$

Hujus æquationis tertius terminus est  $6ee + 3$  ductum in  $yy$ . Ubi si  $6ee + 3$  nullum esset, eveniret ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse, ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum substitui debet pro  $e$ , & habebimus æquationem quadraticam  $6ee + 3 = 0$ , quæ divisa per 6 fiet  $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$ , seu  $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$ , & extracta radice  $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{16} - \frac{1}{2}\right)}$ , seu  $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$ , hoc est  $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$ , atque adeo vel  $= -\frac{1}{2}$  vel  $= -1$ . Unde  $y - e$  erit vel  $y + \frac{1}{2}$  vel  $y + 1$ . Quamobrem, cum  $y - e$  scriptum fuit pro  $x$ , vice  $y - e$  debet  $y + \frac{1}{2}$  vel  $y + 1$  scribi pro  $x$ , ut tertius æquationis resultantis terminus nullus sit. Et in utroque quidem casu id evenit. Nam si pro  $x$  scribatur  $y + \frac{1}{2}$  orietur hæc æquatio

$$y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0,$$

s. in scribatur  $y + 1$ , orietur hæc

$$y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0.$$

V. Possunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractionisque & radicales quantitates aliquando tolli.

Ut si æquatio sit

$$y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0,$$

ad

ad tollendas fractiones singo esse  $y = \frac{1}{3}x$ , & perinde pro  $y$  substituendo  $\frac{1}{3}x$  provenit æquatio nova

$$\frac{x^3}{27} - \frac{12x}{27} - \frac{146}{27} = 0,$$

& rejecto terminorum communi denominatore,

$$x^3 - 12x - 146 = 0,$$

cujus æquationis radices sunt triplo majores quam ante. Et rursus ad diminuendos terminos æquationis hujus si scribatur  $2v$  pro  $x$ , prodibit

$$8v^3 - 24v - 146 = 0,$$

& divisus omnibus per 8, fiet

$$v^3 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0,$$

cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hic si tandem inveniat  $v$ , ponendum erit  $2v = x$ ,  $\frac{1}{3}x = y$ , &  $y + \frac{4}{3} = x$ , & æquationis primo propositæ

$$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$$

habebitur radix  $x$ .

Sic & in æquatione

$$x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0,$$

ad tollendam quantitatem radicalem  $\sqrt{3}$ , pro  $x$  scribo  $y\sqrt{3}$ , & provenit æquatio

$$3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0,$$

quæ, divisus omnibus terminis per  $\sqrt{3}$ , fit

$$3y^3 - 2y + 1 = 0.$$

VI. Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci.

Sic æquatio novissima

$$3y^3 - 2y + 1 = 0,$$

scribendo  $\frac{1}{z}$  pro  $y$  evadit

$$\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0,$$

feu terminis omnibus multiplicatis per  $z^3$ , & ordine terminorum mutato

$$z^3 - 2zz + 3 = 0.$$

Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modo secundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias, id fiet si modo tertium prius tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

cujus radices sunt 3, 2, 1, -5, si scribatur  $\frac{1}{y}$  pro  $x$  resultabit æquatio

$$\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0,$$

quæ, terminis omnibus multiplicatis per  $y^4$  ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet

$$y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0,$$

cujus radices sunt  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1,  $-\frac{1}{5}$ ; radicum affirmatarum maxima 3

jam conversa in minimam  $\frac{1}{3}$ , & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa  $-\frac{1}{5}$  quæ omnium maxime distabat a nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes, sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius, ubi tertium æquationis terminum sustulimus, confici possunt, ut non opus sit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de limitibus æquationum.

VII. Ex æquationum generatione constat quod cognita quantitas secundi termini æquationis, si signum ejus mutetur, æqualis sit aggregato omnium radicum sub signis propriis; ea tertii æqualis aggregato reſtingulorum sub singulis binis radicibus; ea quarti si signum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum sub singulis ternis ra-

dicibus; ea quinti æqualis aggregato contentorum sub singulis quaternis; & sic in infinitum.

Assumamus  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x = -c$ ,  $x = d$ , &c. seu  $x - a = 0$ ,  $x - b = 0$ ,  $x + c = 0$ ,  $x - d = 0$ , & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut supra. Jam multiplicando  $x - a$  per  $x - b$  producet æquatio

$$xx - \frac{a}{b} x + ab = 0;$$

ubi cognita quantitas secundi termini, si signa' ejus mutantur, nimirum  $a + b$ , est summa duarum radicum  $a$  &  $b$ , & cognita tertii  $ab$  illud unicum quod sub utraque continetur rectangulum. Rursus multiplicando hanc æquationem per  $x + c$  producet æquatio cubica

$$\begin{array}{r} \frac{a}{b} x^2 + abx \\ x^3 - \frac{a}{b} x^2 - \frac{ac}{b} x + abc \\ + c \quad - bc \end{array} = 0,$$

ubi cognita quantitas secundi termini sub signis mutatis nimirum  $a + b - c$  est summa radicum  $a$ ,  $b$  &  $-c$ ; cognita tertii  $ab - ac - bc$ , summa rectangulorum sub singulis binis  $a$  &  $b$ ,  $a$  &  $-c$ ,  $b$  &  $-c$ ; & cognita quarti sub signo mutato  $-abc$  illud unicum contentum est quod omnium continua multiplicatione generatur,  $a$  in  $b$  in  $-c$ . Adhæc multiplicando cubicam illam æquationem per  $x - d$  producet hæc quadrato-quadratica

$$\begin{array}{r} \frac{a}{b} x^4 + \frac{ab}{b} x^3 + \frac{abc}{b} x^2 + \frac{abd}{b} x - abcd \\ x^4 - \frac{a}{b} x^3 - \frac{ac}{b} x^2 - \frac{ad}{b} x + cd \\ + c \quad + ad \quad + bcd \quad + acd \\ - cd \end{array} = 0;$$

ubi cognita quantitas secundi termini sub signis mutatis  $a + b - c + d$ , est summa omnium radicum; ea tertii

$$ab - ac - bc + ad + bd - cd$$

summa rectangulorum sub singulis binis; ea quarti sub signis mutatis

$$-abc + abd - bcd - acd$$

summa contentorum sub singulis ternis; ea quinti  $-abcd$  contentum unicum sub omnibus. Et hinc primo colligimus omnes æquationis cujuscunque, terminos nec fractos nec surdos habentis, radices non surdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium contenta esse aliquos ex divisoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi confiterit nullum ultimi

ter-

termini diviforem effe aut radicem æquationis, aut duarum radicum re-  
ctangulum, plurimve contentum, fimul conflabit nullam effe radicem, ra-  
dicumve rectangulum aut contentum, nifi quod fit furdum.

VIII. Ponamus jam cognitatas quantitates terminorum æquationis sub fignis  
mutatis effe  $p, q, r, s, t, v$ , &c. eam nempe fecundi  $p$ , tertii  $q$ , quarti  $r$ ,  
quinti  $s$ , & fic deinceps. Et fignis terminorum probe obfervatis fit

$$p = a$$

$$pa + 2q = b$$

$$pb + qa + 3r = c$$

$$pc + qb + ra + 4s = d$$

$$pd + qc + rb + sa + 5t = e$$

$$pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$$

& fic in infinitum, obfervata ferie progreflionis. Et erit  $a$  fumma ra-  
dicum,  $b$  fumma quadratorum ex fingulis radicibus,  $c$  fumma cuborum,  
 $d$  fumma quadrato-quadratorum,  $e$  fumma quadrato-cuborum,  $f$  fumma  
cubo-cuborum, & fic in reliquis. Ut in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

ubi cognita quantitas fecundi termini eft  $-1$ , tertii  $-19$ , quarti  $+49$ ,  
quinti  $-30$ ; ponendum erit  $1 = p$ ,  $19 = q$ ,  $-49 = r$ ,  $30 = s$ . Et  
inde orientur

$$a = (p =) 1.$$

$$b = (pa + 2q = 1 + 38 =) 39$$

$$c = (pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 =) -89$$

$$d = (pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 =) 723.$$

Quare fumma radicum erit  $1$ , fumma quadratorum radicum  $39$ , fumma cu-  
borum  $-89$ , & fumma quadrato-quadratorum  $723$ . Nimirum æquationis  
illius radices funt  $1, 2, 3$  &  $-5$ , & harum fumma  $1 + 2 + 3 - 5$  eft  $1$ ,  
fumma quadratorum  $1 + 4 + 9 + 25$  eft  $39$ , fumma cuborum  $1 + 8 + 27 - 125$   
eft  $-89$ , & fumma quadrato-quadratorum  $1 + 16 + 81 + 625$  eft  $723$ .

## COMMENTARIUS

A D

## CAPUT III.

1. Si  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ;  $d$ ; &c exponant valores ipsius  $x$  in æquatione

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

&c ponatur

$a = b + c + d + \&c$ ; vel summæ radicum reliquarum, præter  $a$

$\beta = b(c + d + e + \&c.) + c(d + e + \&c) + \&c$ , vel summæ factorum ex binis, præter facta in quibus est  $a$ .

2. Pariter  $\gamma$  æqualis summæ factorum ex ternis;  $\delta$  summæ factorum ex quaternis, præter ea facta in quibus est  $a$ , & sic de reliquis; erit

$$A = a + a; B = aa + \beta; C = a\beta + \gamma; D = a\gamma + \delta; \&c.$$

Constat ex regulis multiplicationis, & ex N<sup>o</sup>. 114. Sect. I. Cap. V. Tom. I. pag. 28. & patet idem accidere reliquis litteris, ex. gr.  $b$ ; ponendo  $a = a + c + d + e + \&c$ .; & sic de reliquis, scribendo  $b$  ubi est nunc  $a$ , &  $a$  ubi nunc est  $b$ . In sequentibus retinebimus litteram  $a$ .

3. Pariter constat pro  $x$  & ejus potestatibus poni posse valorem  $a$ , & ejus potestates.

4. Hæc littera habebit signa contraria in coefficientibus & in substitutione. Sit enim  $x = +a$ . Factor æquationis ergo  $x - a = 0$ ; & littera  $a$  debet in coefficientibus habere signum  $-$ , & in substitutione  $+$ . Quapropter æquatio fiet,

$$\begin{array}{ccccccc} x^n - ax^{n-1} - aax^{n-2} - a\beta x^{n-3} - a\gamma x^{n-4} - \&c & = & 0 \\ +a & +\beta & +\gamma & +\delta & +\&c \end{array}$$

si nempe  $a$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$ ;  $\delta$  &c. sint quantitates positivæ; siquæ vero essent negativæ, facta ex earum singulis in  $-a$ , essent positiva; & semper eadem littera, ex gr.  $\gamma$  habebit signa contraria in duobus terminis contiguïs  $(a\beta \pm \gamma) x^{n-3}$  &  $(\mp a\gamma \pm \delta) x^{n-4}$ .

5. Quando vero est  $x = -a$ , Factor æquationis est  $x + a = 0$ . Quapropter littera  $a$  in coefficientibus habebit signum  $+$ , & in substitutione signum  $-$ ; quod tamen in potestatibus paribus fiet  $+$  (N<sup>o</sup>. 80. partis I. pag. 22). Tunc æquatio fiet

$$\begin{array}{ccccccc} x^n + ax^{n-1} + aax^{n-2} + a\beta x^{n-3} + a\gamma x^{n-4} + \&c & = & 0 \\ +a & +\beta & +\gamma & +\delta & +\&c \end{array}$$



si  $a$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$ ;  $\delta$  &c. sunt positivæ, & si quæ earum sunt negativæ, singularum facta in  $+a$  erunt negativa; & semper eadem littera, ex. gr.  $\gamma$ , habebit eadem signa in duobus terminis contiguïs ( $a\beta \pm \gamma$ )  $x^{n-3}$  & ( $\pm a\gamma \pm \delta$ )  $x^{n-4}$ .

6. Nunc substituendo pro  $x$  & ejus potestatibus, valorem & ejus potestates, quilibet terminus habebit partem unam quantitatis parem sed signo oppositam cum una parte termini præcedentis; & alteram æque quantitate parem, signo oppositam, cum termini sequentis parte.

Nam, quando  $x = +a$ , tres termini continui erunt formæ  $(-a\pi + \epsilon)x^{n-r}$ ;  $(-a\epsilon + \sigma)x^{n-r-1}$ ;  $(-a\sigma + \tau)x^{n-r-2}$ . (Nº. 4).

Quare ponendo  $+a^{n-r}$  pro  $x^{n-r}$  in horum primo;  $+a^{n-r-1}$  pro  $x^{n-r-1}$  in secundo; &  $+a^{n-r-2}$  pro  $x^{n-r-2}$  in tertio, quandoquidem omnes potestates e radice positiva sunt positivæ, fient

$$\text{Primus } (-a\pi + \epsilon)a^{n-r} = -\pi a^{n-r+1} + \epsilon a^{n-r}$$

$$\text{Secundus } (-a\epsilon + \sigma)a^{n-r-1} = -\epsilon a^{n-r} + \sigma a^{n-r-1}$$

$$\text{Tertius } (-a\sigma + \tau)a^{n-r-2} = -\sigma a^{n-r-1} + \tau a^{n-r-2}$$

Sed, ubi est  $x = -a$ , tres termini continui, erunt formæ

$$(+a\pi + \epsilon)x^{n-r}; (+a\epsilon + \sigma)x^{n-r-1}; (+a\sigma + \tau)x^{n-r-2} \text{ (Nº. 5).}$$

Potestates autem e radice negativa  $-a$ , pares sunt positivæ, impares negativæ; & si  $n-r$  est numerus par, impar erit  $n-r-1$ , & rursus par  $n-r-2$ . Si vero est impar  $n-r$ , par erit  $n-r-1$ , & rursus impar  $n-r-2$ . Igitur, quando  $n-r$  est numerus par, fiet horum terminorum

$$\text{Primus } (+a\pi + \epsilon)a^{n-r} = +\pi a^{n-r+1} + \epsilon a^{n-r}$$

$$\text{Secundus } (+a\epsilon + \sigma)a^{n-r-1} = -\epsilon a^{n-r} - \sigma a^{n-r-1}$$

$$\text{Tertius } (+a\sigma + \tau)a^{n-r-2} = +\sigma a^{n-r-1} + \tau a^{n-r-2}$$

& quando est  $n-r$  numerus impar, illi fient

$$\text{Primus } (+a\pi + \epsilon)a^{n-r} = -\pi a^{n-r+1} - \epsilon a^{n-r}$$

$$\text{Secundus } (+a\epsilon + \sigma)a^{n-r-1} = +\epsilon a^{n-r} + \sigma a^{n-r-1}$$

$$\text{Tertius } (+a\sigma + \tau)a^{n-r-2} = -\sigma a^{n-r-1} - \tau a^{n-r-2}$$

Ergo semper prima pars termini medii destruit secundam præcedentis, & secunda medii primam sequentis.

Hinc, pro  $x$  &c. substituendo valorem &c. primus æquationis terminus destruet primam partem secundi: secunda pars secundi primam tertii; secunda tertii primam quarti, & sic semper.

Exemplum primi casus fit æquatio

$$x^7 - ax^6 - aax^5 - a\beta x^4 + a\gamma x^3 + a\delta x^2 - a\epsilon x - a\zeta = 0$$

$$+x \quad +\beta \quad -\gamma \quad -\delta \quad +\epsilon \quad +\zeta$$

in qua est  $x = +a$ . Hæc substituendo fit

$$a^7 - a^7 - aa^6 - \beta a^5 + \gamma a^4 + \delta a^3 - \epsilon a^2 - a\zeta = 0$$

$$+aa^6 + \beta a^5 - \gamma a^4 - \delta a^3 + \epsilon a^2 + \zeta a$$

Exemplum casus posterioris fit

$$x^7 + ax^6 + aax^5 - a\epsilon x^4 - a\gamma x^3 + a\delta x^2 - a\epsilon x + a\zeta = 0$$

$$+x \quad -\beta \quad -\gamma \quad +\delta \quad -\epsilon \quad +\zeta$$

in qua est  $x = -a$ . Hæc substituendo fiet

$$-a^7 + a.a^6 + a.a.a^5 - a\epsilon.a^4 - a\gamma.a^3 + a\delta.a^2 - a\epsilon.a - a + a\zeta$$

$$+a.a^6 - \beta.a^5 - \gamma.a^4 + \delta.a^3 - \epsilon.a^2 + \zeta.a - a.a^3$$

in qua  $-a^7 + a.a^6 = -a^7 + a^7 = 0 = +a.a^6 + a.a^5 - a^4 = +aa^6 - aa^6$  &c. Hinc intelligitur.

7. *Primo*, quomodo valor incognitæ substitutus in æquatione, eam reddat nihilo æqualem.

8. *Secundo*, quomodo radices quales sunt, vel incognitæ valores quales sunt substituti in æquatione pro incognita, non mutant signa terminorum. Sed radices iis oppositæ mutant signa terminorum alternorum; & hoc de nomine transformetur æquatio. Vide Auctorem Cap. hujus N°. I. pag. 40. Nam æquatio

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - Fx^{n-6} - \&c. = 0$$

ponendo  $-x$ , & ejus potestates pro  $+x$ , fit, si  $n$  est numerus par

$$x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

in qua mutata sunt signa terminorum parium: & si  $n$  est numerus impar

$$-x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} - Dx^{n-4} + Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \&c. = 0$$

in qua mutantur signa terminorum imparium, vel transponendo

$$0 = +x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c.$$

in qua mutantur signa terminorum parium, ut antea.

9. *Tertio*, quod æquatio transformata per substitutionem radicis negativæ, restituitur eadem rursus substituendo aliam radicem negativam. Rursus enim mutantur signa terminorum alternorum.

10. Jam ergo, quatenus propositæ, ex. gr.

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - Fx^{n-6} - \&c. = 0$$

radix quævis positiva  $a$ , manet positiva, æquatio manet eadem. Quando radix positiva  $a$  mutatur in negativam, proposita transformatur in

$$x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0.$$

Hæc autem restituit propositam si ponatur radix negativa —  $b$ . Proposita pariter invenitur si in ea ponatur radix positiva —  $b$ . (N°. 8.) Ergo.

11. *Mutantur signa terminorum alternorum, quando omnes radices æquationis, quæ erant positivæ, fiunt negativæ, & quæ negativæ erant, fiunt positivæ.*

12. *Vicissim, mutatis signis terminorum alternorum, omnes radices positivæ mutantur in negativas, & negativæ in positivæ.*

Nam si qua radix  $c$ , maneret in transformata qualis erat in proposita, eadem, substituta pro  $x$ , præberet duas æquationes diversas, propositam, & transformatam. Quod est absurdum.

13. Rursus si  $c$  est positiva, duo termini continui propositæ sunt

$$(-c\pi + e)x^{n-r+1} (-c\epsilon + \sigma)x^{n-r}$$

qui positæ  $c^{n-r}$  pro  $x^{n-r}$ , fiunt

$$-c\pi^{n-r+1} + e\epsilon^{n-r+1} - e\epsilon^{n-r+1} + c\sigma^{n-r}$$

ubi  $+e\epsilon^{n-r+1} - e\epsilon^{n-r+1}$  se destruunt. In transformata alterutrius signum mutatur, & manet

$$\pm e\epsilon^{n-r+1} \pm e\epsilon^{n-r+1}$$

qui termini se non destruunt. Non ergo est  $+c$  radix transformatæ.

Sed quando  $c$  est negativa, duo termini continui propositæ sunt

$$(c\pi \pm e)x^{n-r+1} (\pm c\epsilon \pm \sigma)x^{n-r}$$

quorum alteruter post substitutionem signum mutat, est enim alteruter exponentium impar. Ergo hi se destruunt in proposita. Sed in transformata

mata, alterutrius, puta primi, signum mutatur, & termini sunt

$$(c\pi \mp e) x^{n-r+1} (\pm e \pm c) x^{n-r}$$

atque horum alteruter signum mutat post substitutionem; igitur duæ partes  $\mp e c^{n-r+1} \mp e c^{n-r+1}$  se non destruunt.

Idem sic demonstrari solet. Quoniam in proposita sunt radices positivæ sit

$$A = a - a; \text{ profecto erit } -A = -a + a$$

& mutando signum secundi termini radices negativæ mutantur in positivas, & contra. Nunc dico terminorum imparium signa esse servanda, parium esse mutanda, quia coefficientes terminorum imparium habent parem Factorum numerum, qui, seu positivi seu negativi, dant factum positivum; sed coefficientes terminorum parium habent imparem Factorum numerum, qui dant factum positivum quando sunt positivi, & negativum quando negativi. Hoc ratiocinium evolvent & sub oculum ponent exempla hæc. Sit

$$a = -b + \beta, \text{ \& } A = +a - b + \beta, \text{ ac } -A = -a + b - \beta$$

Erit

$$B = +a (-b + \beta) - b + \beta = -a (+b - \beta) + b - \beta$$

Ergo eadem quantitates binæ dant eadem facta, seu positive sumantur seu negative; & mutato signo ipsius A non mutatur signum coefficientis B

Sit nunc

$$+ \beta = -c + \gamma; \text{ \& } A = a - b - c + \gamma; \text{ ac } -A = -a + b + c - \gamma$$

Quando A positive sumitur, erit

$$C = +a. -b (-c + \gamma) + a. -c + \gamma - b. -c + \gamma = \\ +abc - aby - ac\gamma + bc\gamma$$

sed quando A negative sumitur, erunt facta ex ternis

$$-a. + b (+c - \beta) - a. + c - \gamma + b. + c. - \gamma = \\ -abc + aby + ac\gamma - bc\gamma$$

quæ prioribus sunt opposita; & mutato signo coefficientis A mutatur etiam signum coefficientis C. Et gradatim augendo litterarum numerum, idem eodem pacto patebit de reliquis. Hinc, obiter, explicantur, quæ docet Auctor N°. VI. Cap. III. pag. 53...55. Tom. II.

14. Mutatis autem signis terminorum alternorum, ubi erat signorum mutatio in proposita, ibi est successio in transformata, & ubi erat signorum successio in proposita, ibi est mutatio in transformata. Tot ergo sunt successiones & mutationes in transformata, quot vicissim erant mutationes & successiones in proposita. Atqui tot sunt in æquatione radices positivæ quot signorum mutationes, & tot radices negativæ quot signorum successiones (Nº. IX. Cap. II. pag. 6. & Nº. 118. pag. 42. Tom. II.). Ergo transformata habet radices positivas quot negativas habebat proposita, & contra.

15. Alia est transformatio, qua radia æquationis componitur utcumque ex cognita & incognita. Vide Auctorem Nº. II. Cap. III. pag. 40. Tom. II.

Hæc compositio fieri potest per additionem, per subtractionem, per multiplicationem, per divisionem, per elevationem ad potestatem, & per extractionem radicis.

Transformatio per additionem vel subtractionem nihil habet difficultatis.

Nam, si ponatur  $x = y + e$ , & per theorema binomiale quærantur  $(y+e)^n$ ;  $(y+e)^{n-1}$ ;  $(y+e)^{n-2}$  &c.; atque hæc potestates ponantur pro  $x^n$ ;  $x^{n-1}$ ;  $x^{n-2}$  &c., in æquatione

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. + S = 0$$

habebitur transformata

$$\begin{aligned} y^n + ney^{n-1} + \frac{n \cdot n - 1}{2} e^2 y^{n-2} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} e^3 y^{n-3} + \&c. \\ + Ay^{n-1} + n - 1 Aey^{n-2} + \frac{n - 1 \cdot n - 2}{2} Ae^2 y^{n-3} + \&c. = 0 \\ + By^{n-2} + n - 2 Be^2 y^{n-3} + \&c. \\ + Cy^{n-3} + \&c. \end{aligned}$$

In hac transformatione hæc sunt observanda.

16. Ultimus transformatæ terminus, qui constat ex ultimo termino propositæ & ex ultimis terminis ipsarum

$$(y+e)^n; A(y+e)^{n-1}, B(y+e)^{n-2}; C(y+e)^{n-3}; D(y+e)^{n-4} \&c. \\ \dots + R(y+e)$$

erit

$$e^n + Ae^{n-1} + Be^{n-2} + Ce^{n-3} + De^{n-4} + \&c. \dots + Re + S$$

H 3

id est

id est ipsa proposita, in qua pro  $x$  posita est  $e$ .

17. Penultimus transformatae terminus, qui constat ex penultimis terminis earundem potestatum, erit

$$y(ne^{n-1} + n-1Ae^{n-2} + n-2Be^{n-3} + n-3Ce^{n-4} + n-4De^{n-5} + \&c.)$$

ubi quantitas per quam multiplicatur  $y$ , vel primus transformatae coefficientis, incipiendo ab ultimo termino per *ordinem retrogradum*, quem adhibebo in sequentibus, est ultimus terminus complexus transformatae nuper inventus, cujus termini singuli multiplicati sunt ordine per terminos progressionis arithmeticae

$$\frac{n}{e}; \frac{n-1}{e}; \frac{n-2}{e}; \frac{n-3}{e}; \frac{n-4}{e} \dots \frac{1}{e}; 0$$

18. Secundus transformatae coefficientis, constat ex tertiis, ab ultimo, terminis potestatum

$$(y+e)^n; A(y+e)^{n-1}; B(y+e)^{n-2} \dots P(y+e)^2$$

vel ex tertiis terminis earundem, ordine pariter inverso, id est

$$(e+y)^n; A(e+y)^{n-1}; B(e+y)^{n-2} \dots P(e+y)^2; R(e+y)$$

Hic secundus transformatae coefficientis, est ipse primus, cujus termini singuli ordine multiplicati sunt per terminos hujus progressionis arithmeticae

$$\frac{n-1}{2e}; \frac{n-2}{2e}; \frac{n-3}{2e}; \frac{n-4}{2e}; \frac{n-5}{2e} \dots \frac{1}{2e}; 0$$

19. Ex hoc secundo invenitur tertius ope progressionis

$$\frac{n-2}{3e}; \frac{n-3}{3e}; \frac{n-4}{3e}; \frac{n-5}{3e}; \frac{n-6}{3e} \dots \frac{1}{3e}; 0$$

Et sic semper. In genere transformatae coefficientis  $r$ -mus, invenitur ope praecedentis  $r-1$ -mi, & progressionis arithmeticae

$$\frac{n-r+1}{re}; \frac{n-r}{re}; \frac{n-r-1}{re}; \frac{n-r-2}{re} \dots \frac{1}{re}; 0.$$

Hæc non difficile deducuntur e termino generali theorematibus binomialis Part. I.

Vide etiam Addit. pag. 83. Lem. X.

20. Ex his inveniuntur transformatae termini etiam facilius quam per evolutionem.

Ex. gr.

Ex. gr. Transformata ipsius

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

habebit primum terminum (*ordine retrogado* ut jam monui)

$$e^6 + Ae^5 + Be^4 + Ce^3 + De^2 + Ee + F$$

Primum coefficientem

$$\frac{6}{e} e^6 + \frac{5 \cdot Ae^5}{e} + \frac{4}{e} Be^4 + \frac{3}{e} Ce^3 + \frac{2}{e} De + \frac{1}{e} Ee + 0 \cdot F =$$

$$6e^5 + 5Ae^4 + 4Be^3 + 3Ce^2 + 2De + E. \text{ Hinc multiplicando per}$$

$$\frac{5}{2e}; \frac{4}{2e}; \frac{3}{2e}; \frac{2}{2e}; \frac{1}{2e} \cdot 0$$

fit secundus coefficientis

$$15e^4 + 10Ae^3 + 6Be^2 + 3Ce + D. \text{ Et multiplicando per}$$

$$\frac{4}{3e}; \frac{3}{3e}; \frac{2}{3e}; \frac{1}{3e}; 0$$

tertius coefficientis

$$20e^3 + 10Ae^2 + 4Be + C; \& \text{ multiplicando per}$$

$$\frac{3}{4e}; \frac{2}{4e}; \frac{1}{4e}; 0$$

quartus coefficientis

$$15e^2 + 5Ae + B. \&c. \text{ multiplicando per}$$

$$\frac{2}{5e}; \frac{1}{5e}; 0$$

quintus coefficientis

$$6e + A.$$

21. Si poneretur  $x = y - e$ ; mutanda essent in transformata signa terminorum, in quibus impares sunt exponentes ipsius  $e$ . Et si poneretur  $x = e - y$ , in transformata mutanda essent signa terminorum, in quibus impares sunt exponentes ipsius  $y$ .

22. Quando est  $x = y + e$ , pariter est  $x - e = y$ . Sed  $y$  exponit omnes radices transformatae, &  $x$  omnes radices propositae: ergo omnes radices transformatae deficiunt a radicibus propositae data quantitate  $e$ .

23. Tunc autem vere minuuntur radices *positivae*, sed *negativae* augentur. Sit enim  $a$  una radicum positivarum, &  $b$  una negativarum. Erunt ergo

$$x - a = 0, \text{ \& } x + b = 0$$

duo Factores propositae. Sed quia ponitur

$$x = y + e; \text{ erit } x - a = y + e - a = 0, \text{ \& } y = a - e$$

Ergo radix positiva propositae minuta est quantitate  $e$  in transformata. Pariter erit

$$x + b = y + e + b, \text{ \& } y = -b - e$$

ergo radix negativa propositae aucta est in transformata quantitate  $e$ .

24. Ergo quando  $e$  aequat  $a$  unam e radicibus positivis propositae, fit  $a - e = 0$ ; & ultimus terminus, qui constat ex facto omnium radicum, evanescit, atque ideo transformata uno gradu deprimitur.

25. Quando  $e$  est major quam maxima radicum positivarum propositae, negativa fit haec maxima radix positiva, atque ideo reliquae minores & positivae. Negativae autem manent, quae erant negativae. Ergo transformata tunc habet omnes radices negativas, & ideo omnia terminorum signa positiva; & contra si transformata habet omnis terminos positivos, est  $e$  major quam maxima radix positiva propositae.

26. Quando  $e$  est minor quam minima radicum positivarum propositae, radices in transformata manent quales in proposita.

27. Quando est  $x = y + e$ , est etiam  $x - e = y$ , quapropter radices transformatae superant radices propositae data quantitate  $e$ .

28. Tunc autem augentur radices positivae, & minuuntur negativae; quare

29. Si  $e$  aequat aliquam radicem negativam, ultimus transformatae terminus evanescit.

30. Si  $e$  major est quam maxima radicum negativarum, ea sit positiva, ut & reliquae negativae quae sunt minores; & aequatio transformata habet omnes radices positivas, & omnia signa alternantia: & si transformatae signa alternent, quantitas  $e$  major est quam maxima radicum negativarum propositae.

31. Sed, quando  $e$  est quantitas realis, quantitates imaginariae auctae vel minutae quantitate  $e$ , manent imaginariae. Ergo radices imaginariae, quae erant in proposita, manent etiam in transformata.

32. Si praeterea est  $e$  quantitas rationalis, radices furdæ, quae erant in proposita, manebunt etiam in transformata, sed auctae vel minutae quantitate  $e$ .

33. Hinc regula generalis, qua secundus aequationis terminus exterminatur. Nam coëfficiens termini secundi (ordine directo); id est coëfficiens ipsius  $y^{n-1}$  in transformata, est  $ne + A$ . Hic evanescit si  $ne + A = 0$ ; id est



id est  $e = -\frac{A}{n}$ . Eliminabitur ergo terminus secundus, si coefficienti termini secundi in proposita dividatur per exponentem primi & altissimi termini, & mutato signo jungatur novæ incognitæ, atque hæc quantitas composita ponatur pro  $x$  in æquatione proposita. Vide N<sup>o</sup>. III. Cap. III. pag. 52. Tom. II.

34. Hinc confirmatur quod asseruimus N<sup>o</sup>. 71. pag. 25. Tom. II quod omnis æquatio carens secundo termino, habet tertium negativum, si omnes ejus radices sunt reales. Nam, ponendo  $\frac{AA}{nn}$  pro  $ee$ , &  $-\frac{AA}{n}$  pro  $Ae$  in coefficiente tertii termini transformata, fit

$$\left(\frac{n \cdot n - 1}{2}\right) ee + (n - 1) Ae + B = \left(\frac{n - 1}{2n}\right) AA - \left(\frac{n - 1}{n}\right) AA + B =$$

$$-\left(\frac{n - 1}{2n}\right) AA + B.$$

Quoniam autem est  $A$  summa radicum, ad numerum  $n$ , æquationis propositæ, &  $B$  summa factorum ex binis; erit  $AA$  summa quadratorum singularum radicum, una cum dupla summa rectorum. Est autem factum ex duabus quantitatibus medium proportionale inter quadratum primæ & quadratum alterius (Eucl. II. VIII.) atque ideo summa duorum quadratorum major quam bis factum (Eucl. 25. V.) Et in nostra hypothesi quadratum unius radice additur ordine gradus reliquarum ad numerum  $n - 1$ . Erit ergo  $n - 1$ ... es summa quadratorum ex omnibus radicibus major quam  $2B$ . Sed, ut habeatur  $AA$   $n - 1$ ... es, summæ quadratorum addi debet  $2(n - 1) B$ , ergo addendo hanc quantitatem hinc inde, erit  $(n - 1) AA$  major quam  $2B + 2(n - 1) B = 2B + 2nB - 2B = 2nB$

atque tandem

$$\left(\frac{n - 1}{2n}\right) AA \text{ major quam } B$$

& coefficienti termini tertii erit negativus.

Ut exemplo illustremus hoc ratiocinium, fit

$$A = a + b + c + d + e;$$

erit

$$AA = aa + 2a(b + c + d + e) + bb + 2b(c + d + e) + cc + 2c(d + e) + dd + 2de + ee$$

$$Tom. II. \quad B = a(b + c + d + e) + b(c + d + e) + c(d + e) + de$$

Hic

Hic est  $n = 5$ . Sed poni debet

$aa$  ad  $ab$  ut  $ab$  ad  $bb$  ac  $aa+bb$  major quam  $2ab$   
 $aa$  ad  $ac$  ut  $ac$  ad  $cc$  ac  $aa+cc$  major quam  $2ac$   
 $aa$  ad  $ad$  ut  $ad$  ad  $dd$  ac  $aa+dd$  major quam  $2ad$   
 $aa$  ad  $ae$  ut  $ae$  ad  $ee$  ac  $aa+ee$  major quam  $2ae$   
 $bb$  ad  $bc$  ut  $bc$  ad  $cc$  ac  $bb+cc$  major quam  $2bc$   
 $bb$  ad  $bd$  ut  $bd$  ad  $dd$  ac  $bb+dd$  major quam  $2bd$   
 $bb$  ad  $be$  ut  $be$  ad  $ee$  ac  $bb+ee$  major quam  $2be$   
 $cc$  ad  $cd$  ut  $cd$  ad  $dd$  ac  $cc+dd$  major quam  $2cd$   
 $cc$  ad  $ce$  ut  $ce$  ad  $ee$  ac  $cc+ee$  major quam  $2ce$   
 $dd$  ad  $de$  ut  $de$  ad  $ee$  ac  $dd+ee$  major quam  $2de$

ubi  $aa$ ;  $bb$ ;  $cc$ ;  $dd$ ;  $ee$  inveniuntur in quatuor, vel  $n-1$ , summis duorum quadratorum; ergo addendo majora majoribus & minora minoribus

$$4(aa+bb+cc+dd+ee) \text{ superant } 2a(b+c+d+e) + 2b(c+d+e) + 2c(d+e) + 2de = 2B$$

Ut autem habeatur  $4AA$ , vel  $(n-1) AA$ , addi debent summæ quadratorum  $4 \cdot 2B = 2(n-1) B$ ; ergo  $4AA$  major quam  $10B = 5 \cdot 2B$ , &  $(n-1) AA$  major quam  $2nB$ .

35. Quando radices sunt reales & formæ  $\pm m + n\sqrt{p}$  ac  $\pm m - n\sqrt{p}$ , est earum summa  $\pm 2m = A$ , ac  $4mm = AA$ . &  $B = (\pm m + n\sqrt{p})(\pm m - n\sqrt{p}) = +mm - nnp$ ; patet autem esse  $4mm = (2-1)A$  majorem quam  $2B = 2mm - 2nnp$ . Sed quando radices sunt imaginariæ, formæ

$$\pm m + n\sqrt{-p} \text{ ac } \pm m - n\sqrt{-p}$$

est iterum

$$A = \pm 2m; AA = +4mm$$

sed

$$B = +mm + nnp \text{ ac } 2B = +2mm + 2nnp$$

crit.

eritque AA major aut minor quam 2B, cum esse possit *mm* major aut minor quam *mnp*.

36. Ponendo coefficientem, non secundi, sed tertii, quarti, quinti termini, &c, æqualem nihilo, exterminabitur tertius, quartus, quintus, &c; terminus. Sed tertius terminus eliminatur solutione æquationis quadraticæ

$$ee + \frac{2Ae}{n} + \frac{2B}{n \cdot n - 1} = 0$$

quæ dat

$$e = -\frac{A}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{AA}{nn} - \frac{2B}{n \cdot n - 1}\right)}$$

quartus solutione æquationis trium dimensionum, quintus æquationis quatuor dimensionum &c. Vide N<sup>o</sup>. IV. Cap. III. pag. 53. Tem. II.

37. Ponendo coefficientem secundi termini transformatæ æqualem datæ quantitati, nempe

$$ne + A = a, \text{ \& } e = \frac{a - A}{n}$$

proposita transformabitur in aliam cujus secundus terminus habebit coefficientem datum *a*. Idem, mutatis mutandis intelligitur de reliquis coefficientibus.

38. Reliquæ transformationes facile perficiuntur. Ponantur in proposita pro *x* & ejus potestatibus,  $\frac{y}{z}$  & hujus potestates; & proposita fiet

$$\frac{y^n}{z^n} + \frac{Ay^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{By^{n-2}}{z^{n-2}} + \frac{Cy^{n-3}}{z^{n-3}} + \&c. = 0.$$

39. Quare si  $z = \frac{b}{a}$  erit *a* ad *b* ut *x* ad *y*, & radices transformatæ ad radices propositæ in data ratione *b* ad *a*.

40. Ergo si *a* = 1, erit *y* = *bx*, & radices transformatæ æquabunt radices æquationis propositæ multiplicatas per datum numerum *b*.

41. Tunc, multiplicando per *b<sup>n</sup>*, transformata fiet

$$y^n + bAy^{n-1} + b^2By^{n-2} + b^3Cy^{n-3} + b^4Dy^{n-4} + \&c. = 0$$

Quare omnes termini præter primum, dividi poterunt per *b*.

42. Hinc, si proposita habet non unitatem, sed  $b$  coefficientem altissimi termini, transformatur in aliam, cujus terminus altissimus coefficientem habet unitatem.

43. Rursus, si sit  $b$  factum ex denominatoribus,  $d$ ;  $e$ ;  $f$  &c., terminorum propositæ

$$x^n + \frac{A}{d} x^{n-1} + \frac{B}{e} x^{n-2} + \frac{C}{f} x^{n-3} + \&c. = 0$$

transformata orietur libera a fractionibus. Ea autem erit

$$\frac{y^n}{b^n} + \frac{Ay^{n-1}}{db^{n-1}} + \frac{By^{n-2}}{eb^{n-2}} + \frac{Cy^{n-3}}{f.b^{n-3}} + \&c. = 0$$

id est

$$y^n + Aefy^{n-1} + Bd^1ef^2y^{n-2} + Cd^1e^1f^3y^{n-3} + \&c. = 0$$

44. Et si  $b = \sqrt[m]{a}$ , transformata fiet

$$y + Ay\sqrt[m]{a} + By\sqrt[m]{a^2} + Cy\sqrt[m]{a^3} + Dy\sqrt[m]{a^4} + \&c. = 0.$$

Quapropter si  $A = \alpha\sqrt[m]{a^{m-1}}$ ;  $B = \beta\sqrt[m]{a^{m-2}}$ ;  $C = \gamma\sqrt[m]{a^{m-3}}$  &c., orietur transformata libera a surdis. Hæc autem series toties redire debet, quoties in  $\sqrt[m]{a^r}$  fit  $r$  æqualis  $m$  aut ejus multiplex; & coefficientes propositæ, qui multiplicandi sunt per aliquam potestatem rationalem ipsius  $a$ , esse debent rationales. Sit ex. gr.

$$x^6 + A\sqrt[3]{9}.x^5 + B\sqrt[3]{3}.x^4 + Cx^3 + D\sqrt[3]{9}.x^2 + E\sqrt[3]{3}.x + F = 0$$

& ponatur  $x = \frac{y}{\sqrt[3]{3}}$ , transformata fiet

$$\frac{y^6}{\sqrt[3]{3^6}} + \frac{A\sqrt[3]{3^2}.y^5}{\sqrt[3]{3^5}} + \frac{B\sqrt[3]{3}.y^4}{\sqrt[3]{3^4}} + \frac{Cy^3}{\sqrt[3]{3^3}} + \frac{D\sqrt[3]{3^2}.y^2}{\sqrt[3]{3^2}} + \frac{E\sqrt[3]{3}.y}{\sqrt[3]{3}} + F = 0$$

quæ multiplicando fit rationalis.

45. Si  $b = 1$ , erit  $ay = x$ ;  $y = \frac{x}{a}$ , & radices transformatæ æquabunt radices propositæ divisas per datum numerum  $a$ .

Tunc transformatæ erit

$$a^n y^n + Aa^{n-1} y^{n-1} + Ca^{n-2} y^{n-2} + \dots S = 0$$

quare si sit  $n = m + r$ , &  $S = a^m T$ , tota æquatio dividi poterit per  $a^m$ , & orietur transformatæ, cujus ultimus terminus minor.

46. Hinc etiam aliquando auferuntur radicales e proposita. Sit enim  $a^n = b^n \sqrt[m]{c^n}$ , fiet transformatæ

$$b^n \sqrt[m]{c^n} y^n + A \cdot b^{n-1} \sqrt[m]{c^{n-1}} y^{n-1} + B \cdot b^{n-2} \sqrt[m]{c^{n-2}} y^{n-2} \dots + S = 0$$

$$\text{quæ, si } A = \alpha \sqrt[m]{c}; B = \beta \sqrt[m]{c^2}; C = \gamma \sqrt[m]{c^3}. \text{ \&c. } S = T \cdot \sqrt[m]{c^n},$$

dividi poterit per  $\sqrt[m]{c^n}$ , & erit libera a surdis. Ex. gr. fit

$$x^6 + A\sqrt[4]{3} x^5 + B\sqrt[4]{3} x^4 + C\sqrt[4]{3^3} x^3 + Dx^2 + E\sqrt[4]{3} x + F\sqrt[4]{3} = 0$$

& ponatur  $x = y\sqrt[4]{3}$ , proposita transmutabitur in

$$3y^6 \sqrt[4]{3} + 3Ay^5 \sqrt[4]{3} + 3By^4 \sqrt[4]{3} + 3Cy^3 \sqrt[4]{3} + Dy^2 \sqrt[4]{3} + Ey \sqrt[4]{3} + F\sqrt[4]{3} = 0$$

quæ per divisionem liberabitur a surdis.

47. Radices æquationis mutantur in reciprocas, scribendo ultimum terminum propositæ ductum in  $y^n$ ; coefficientem penultimum in  $y^{n-1}$  &c. Sic proposita.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots + Px^2 + Rx + S = 0$$

fit

$$1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots + Py^{n-1} + Ry^{n-2} + Sy^n = 0$$

48. Est & alia transformatio ponens pro incognita propositæ aliquam alterius incognitæ potestatem; ut  $x = y^m$ ; tunc proposita, qua sæpius usi,

$$y^{mn} + Ay^{mn-m} + By^{mn-2m} + Cy^{mn-3m} + \text{\&c.} = 0$$

13

49. Hoc pacto deprimuntur æquationes, in quibus exponentes sunt ejusdem numeri multiplices.

Sint exponentes æquationis propositæ

$$pr; pr - r; pr - 2r; pr - 3r; pr - 4r \text{ \&c.}$$

ponendo in  $y^m$  N<sup>o</sup>. 48,  $m = \frac{1}{r}$ , vel  $x^r = y$ ; exponentes transformatae erunt

$$p; p - 1; p - 2; p - 3; p - 4; p - 5 \text{ \&c.}$$

Ex. gr. proposita sit æquatio

$$x^8 + Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D = 0$$

ponendo  $x^2 = y$ ; atque ideo  $x^4 = y^2$ ;  $x^6 = y^3$ ;  $x^8 = y^4$ ; proposita transformabitur in

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

Sit pariter

$$x^{15} + Ax^{12} + Bx^9 + Cx^6 + Dx^3 + E = 0$$

ponendo  $x^3 = y$ , ac  $x^6 = y^2$ ;  $x^9 = y^3$ ;  $x^{12} = y^4$ ;  $x^{15} = y^5$ , ea fit

$$y^5 + Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0$$

50. Nunc demonstrandus est Artic. VIII. hujus Capituli, agens de potestatibus radicum æquationis. Theoremata huc pertinentia revocabo ad unum generale, sequutus, quantum potero, notationem Auctoris. Ex ea patet assumi posse æquationem generalem hujus formæ.

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + sx^{n-4} + tx^{n-5} + ux^{n-6} + \dots \text{ \&c.} = 0$$

51. Pono terminorum sequentium, siqui sunt post  $ux^{n-6}$ , coefficientes ordine esse

$$a; b; c; d; e; \text{ \&c.}$$

& litteras  $g; h; i$ , indicare in genere tres coefficientes continuos, qui pertinent ad  $x^{r-1}$ ;  $x^{r-2}$ ;  $x^{r-3}$ . Ideo hi coefficientes continebunt summas factorum ex æquationis radicibus sumtis, ordine, ad numeros  $r-1; r; r+1$ .

52. Pariter pono  $k$  esse coefficientem termini penultimi, (qui ideo continebit

nebit facta e radicibus sumtis ad numerum  $n - 1$ ; &  $l$  esse terminum ultimum, (vel factum e radicibus omnibus;) atque  $f$ ;  $z$ ;  $\zeta$  coefficients indeterminatos  $x^{n-s+1}$ ;  $x^{n-s}$ ;  $x^{n-s-1}$ .

53. Hos autem coefficients sumo cum signis, quæ habent in æquatione, recedens ab Auctore, qui accipit *cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis*, & signa muto in theoremate.

54. Radices æquationis exponantur litteris græcis

$$\alpha; \beta; \gamma; \delta; \epsilon; \zeta; \&c.$$

ad numerum  $n$ , qui & æquationis gradum exponit, & quæratum summa potestatum  $m$  ex his radicibus.

55. Potestates radicum, quarum potestatum exponentes sunt

$$m; m-1; m-2; m-3; m-4; \dots 2.$$

in unum coactæ, exponantur litteris latinis majusculis

$$A; B; C; D; E \dots O.$$

& summa potestatum primarum, vel, quod idem est, summa radicum, exponatur littera  $p$ : hanc enim posuimus coefficientem secundi termini æquationis, idest summam radicum. Sed summe potestatum, quarum exponentes sunt generales & indeterminati, sed continui,

$$m-r+1; m-r; m-r-1$$

exponantur litteris

$$G; H; I.$$

56. Tandem summa potestatum quarumvis, quarum exponens est  $m-t$ , exponatur per  $M$ .

Ut sub oculos ponamus has notationes, sit

$$A = \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \epsilon^m + \zeta^m + \&c.$$

$$B = \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} + \epsilon^{m-1} + \zeta^{m-1} + \&c.$$

$$C = \alpha^{m-2} + \beta^{m-2} + \gamma^{m-2} + \delta^{m-2} + \epsilon^{m-2} + \zeta^{m-2} + \&c.$$

$$G = \alpha^{m-r+1} + \beta^{m-r+1} + \gamma^{m-r+1} + \delta^{m-r+1} + \epsilon^{m-r+1} + \zeta^{m-r+1} + \&c.$$

$$H = \alpha^{m-r} + \beta^{m-r} + \gamma^{m-r} + \delta^{m-r} + \epsilon^{m-r} + \zeta^{m-r} + \&c.$$

$$I = \alpha^{m-r-1} + \beta^{m-r-1} + \gamma^{m-r-1} + \delta^{m-r-1} + \epsilon^{m-r-1} + \zeta^{m-r-1} + \&c.$$

&amp;

$$M = \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} + \epsilon^{m-1} + \zeta^{m-1} + \&c.$$

57. His positis, constituentur series

B; C; D; E; F; &c. .... O; p; m

&amp;c

p; q; r; s; t .... y; z; f.

Dico esse

$$A = pB - qC + rD - sE + tF \dots \pm yO \mp zp \pm mf.$$

Hoc est generale theorema, ad quod revoco theoremata *Newtoni*. Pro cuius demonstratione, obervo quod.

58. Omnes termini

pB; qC; rD; sE; tF &c.

habent eundem dimensionum numerum  $m$ . Nam ipsa B est dimensionum numero  $m - 1$  (N<sup>o</sup> 55. & 56.); est autem  $p$  unius dimensionis: ergo numerus dimensionum facti  $pB$  est  $m$ . Sed in ipsis  $p$ ;  $q$ ;  $r$ ;  $s$ ;  $t$ ; &c. numerus dimensionum semper crescit unitate, qua decrescunt exponentes ipsarum B; C; D; E; F; &c, ergo singula facta habent eundem dimensionum numerum  $m$ .

59. Sumamus nunc tria quævis facta continua

$$\pm gG \mp bH \pm iI$$

secundum N<sup>o</sup> 51. & 55; prima pars ipsius  $bH$  destruit secundam præcedentis  $gG$ ; & secunda pars ipsius  $bH$  destruitur a prima sequentis  $iI$  (N<sup>o</sup> 6. Comment. ad Cap. III. pag. 62). Penultimi autem termini  $\mp zp$  pars destruit partem præcedentis; pars altera destruitur ab ipso  $mf$ : & pars ipsius  $qC$  destruit partem ipsius  $pB$ ; pars reliqua destruitur ab  $rD$ . Manet ergo tandem prima pars ipsius  $pB$ , quæ est ipsa quantitas A.

60. Dixi *primo*, medium e tribus factis continuis destrui partim a parte præcedentis, partim a parte sequentis, & appellavi ad ea quæ supra demonstravi de quavis æquationis radice, quæ in æquatione substituitur pro  $x^{n-r}$ ;  $x^{n-r-1}$ ;  $x^{n-r-2}$ . Id nunc accidere patet; quod cum verum sit, seu substituatur  $\alpha$ ; seu  $\beta$ ; seu quævis alia, etiam verum erit quando substituuntur omnes, una post aliam. Rem licet perspicuam, exemplo tamen illustremus.

Sit æquatio generalis sex dimensionum



$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$$

hujus radices sint quæ supra (N°. 54.) & sit exponens  $m - r = m - 4$ .  
Erit  $m - r + 1 = m - 3$ ; &  $m - r - 1 = m - 5$ . Quapropter

$$G = \alpha^{m-3} + \beta^{m-3} + \gamma^{m-3} + \delta^{m-3} + \varepsilon^{m-3} + \zeta^{m-3}$$

Hæc summa debet multiplicari per

$$r = \alpha\beta(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \\ \beta\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \\ \gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \gamma\varepsilon\zeta + \\ \delta\varepsilon\zeta$$

Hinc conficietur

$$\begin{aligned} & \alpha^{m-2}(\beta(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \delta(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta) + \\ & \alpha^{m-3}(\beta\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \gamma\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta) + \\ & \beta^{m-2}(\alpha(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \delta(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta) + \\ & \beta^{m-3}(\alpha\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \gamma\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta) + \\ & \gamma^{m-2}(\alpha(\beta + \delta + \varepsilon + \zeta) + \beta(\delta + \varepsilon + \zeta) + \delta(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta) + \\ & \gamma^{m-3}(\alpha\beta(\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta) + \\ & \delta^{m-2}(\alpha(\beta + \gamma + \varepsilon + \zeta) + \beta(\gamma + \varepsilon + \zeta) + \gamma(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta) + \\ & \delta^{m-3}(\alpha\beta(\gamma + \varepsilon + \zeta) + \alpha\gamma(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \beta\gamma(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \gamma\varepsilon\zeta) + \\ & \varepsilon^{m-2}(\alpha(\beta + \gamma + \delta + \zeta) + \beta(\gamma + \delta + \zeta) + \gamma(\delta + \zeta) + \delta\zeta) + \\ & \varepsilon^{m-3}(\alpha\beta(\gamma + \delta + \zeta) + \alpha\gamma(\delta + \zeta) + \alpha\delta\zeta + \beta\gamma(\delta + \zeta) + \beta\delta\zeta + \gamma\delta\zeta) + \\ & \zeta^{m-2}(\alpha(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + \beta(\gamma + \delta + \varepsilon) + \gamma(\delta + \varepsilon) + \delta\varepsilon) + \\ & \zeta^{m-3}(\alpha\beta(\gamma + \delta + \varepsilon) + \alpha\gamma(\delta + \varepsilon) + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma(\delta + \varepsilon) + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon) + \end{aligned}$$

Hic vides quam partem voco summam factorum e potestatibus, quarum exponens est  $m - 3$ , in suos Factores.

Pariter erit

$$H = \alpha^{m-4} + \beta^{m-4} + \gamma^{m-4} + \delta^{m-4} + \varepsilon^{m-4} + \zeta^{m-4}$$

Hæc summa debet multiplicari per

$$s = \alpha\beta\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\beta\varepsilon\zeta + \alpha\gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\delta\varepsilon\zeta + \alpha\gamma\varepsilon\zeta + \\ \beta\gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\gamma\varepsilon\zeta + \beta\delta\varepsilon\zeta + \gamma\delta\varepsilon\zeta$$

unde fit

$$\begin{aligned}
& \alpha^{m-3}(\beta\gamma(\delta + \epsilon + \zeta) + \beta\delta(\epsilon + \zeta) + \beta\epsilon\zeta + \gamma\delta(\epsilon + \zeta) + \delta\epsilon\zeta + \gamma\epsilon\zeta) + \\
& \alpha^{m-4}(\beta\gamma\delta(\epsilon + \zeta) + \beta\gamma\epsilon\zeta + \beta\delta\epsilon\zeta + \gamma\delta\epsilon\zeta) + \\
& \beta^{m-3}(\alpha\gamma(\delta + \epsilon + \zeta) + \alpha\delta(\epsilon + \zeta) + \alpha\epsilon\zeta + \gamma\delta(\epsilon + \zeta) + \gamma\epsilon\zeta + \delta\epsilon\zeta) + \\
& \beta^{m-4}(\alpha\gamma\delta(\epsilon + \zeta) + \alpha\delta\epsilon\zeta + \alpha\gamma\epsilon\zeta + \gamma\delta\epsilon\zeta) + \\
& \gamma^{m-3}(\alpha\beta(\delta + \epsilon + \zeta) + \alpha\delta(\epsilon + \zeta) + \alpha\epsilon\zeta + \beta\delta(\epsilon + \zeta) + \beta\epsilon\zeta + \delta\epsilon\zeta) + \\
& \gamma^{m-4}(\alpha\beta\delta(\epsilon + \zeta) + \alpha\beta\epsilon\zeta + \alpha\delta\epsilon\zeta + \beta\delta\epsilon\zeta) + \\
& \epsilon^{m-3}(\alpha\beta'\gamma(\delta + \zeta) + \alpha\gamma(\delta + \zeta) + \alpha\delta\zeta + \beta\gamma(\delta + \zeta) + \beta\delta\zeta + \delta\epsilon\zeta) + \\
& \epsilon^{m-4}(\alpha\beta\gamma(\delta + \zeta) + \alpha\beta\delta\zeta + \alpha\gamma\delta\zeta + \beta\gamma\delta\zeta) + \\
& \zeta^{m-3}(\alpha\beta(\gamma + \delta + \epsilon) + \alpha\gamma(\delta + \epsilon) + \alpha\delta\epsilon + \beta\gamma(\delta + \epsilon) + \beta\delta\epsilon + \gamma\delta\epsilon) + \\
& \zeta^{m-4}(\alpha\beta\gamma(\delta + \epsilon) + \alpha\beta\delta\epsilon + \alpha\gamma\delta\epsilon + \beta\gamma\delta\epsilon)
\end{aligned}$$

cujus pars prima, nempe summa factorum e potestatibus, quarum exponens est  $m - 3$ , eadem est ac secunda pars ipsius  $rG$ . Habent autem  $rG$  &  $sH$  signa contraria. Ergo hæ duæ partes se destruant. Si nunc evolvatur  $rI$ , inveniatur ejus prima pars æqualis secundæ parti ipsius  $sH$ ; sed  $sH$  &  $rI$  habent signa contraria. Igitur &c.

61. Dixi *secundo* partem penultimi termini  $zp$  destrui a parte præcedentis, quod constat e superioribus. Addidi alteram partem ipsius  $zp$  destrui ab ultimo termino  $mf$ . Demonstrandum eas esse æquales; oppositæ enim factæ sunt.

Coefficiens  $z$  continet summam factorum e radicibus sumtis ad numerum  $m - 1$  (Nº. 58.); atque horum factorum numerus est  $m$ . Hæc summa debet multiplicari per summam radicem. Conficietur ergo primo secundæ potestates singularum radicum, ductæ singulæ in summam factorum ex  $m - 2$  radicibus, præter eam cujus potestas secunda sumta est; & deinde producta ex omnibus factis diversis  $m - 1$  Factorum, vel radicum, in singulas radices, quæ ab iis absunt; id est factum ex  $m$  radicibus, qui  $m$ .ies repetetur (Nº. 29. Comment. ad Cap. II. pag. 17.) id est  $mf$ .

63. Dixi *tertio* primam partem ipsius  $pB$  esse quantitatem  $A$ ; quod constat: est enim

$$B = \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} + \&c.$$

Hæc quantitas multiplicari debet per

$$p = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$$

conficietur ergo

$$\alpha^m + \alpha^{m-1}(\beta + \gamma + \delta + \&c) + \beta^m + \beta^{m-1}(\alpha + \gamma + \delta + \&c) + \gamma^m +$$

$$\gamma^{m-1} (\alpha + \beta + \delta + \&c) + \delta^m + \delta^{m-1} (\alpha + \beta + \gamma + \&c) + \&c.$$

Quare patet propositum.

64. Nunc autem, si est  $m$ , (exponens potestatum e radicibus,) æqualis  $n$  (exponenti altissimi termini æquationis,) eundem terminorum numerum habebunt series

$$\begin{array}{ccccccc} B; C; D; E; F; \dots O; p; m \\ p; q; r; s; t; \quad y; z; f \end{array}$$

eritque  $f$  ultimus æquationis terminus.

65. Si  $m$  est minor quam  $n$ , series prior habebit minorem terminorum numerum, quam posterior; cadet  $m$  supra aliquem coefficientem æquationis, qui ultimum præcedit, & ibi abruptetur series productorum, quæ erit, ex. gr.

$$pB; qC; rD; sE; tF \dots mA.$$

66. Hinc oriuntur peculiaria Newtoni theoremata; in quibus nos ponemus majusculas italicas  $A; B; C$  &c. pro minusculis  $a; b; c$  &c, quibus ille utitur.

Sit enim  $m = 2$ ; erit

$$\text{Summa 2. Pot. } pA - 2q = B$$

Si  $m = 3$ , erit

$$\text{Summa 3. Pot. } pB - qA + 3r = C$$

Pariter ponendo pro  $m$  ordine numeros 4; 5; 6; &c. erit

$$\text{S. 4. Pot. } pC - qB + rA - 4s = D$$

$$\text{S. 5. Pot. } pD - qC + rB - sA + 5t = E$$

$$\text{S. 6. Pot. } pE - qD + rC - sB + tA - 6u = F$$

Et sic semper.

67. Si tandem est  $m$  major quam  $n$ , cadet ultimus æquationis terminus  $f$  sub aliqua summa potestatum  $M$ , atque ibi abruptetur series, quæ erit

$$pB - qC + rD - sE + tF \dots \pm fM.$$

68. Hoc assertum, & quod habetur sub N°. 65., facile patet, si post ultimum seriei brevioris terminum scribantur aliquot 0; sic pro N°. 65.

$$\begin{array}{ccccccc} B; C; D; E; F; \dots p; m; o; o; o; o; \&c. \\ p; q; r; s; t; \quad u; a; b; c; d; e; \&c. \end{array}$$

K 2

unde

unde conflabitur series composita

$$pB; qC; rD; sE; tF \dots pu; ma; o; o; o \&c.$$

& post *ma* abrumpetur. At pro N°. 67. series erunt

$$A; B; C; E; F; \dots M; N; O \dots p; m$$

$$p; q; r; s; t; \dots f; o; o; \dots o; o.$$

unde orietur series composita

$$pB; qC; rD; sE; tF \dots fM; o; o \&c$$

& ea post *fM* abrumpetur; nullus ergo hujus terminus erit multiplicatus per *m*, quandoquidem *m* cadit supra *o*, &  $m \cdot o = o$ . Sed ultimum compositæ terminum *fM* non ducendum esse in *m* alio pacto demonstrari potest.

69. Est enim *f* factum unicum ex omnibus æquationis radicibus  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$  &c; quod ductum in *M*, ex notatione N°. 56., dabit

$$\alpha^{m-1+1} \cdot \beta\gamma\delta\epsilon\zeta \&c. + \beta^{m-1+1} \cdot \alpha\gamma\delta\epsilon\zeta \&c. + \gamma^{m-1+1} \cdot \alpha\beta\delta\epsilon\zeta \&c. + \&c.$$

hujus autem summæ quævis incomplexa pars diversa est ab aliis, & destruit respondentem incomplexam partem præcedentis. Nulla ergo est pars repetita; quæ repetitio inveniebatur in hypothesi N°. 65; ut patet ex N°. 64. Demonstratio ibi allata transferri nequit ad hypothesim quam nunc præ manibus habemus, quia nunc est *f* factum ex omnibus radicibus, & in N°. 64. habebamus summam factorum ex omnibus radicibus, una demta.

70. Nunc dico series allatas N. 66. ita cum Newtonianis concidere, ut prima, tertia, quinta, &c. etiam signis convenient; secunda, quarta, sexta &c. habeant signa contraria. Nos enim sumimus  $p = A$  cum signo quod habet in æquatione, NEWTONUS signum mutat; ille igitur habet  $\pm p$ , &  $\pm A$ , quando nos contra  $\mp p$ , &  $\mp A$ . Sed  $\mp p \cdot \pm A = +pA = \mp p \cdot \mp A$ , & quantitas *q* utrinque sumitur cum signo contrario. Ergo prima series utrinque eadem est, & etiam signis congruit.

Sed in secunda, ubi ille habet  $\pm pB$ , nos contra habemus  $\mp pB$ ; ille  $-q \cdot \pm A$ ; nos  $-q \mp A$ ; ille  $\mp 3r$ ; nos  $\pm 3r$ . Ergo signa sunt contraria. Ratiocinium primæ seriei sponte aptatur tertiæ, quintæ &c., ratiocinium secundæ ultro se accommodat quartæ, sextæ &c. Nam ille habet  $\pm C$ , & nos  $\mp C$ ; sed  $\pm p \cdot \pm C = +pC = \mp p \cdot \mp C$ ; uterque  $\pm B$ , ac  $-q$ ; ille  $\pm A \& \pm r$ ; nos  $\mp A$ ; &  $\mp r$ ; sic de reliquis.

71. Ceterum neque imaginariæ fallunt vim theoremat. Exemplo esse potest æquatio

$$x^6 - 8x^5 + 32x^4 - 50x^3 + 9x^2 + 78x + 338 = 0$$

cujus radices sunt

$-1-\sqrt{-1}; -1+\sqrt{-1}; +2-3\sqrt{-1}; +2+3\sqrt{-1}; +3-2\sqrt{-1}; +3+2\sqrt{-1}$

omnes imaginariæ. In hoc exemplo, tum elevando has radices singulas ad potestates, tum ex theoremate, inveniuntur

summa 2. Potest.  $= 0$ . summa 3. Potest.  $= -106$

summa 4. Potest.  $= -484$ . summa 5. Potest.  $= -942$

summa 6. Potest.  $= 0$ . summa 7. Potest.  $= +4194$  &c.

Hoc theorema in Addit. pag. 110. & seq. invenitur alio pacto demonstratum a Celeb. BAERMANNO, cum quo demonstrationem meam, antea inventam, communicaveram anno 1749. Item alio pacto demonstratum fuit ab illustri Colin MAC-LAURIN in ejus Algebra anglice edita anno 1748. cap. XII. pag. 286. & seq. Usus tradet Auctor in capite sequente, & multiplex est in Mathesi sublimiore. Vide, sis, Clar. EULERI introductionem in analysim infinitorum Lib. I. Cap. X. pag. 128. & seq.

71. Est & alia transformatio, qua datum binomium

$$a^m \pm b^l$$

per multiplicationem transformatur in aliud, in quo quantitas  $a$  datum habeat exponentem  $n$ , & quantitas  $b$  non multiplicata sit per  $a$ .

Leges sunt 1<sup>o</sup>. ut quæsitum binomii primus terminus exponentem habeat datum  $= n$ .

2<sup>o</sup>. Ut termini medii se destruant.

Quærendum est polynomium, per quod si multiplicetur datum binomium, obtineatur propositum.

72. Sint duo termini continui desumpti e polynomio quæsito

$$a^x b^y + a^z b^u$$

Ex horum & binomii propositi multiplicatione oritur factum generale

$$a^{m+x} b^y \pm a^x b^{l+y} + a^{m+z} b^u \pm a^z b^{l+u}.$$

73. Jam primus facti terminus debet esse  $a^n$ . Ergo

$$m+x=n; x=n-m; \text{ \& } y=0$$

quare primus multiplicatoris terminus est

$$a^{n-m}.$$

& factum, per substitutionem,

$$a^n \pm a^{n-m} b^l + a^{m+z} b^u \pm a^z b^{l+u}$$

Sed esse debet

$$\pm a^{n-m} b^l + a^{m+z} b^u = 0$$

quare primus horum duorum terminorum semper est negativus; & si binomium propositum est

$$a^m + b^l$$

secundus terminus multiplicatoris, est negativus; at positivus est si propositum binomium est

$$b^m - b^l.$$

74. Præterea esse debet

$$n - m = m + z; \text{ \& } l = u; \text{ unde } z = n - 2m; \text{ atque } 2l = u + l$$

Et jam est multiplicator

$$a^{n-m} \mp a^{n-2m} b^l + a^{n-3m} b^{2l}$$

Factum autem

$$a^n - a^{n-m} b^l + a^{n-m} b^l \pm a^{n-2m} b^{2l}$$

75. Ponatur nunc ultimus hujus facti terminus æqualis primo termino facti generalis; quia hi termini se destruere debent, erit

$$\pm a^{n-2m} b^{2l} = + a^{m+z} b^y$$

statimque recurret observatio N<sup>o</sup> 73. pro signo quarti termini multiplicatoris. Erit præterea

$$n - 2m = m + x; \text{ hinc } x = n - 3m; \text{ atque } y = 2l, \text{ ac } l + y = 3l$$

& substituendo, factum evadet

$$a^n - a^{n-m} b^l + a^{n-m} b^l - a^{n-2m} b^{2l} + a^{n-2m} b^{2l} \pm a^{n-3m} b^{3l} +$$

$$a^{m+z} b^u \pm a^z b^{l+u}$$

ubi debet esse

$$n - 3m = m + z; \text{ ac } z = n - 4m; \text{ \& } u = 3l, \text{ ac } l + u = 4l$$

76. Hinc invenitur multiplicator

$$a^{n-m} \mp a^{n-2m}b^l + a^{n-3m}b^{2l} \mp a^{n-4m}b^{3l}$$

77. Itaque manifesta est lex progressionis. Eadem autem progressio invenietur substituendo in facto generale, ut jam fecimus.

78. Ultimus autem producti terminus esse debet liber a potestatibus ipsius  $a$ . Hic ultimus producti terminus oritur ab ultimo termino multiplicatoris ducto in ultimum terminum propositi binomii. Si ergo ultimus multiplicatoris terminus sit ejus terminus  $p$ -mus. Erit ergo ex lege progressionis, & ex observatis, exponens ipsius  $a$  in ultimo facti termino

$$n - pm = 0; \text{ unde } p = \frac{n}{m} = z$$

est autem  $z$  exponens ipsius  $a$  in ultimo termino facti generalis.

79. Item ex lege progressionis, exponens ipsius  $b$  in ultimo facti termino est

$$(p - 1)l = +n; \text{ hinc } u = pl = \frac{nl}{m}$$

Est autem iterum  $l + u$  exponens ipsius  $b$  in ultimo termino facti generalis, &  $u$  exponens ejusdem  $b$  in ultimo termino multiplicatoris.

80. Sed, si binomium propositum est

$$a^m + b^l$$

multiplicatoris terminus secundus, quartus, sextus, & reliqui pares sunt negativi. (N<sup>o</sup> 73. 75. hujus).

81. Erit ergo multiplicatoris terminus ultimus negativus si cadit in sedem parem

82. Si vero, vel ultimus multiplicatoris terminus cadat in sedem imparem, vel si propositum binomium sit

$$a^m - b^l$$

semper ultimus multiplicatoris terminus erit positivus.

83. Hujus transformationis usus duplex est. Et primo quidem dato binomio irrationali invenietur polynomium, per quod si ducatur datum binomium irrationale, producatur binomium rationale.

Sint enim dati binomii irrationalis exponentes dati  $m$ , &  $l$ ; & quaeratur minimus numerus integer  $n$ ; ita ut sit  $\frac{nl}{m}$  numerus integer, dati erunt exponentes polynomii quaesiti.

Sit

Sit binomium datum  $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ . Hic est

$$m = \frac{1}{2}; l = \frac{1}{3}; \text{ atque ideo } \frac{l}{m} = \frac{2}{3}, \text{ ac } n = 3$$

Quapropter

$$n - m = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}; n - 2m = 3 - 1 = 2; n - 3m = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n - 4m = 3 - 2 = 1; n - 5m = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}; n - 6m = 3 - 3 = 0$$

seposito ultimo exponente, manent quinque exponentes ipsius  $a$ ; quinque igitur inveniendi sunt exponentes ipsius  $b$ ; quod facile fit. Est enim

$$l = \frac{1}{3}; 2l = \frac{2}{3}; 3l = 1; 4l = \frac{4}{3}; 5l = \frac{5}{3}$$

Quare polynomium quaesitum est

$$a^{\frac{5}{2}} + a^2 b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{3}} + ab + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{5}{3}}$$

& binomium productum est

$$a^3 - b^3.$$

Quando est  $m = l$ ; utique est  $\frac{l}{m} = 1 = n$ .

84. Hinc fractiones furdis implicatae saepe raducuntur ad simpliciores expressionem, quaerendo polynomium quod, multiplicatum per fractionis denominatorem furdum, det factum rationale, & per idem polynomium multiplicando etiam numeratorem. Sic invenitur

$$\frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} = 4 + \sqrt[3]{15}$$

Nam binomium transformandum est  $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}$ . Quare

$$m = \frac{1}{2} = l; \text{ \& } n = 1. \text{ Ideo } n - m = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; n - 2m = 0$$

&c

$l =$



$l = \frac{1}{2}$ ;  $2l = 1$ ; atque multiplicator quæsitus  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ .

Est autem

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 + \sqrt{15} - \sqrt{15} - 3 = 2$$

& numerator multiplicatus

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15}$$

85. Alter usus est hic. Dato facto

$$a^n \pm b^{\frac{nl}{m}}$$

& Factorum uno

$$a^m \pm b^l$$

invenire alterum Factorem

$$a^{n-m} \mp a^{n-2m}b^l + a^{n-3m}b^{2l} \mp a^{n-4m}b^{3l} + \&c.$$

unitatis divisionis ambagibus. Exempla desumemus e potestatibus unitatis.

86. Ponamus  $x^r = 1$ , vel  $x^r - 1 = 0$ . Constat esse  $x = 1$ , si  $r$  est numerus impar, &  $x = \pm 1$ , si  $r$  est numerus par; id est  $x - 1 = 0$  in prima hypothesi, &  $x \mp 1$  in altera, esse unum e binomiis simplicibus, quibus conflatur æquatio  $x^r - 1 = 0$ . Est ergo

$$a^n - b^{\frac{nl}{m}} = x^r - 1, \text{ \& } a^m \pm b^l = x \mp 1$$

Quare

$$m = 1; l = 0; n = r.$$

Igitur alter Factor est

$$x^{r-1} \mp x^{r-2} + x^{r-3} \mp x^{r-4} + x^{r-5} \mp \&c = 0$$

Ubi ultimus terminus erit  $x^{r-r} = x^0 = 1$

Sit  $r = 3$ ; Factor  $x^2 + x + 1$ , habebit omnes terminos positivos (N°. 73. & 82. hujus pag. 77. & 79). Sed

Tem. II.

L

K<sup>2</sup>

$$x^3 + x + 1 = 0 \text{ dat } x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Igitur radix cubica unitatis est triplex, una realis, & duæ imaginariæ; nempe

$$1; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Sit  $r = 4$ . Factor erit  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  quando alter est  $x = 1$ ; Quando vero is est  $x = -1$ , habetur Factor  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$  (Nº. 30). Sed prior divisa per  $x + 1$ ; vel posterior divisa per  $x - 1$ , dant  $x^2 + 1 = 0$ , atque ideo  $x = \pm \sqrt{-1}$ ; & quarta unitatis potestas quatuor habet radices, duas reales, & duas imaginarias.

$$+1; -1; +\sqrt{-1}; -\sqrt{-1}$$

Sit  $r = 5$ ; Factor unus erit  $x = 1 = 0$ , alter autem

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Sit  $r = 6$ . Factor  $x = 1 = 0$ , dat alterum

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

& Factor  $x + 1 = 0$ , dat

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1 = 0$$

sed tum prima divisa per  $x + 1 = 0$ ; tum secunda divisa per  $x = 1$ , dant

$$x^4 + x^3 + 1 = 0; \text{ vel } x = \pm \sqrt{(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3})}$$

Habet ergo sexta unitatis potestas sex radices, duas reales, & quatuor imaginarias

$$+1; -1; +\sqrt{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})}; -\sqrt{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})};$$

$$+\sqrt{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})}; -\sqrt{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})}.$$

87. Et sic de reliquis exemplis. Constat autem in genere, quando  $r$  est numerus impar, quorum  $\frac{x^r - 1}{x + 1}$  dividi non posse nec per  $x + 1$ , nec per  $x - 1$ . Nam, præter observata Nº. 86., quorum illud habebit terminos numero  $r$ , impari, & si dividi posset per binomium, quorum hinc ortum habere deberet terminorum numerum  $\frac{r}{2}$ . (Nº. 149. Nota ad Sect. I. Cap. VI. Tom. I. pag. 42.) Hoc autem est absurdum.

## CAPUT IV.

*De Limitibus.Æquationum.*

I. **E**t hinc colliguntur *Limites* inter quos consistent radices æquationis, ubi nulla earum impossibilis est. Nam cum radicum omnium quadrata sint affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radices major. Et eodem argumento, summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radices maximæ, & summa cubo-cuborum major quam cubo-cubus radices maximæ.

*Quamobrem si limitem desideres quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum radicum & extrahere ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major erit quam radix maxima æquationis.*

II. Sed ad radicem maximam propius accedes si quæras summam quadrato-quadratorum & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, & adhuc magis si quæras summam cubo-cuborum & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: Et ita in infinitum.

Sic in æquatione præcedente radix quadratica summæ quadratorum radicum, seu  $\sqrt{39}$ , est  $6\frac{1}{2}$  quam proxime, &  $6\frac{1}{2}$  magis distat a nihilo quam ulla radicum 1, 2, 3, — 5. At radix quadrato-quadratica summæ quadrato-quadratorum radicum, nempe  $\sqrt[4]{723}$  quæ est  $5\frac{1}{2}$  circiter, propius accedit ad radicem a nihilo remotissimam — 5.

III. Si inter summam quadratorum & summam quadrato-quadratorum radicum inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam summa cuborum radicum sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, ut prius inventæ, semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum.

IV. Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quam radix cubica illius semisumma, & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentia.

Sic in æquatione præcedente, media proportionalis inter summam quadratorum radicum, 39, & summam quadrato-quadratorum, 723, est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat — 89. Hujus & 168 semisumma est  $39\frac{1}{2}$ , semidifferentia  $128\frac{1}{2}$ . Prioris radix cubica, quæ est  $3\frac{1}{2}$  circiter, major est quam maxima radicum affirmativarum 3. Posterioris radix cubica, quæ est  $5\frac{1}{21}$  proxime, transcendit radicem negativam — 5.

Quo exemplo videre est quam prope ad radicem hac methodo acceditur, ubi unica tantum radix negativa est, vel unica affirmativa.

V. *Et tamen propius adhuc accederetur*, si, inter summam quadratorum radicum & summam cubo-cuborum, media proportionalis inveniretur; atque ex hujus & summæ quadrato-cuborum radicum semisumma & semidifferentia radices quadrato-cubicæ extraherentur. Nam radix quadrato-cubica semisumma transcenderet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica semidifferentiæ maximam seu extimam negativam, sed excessu multo minore quam ante. Cum igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes, fieri possit minima, dein minima in maximam converti, & postea omnes, præter maximam, fieri negativæ, constat quomodo radix imperata quam proxime potest obtineri.

VI. *Si radices omnes, præter duas, negativæ sunt, possunt illæ due simul hoc modo erui.*

Inventa, juxta methodum præcedentem, summa cuborum duarum illarum radicum, ut & summa quadrato-cuborum & summa quadrato-quadrato-cuborum radicum omnium; inter posteriores duas summæ quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter summam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & summam cubo-cuborum radicum negativarum, quam proxime; adeoque hujus mediæ proportionalis & summæ cubo-cuborum radicum omnium semisumma erit summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia erit summa cubo-cuborum radicum negativarum. Habita igitur tum summa cuborum, tum summa cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo summæ posterioris aufer quadratum summæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum summa tum differentia cuborum habentur cubi ipsi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et si in altioribus potestatibus opus simile institueretur, magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum minus usui sunt, & ad æquationes tantum se extendunt, quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo, quæ & facilius sit & ad omnes æquationes se extendat.

VII. *Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis.* Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur semper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes destruantur, quorum signa diversa sunt a signo primi seu altissimi termini, præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major; qui in terminis prodeuntibus scriptus pro radice, efficit eorum, qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur, aggregatum ejusdem semper esse signi cum primo seu altissimo termino æquationis.

Ut si proponatur æquatio

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0.$$

Hanc

Hanc primum sic multiplico

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120.$$

Dein terminos prodeutes, divisos per  $x$ , rursum multiplico sic

$$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63,$$

& terminos prodeutes rursum dividendo per  $x$ , prodeunt

$$20x^3 - 24xx - 60x + 60,$$

quos minuendi gratia divido per maximum divisorem 4 fiunt

$$5x^3 - 6xx - 15x + 15.$$

Hi iidem multiplicati per progressionem 3. 2. 1. 0, & divisi per  $x$ , fiunt

$$15xx - 12x - 15,$$

& rursum divisi per 3 fiunt

$$5xx - 4x - 5.$$

Et hi multiplicati per progressionem 2. 1. 0, & divisi per  $2x$  fiunt,  $5x - 2$ . Jam, cum terminus æquationis altissimus  $x^5$  affirmativus sit, tento quinam numerus scriptus in his productis pro  $x$ , efficiet ea omnia affirmativa esse. Et quidem tentando 1, fit  $5x - 2 = 3$  affirmativum; sed  $5xx - 4x - 5$ , fit  $-4$  negativum. Quare limes erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem, puta 2. Et in singulis substituendo 2 pro  $x$ , evadunt

$$5x - 2 = 8$$

$$5xx - 4x - 5 = 7$$

$$5x^3 - 6xx - 15x + 15 = 1$$

$$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 79$$

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 46.$$

Quare, cum numeri prodeutes 8. 7. 1. 79. 46, sint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicum affirmatarum maxima. Similiter si limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel, quod perinde est, muto signa terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum signis, quantitates, in quibus numeri substituendi sunt, fiunt

$$\begin{array}{rcl}
5x + 2 & & \\
5xx + 4x & \text{---} & 5 \\
5x^3 + 6xx & \text{---} & 15x \text{ ---} 15 \\
5x^4 + 8x^3 & \text{---} & 30xx \text{ ---} 60x + 63 \\
x^5 + 2x^4 & \text{---} & 10x^3 \text{ ---} 30xx + 63x + 120.
\end{array}$$

Ex his seligo quantitatem aliquam, ubi termini negativi maxime prævalere videntur; puta  $5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$ , & hic substituendo pro  $x$  numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi — 14 & — 33. Unde limites erit major quam — 2. Substituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et similiter in ceteris quantitibus substituendo numerum 3 pro  $x$ , prodit semper numerus affirmativus. Id quod ex inspectione sola colligere licet. Quare numerus — 3 transcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites, 2 & — 3, inter quos radices omnes consistunt.

VIII. Horum vero limitum inventio usui est tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum surdarum ex ipsis; ne forte radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione novissima si radices rationales, si quas forte habeat, invenire vellem; ex superioribus certum est has non alias esse posse quam divisores ultimi termini æquationis, qui hic est 120. Proin tentando omnes ejus divisores, si nullus earum scriptus in æquatione pro radice  $x$ , efficeret omnes terminos evanescere; certum est æquationem non admittere radicem nisi quæ sit surda. At ultimi termini 120, divisores permulti sunt, nimirum 1. — 1. 2. — 2. 3. — 3. 4. — 4. 5. — 5. 6. — 6. 8. — 8. 10. — 10. 12. — 12. 15. — 15. 20. — 20. 24. — 24. 30. — 30. 40. — 40. 60. — 60. 120. & — 120. Et hos omnes divisores tentare, tædio esset. Cognito autem quod radices inter limites 2 & — 3 consistunt, liberamur a tanto labore. Jam enim non opus erit divisores tentare nisi qui sunt inter hos limites, nimirum divisores 1, — 2, & 2. Nam si horum nullus radix est, certum est æquationem non habere radicem nisi quæ sit surda.

# COMMENTARIUS

A D.

## CAPUT IV.

1. Omnis quantitas, infra quam continentur radices æquationis, dicitur *limes æquationis*. Igitur

2. Quantitas, quæ superat maximam æquationis radicem, est æquationis limes, & vocabitur *limes maximus*.

3. Quantitas, quam superat minima radix æquationis, est pariter ejus limes, & dicitur *limes minimus*.

Radices hic intelligo *positivas*. Pro *negativis* sufficit mutare negativas in positivas, & contra, ut tradidit Auctor N°. I. Cap. III. pag. 49. hujus, & nos demonstravimus N°. 8... 13. pag. 58... 60. hujus.

4. Duæ quantitates, quarum altera major est, altera vero minor quam eadem radix æquationis, dicuntur *limites radicum*; & quidem limes *major*, quantitas radice major, limes *minor* quantitas radice minor.

5. Limites tum æquationis (N°. 1.) tum radicum (N°. 4.) eo meliores sunt, quo propius accedunt ad radicem quam limitant.

Auctor variis modis determinat limitem maximum a N°. I. ad totum VI. hujus; deinde per reliquum Caput hoc quærit limites tum maximum tum minimum. Hæc explicabimus ac demonstrabimus, & nonnulla addemus.

6. Seu radices sint positivæ, seu negativæ, illarum potestates pares sunt positivæ. Harum potestatum summa superat eandem potestatem maximæ radice. Ergo radix hujus summæ, denominata ab exponente potestatum, superat maximam radicem, & est æquationis limes maximus. (N°. 2). Sic

$$\pm \alpha; \pm \beta; \pm \gamma; \pm \delta; \pm \epsilon; \&c.$$

evectæ ad potestatem, cujus exponens est par  $= 2n$ , & in unam summam collectæ, eam dant positivam, nempe

$$+ \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n} + \delta^{2n} + \epsilon^{2n} + \&c. = L$$

7. Hæc summa superat ipsam  $\alpha^{2n}$ , etiam si sit  $\alpha$  radicum longe maxima.

Ergo  $L^{\frac{1}{2n}}$  est major quam radix maxima  $\alpha$ , atque ideo limes maximus; quod tradit Auctor N°. I. hujus, pro quadratis, & N°. II. pro paribus potestatibus aliorum graduum.

8. Quod autem observat noster in hujus Capituli initio, limites maximòs hoc pacto determinatos locum habere quando radices omnes sunt reales, non vero quando aliquæ sunt imaginariæ, facile constat. Nulla enim, neque per approximationem, haberi potest radix quantitatis imaginariæ; sed, saltem veræ proxima radix obtinetur quantitatis surdæ realis. Hic autem limites determinantur in numeris rationalibus.

Sed neque in surdis determinari possunt pro imaginariis. Sit enim Factor,  $x \pm a + a\sqrt{-1} = 0$ ; alter aderit  $x \pm a - a\sqrt{-1} = 0$  (Comm. ad Cap. II. N<sup>o</sup>. 45. pag. 19. hujus.). Est autem ex formula binomiali

$$(a + a\sqrt{-1})^{2n} = a^{2n} + 2na^{2n-1}a\sqrt{-1} - \frac{2n \cdot 2n-1}{2} a^{2n-2}a^2 - \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{2 \cdot 3} a^{2n-3} \cdot a^3\sqrt{-1} + \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{2n-4}a^4 + \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3 \cdot 2n-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{2n-5}a^5\sqrt{-1} \&c.$$

Sed

$$(a - a\sqrt{-1})^{2n} = a^{2n} - 2na^{2n-1}a\sqrt{-1} - \frac{2n \cdot 2n-1}{2} a^{2n-2}a^2 + \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{2 \cdot 3} a^{2n-3}a^3\sqrt{-1} + \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{2n-4}a^4 - \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3 \cdot 2n-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{2n-5}a^5\sqrt{-1} \&c.$$

Erit harum summa

$$2a^{2n} - 2n \cdot 2n-1 a^{2n-2}a^2 + \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{3 \cdot 4} a^{2n-4}a^4 - \&c.$$

atque huic omnino similis erit summa potestatum e reliquis Factoribus imaginariis. Sit ergo summa tota  $= L$ , ut N<sup>o</sup>. 6. hujus. Hæc aut erit positiva, aut negativa.

9. Si est positiva, ejus radix  $2n.ma$ , extracta in numeris proximis, etiamsi forte accedat ad maximam radiceis partem rationalem  $a$ , non indicabit partem imaginariam  $a\sqrt{-1}$ .

10. Si vero est negativa, ejus radix par est imaginaria, & quamvis forte accedat ad partem imaginariam, nihil docebit de parte reali.

Sit,



Sit, ex. gr., æquatio quatuor dimensionum

$$x^4 - 14x^3 + 83x^2 - 214x + 252 = 0$$

orta e Factoribus imaginariis

$$x - 2 + \sqrt{-3} = 0 \quad x - 2 - \sqrt{-3} = 0$$

$$x - 5 + \sqrt{-11} = 0 \quad x - 5 - \sqrt{-11} = 0$$

Hæc dat summam quadratorum e radicibus omnibus  $= 30$ , cujus numeri quadrata radix est major quam  $5\frac{1}{2}$  & minor quam  $5\frac{2}{3}$ . Utraque superat maximam partem realem  $5$ , sed non indicat partem imaginariam.

Summa quartarum potestatum est negativa  $= -1902$ ; hujus quarta radix est  $6\frac{2}{3}$  circiter, qui numerus non accedit ad partem realem. Ejusdem numeri sunt Factores  $2 \cdot 3 \cdot 317$ . Si ponas  $-1902 = 951 \cdot -2$ , erit radix quarta fere  $5\frac{2}{3}\sqrt[4]{-2}$ . Si  $= 634 \cdot -3$ , radix quarta, circiter  $5\sqrt[4]{-3}$ ; & nunquam accedes ad radicem partem imaginariam.

Si vero foret æquatio

$$x^4 - 14x^3 + 55x^2 - 66x + 14 = 0$$

orta e Factoribus realibus

$$x - 2 + \sqrt{3} = 0 \quad x - 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$x - 5 + \sqrt{11} = 0 \quad x - 5 - \sqrt{11} = 0$$

Summa quadratorum e radicibus omnibus esset  $86$ , cujus radix quadrata paulo minor est quam  $9\frac{5}{18}$ , quæ major est quam  $5 + \sqrt{11}$ , cum  $\sqrt{11}$  sit minor quam  $4$ . Sed summa quartarum potestatum est  $4986$ , cujus radix quarta est  $8\frac{445}{1024}$ , circiter, propius accedens ad  $5 + \sqrt{11}$ .

11. Obiter ostensum est fieri posse ut, quando adsunt radices imaginariæ, summa potestatum parium sit negativa, quod patet ex N°. 9. hujus, quia quantitates negativæ possunt superare positivas, & exemplo dispicitur in N°. 10. Quare si qua summa potestatum parium sit negativa, æquatio habet radices imaginarias.

12. Nunc demonstranda est propositio Ni. II. hujus, quæ huc recidit: Sint summæ potestatum e radicibus positive sumptarum

Tom. II.

M

L =

$$L = \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \&c.$$

$$P = \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \varepsilon^{m+n} + \&c.$$

Dico esse  $L^{\frac{1}{m}}$  majorem quam  $P^{\frac{1}{m+n}}$ .

Ponantur enim radices ordine decrefcere, ita ut fit  $\alpha$  maxima omnium,  $\beta$  maxima reliquarum, & fic de ceteris.

Est tam  $L^{\frac{1}{m}}$  quam  $P^{\frac{1}{m+n}}$  major quam  $\alpha$ , (Nº. 7. hujus pag. 87.). Sit ergo

$$L^{\frac{1}{m}} = \alpha + x \quad \& \quad P^{\frac{1}{m+n}} = \alpha + y$$

Hinc, evehendo ad potestates respondentcs,

$$L = \alpha^m + m\alpha^{m-1}x + \frac{m.m-1}{2}\alpha^{m-2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\alpha^{m-3}x^3 + \&c. =$$

$$\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \&c.$$

vel, demendo hinc inde  $\alpha^m$ , & residuum ducendo in  $\alpha^n$ ,

$$m\alpha^{m+n-1}x + \frac{m.m-1}{2}\alpha^{m+n-2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\alpha^{m+n-3}x^3 + \&c. =$$

$$\alpha^n(\beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \&c.).$$

Pariter, erit

$$P = \alpha^{m+n} + (m+n)\alpha^{m+n-1}y + \frac{m+n.m+n-1}{2}\alpha^{m+n-2}y^2 +$$

$$\frac{m+n.m+n-1.m+n-2}{2.3}\alpha^{m+n-3}y^3 + \&c. =$$

$$\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \varepsilon^{m+n} + \&c.$$

Quare, auferendo utrinque  $\alpha^{m+n}$ , manebit

$m+n$

$$(m+n)\alpha^{m+n-1}y + \frac{m+n \cdot m+n-1}{2} \alpha^{m+n-2}y^2 +$$

$$\frac{m+n \cdot m+n-1 \cdot m+n-2}{2 \cdot 3} \alpha^{m+n-3}y^3 + \&c.$$

$$= \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \epsilon^{m+n} + \&c.$$

14. Est autem

$$\alpha^n \beta^m \text{ ad } \beta^{m+n} \text{ ut } \alpha^n \text{ ad } \beta^n, \& \alpha^n \gamma^m \text{ ad } \gamma^{m+n} \text{ ut } \alpha^n \text{ ad } \gamma^n,$$

&c sic de reliquis;

atque  $\alpha^n$  major est quam  $\beta^n$ ; quam  $\gamma^n$ ; quam &c; quoniam  $\alpha$  major est quam singulae reliquae. Ergo

$$\alpha^n (\beta^m + \gamma^m + \delta^m + \epsilon^m + \&c.) \text{ major est quam } \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \&c.$$

id est

$$m\alpha^{m+n-1}x + \frac{m \cdot m-1}{2} \alpha^{m+n-2}x^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} \alpha^{m+n-3}x^3 + \&c.$$

major est quam

$$(m+n)\alpha^{m+n-1}y + \frac{m+n \cdot m+n-1}{2} \alpha^{m+n-2}y^2 +$$

$$\frac{m+n \cdot m+n-1 \cdot m+n-2}{2 \cdot 3} \alpha^{m+n-3}y^3 + \&c.$$

15. Sed in singulis terminis respondentibus sunt aequales

$$\alpha^{m+n-1}; \alpha^{m+n-2}; \alpha^{m+n-3}; \alpha^{m+n-4}; \&c.$$

coefficientes vero primae quantitatis

$$m; \frac{m \cdot m-1}{2}; \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3}; \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \&c.$$

ordine minores sunt quam coefficientes secundae

$$m+n; \frac{m+n \cdot m+n-1}{2}; \frac{m+n \cdot m+n-1 \cdot m+n-2}{2 \cdot 3}; \&c.$$

Quare est  $x$  major quam  $y$ ; nam si esset  $x = y$ ; atque ideo potestates ipsius  $x$  aequales respondentibus potestatibus ipsius  $y$ , (& fortius si  $x$  esset minor quam  $y$ ), singuli termini summæ prioris essent minores quam singuli termini respondententes summæ posterioris, & summa prima minor quam secunda, quod est contra N<sup>m</sup> 14. hujus.

16. Hæc vera essent si prior summa tot haberet terminos, quot secunda. Sed prior habet terminorum numerum  $m+1$ , minorem quam  $m+n+1$ , qui est numerus terminorum secundæ; & tamen prior summa est major quam secunda. Ergo fortius  $x$  major est quam  $y$ .

17. Cum igitur ad obtinendum  $L^{\frac{1}{m}}$ , ipsi  $a$  addita sint major quantitas  $x$ , & ad obtinendum  $P^{\frac{1}{m+n}}$ , eidem  $a$  addita sit minor quantitas  $y$ , patet propositum.

18. Quando  $m$  &  $m+n$  sunt numeri pares, positivæ sunt potestates radicum tum positivarum tum negativarum, & contra. Ergo hoc pacto obtinetur limes maximus *quantitatis*, non *qualitatis*, vel radix, cujus habetur limes, esse potest tum negativa, tum positiva.

19. In genere, factum LP est dimensionum numero  $2m+n$ . Sit  $n$  numerus par  $2r$ , & summa potestatum  $m+r$  e radicibus, sit N, vel ponatur

$$N = a^{m+r} + \beta^{m+r} + \gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \epsilon^{m+r} + \&c.$$

Dico factum LP & quadratum NN habere communes potestates  $2m+2r$  e singulis radicibus; has esse positivas, seu radices omnes sint positivæ, seu omnes negativæ, seu tandem aliquæ sint positivæ aliquæ negativæ, nempe semper tum in LP, tum in NN, esse

$$a^{2m+2r} + \beta^{2m+2r} + \gamma^{2m+2r} + \delta^{2m+2r} + \epsilon^{2m+2r} + \&c.$$

Sed in facto LP esse facta e duabus litteris diversis, quot esse possunt; hæc ita jungi posse bina, ut Factor qui in uno termino simplici habet exponentem  $m$ , in altero habeat exponentem  $m+2r$ ; idest esse

$$a^m \beta^{m+2r} + a^{m+2r} \beta^m; a^m \gamma^{m+2r} + a^{m+2r} \gamma^m; \&c.$$

$$\beta^m \gamma^{m+2r} + \beta^{m+2r} \gamma^m; \beta^m \delta^{m+2r} + \beta^{m+2r} \delta^m; \&c.$$

At in NN, pro his summis duorum factorum, esse totidem facta dupla e duabus litteris diversis eodem exponente  $m+r$  præditis, vel

$$2\alpha^{m+r}\beta^{m+r}; 2\alpha^{m+r}\gamma^{m+r}; 2\alpha^{m+r}\delta^{m+r}; \&c.$$

$$2\beta^{m+r}\gamma^{m+r}; 2\beta^{m+r}\delta^{m+r}; 2\beta^{m+r}\epsilon^{m+r}; \&c.$$

Singula bina facta ex LP habere eadem signa ac dupla facta respondentia ex N, si eadem litteræ ponantur præditæ iisdem signis in L; N; P; & singulas priores summas duorum factorum esse majores quam dupla facta respondentia posteriora; vel esse

$$\alpha^m\beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r}\beta^m \text{ majorem quam } 2\alpha^{m+r}\beta^{m+r}$$

$$\alpha^m\gamma^{m+2r} + \alpha^{m+2r}\gamma^m \text{ majorem quam } 2\alpha^{m+r}\gamma^{m+r}$$

$$\beta^m\gamma^{m+2r} + \beta^{m+2r}\gamma^m \text{ majorem quam } 2\beta^{m+r}\gamma^{m+r}$$

&c.

20. Sit enim  $p$  radicum numerus; erit pariter  $p$  numerus terminorum simplicium constituentium summas L; N; P. Erunt ergo in LP facta

$$\alpha^m \cdot \alpha^{m+2r} = \alpha^{2m+2r}; \beta^m \cdot \beta^{m+2r} = \beta^{2m+2r}; \gamma^m \cdot \gamma^{m+2r} = \gamma^{2m+2r}; \&c.$$

ad numerum  $p$ . Et in NN erunt earundem litterarum exponente  $m+r$  præditarum secundæ potestates.

$$(\alpha^{m+r})^2 = \alpha^{2m+2r}; (\beta^{m+r})^2 = \beta^{2m+2r}; (\gamma^{m+r})^2 = \gamma^{2m+2r}; \&c.$$

pariter ad numerum  $p$ . Ergo factum LP, & quadratum NN communes habebunt terminos

$$\alpha^{2m+2r}; \beta^{2m+2r}; \gamma^{2m+2r}; \delta^{2m+2r}; \&c.$$

atque hi in utroque erunt positivi, cum  $\pm \alpha^m \cdot \pm \alpha^{m+2r} = + \alpha^{2m+2r} = \pm (\alpha^{m+r})^2$  &c. Quod erat primum.

21. Constat esse in LP facta e duabus litteris diversis, quot esse possunt

$$\begin{aligned} &\alpha^m(\beta^{m+2r} + \gamma^{m+2r} + \delta^{m+2r} + \epsilon^{m+2r} + \&c) + \\ &\beta^m(\alpha^{m+2r} + \gamma^{m+2r} + \delta^{m+2r} + \epsilon^{m+2r} + \&c) + \\ &\gamma^m(\alpha^{m+2r} + \beta^{m+2r} + \delta^{m+2r} + \epsilon^{m+2r} + \&c) + \\ &\delta^m(\alpha^{m+2r} + \beta^{m+2r} + \gamma^{m+2r} + \epsilon^{m+2r} + \&c) + \\ &\epsilon^m(\alpha^{m+2r} + \beta^{m+2r} + \gamma^{m+2r} + \delta^{m+2r} + \&c) + \&c. \end{aligned}$$

M 3

Quod

Quod erat secundum.

22. Hic sunt facta incomplexa ad numerum  $p \cdot p - 1$ , quæ bina possunt additione jungi ita ut littera, quæ in uno habet exponentem  $m$ , in altero habeat exponentem  $m + 2r$ , hoc pacto

e primo facto complexo  $\alpha^m \beta^{m+2r} + \beta^m \alpha^{m+2r}$  e secundo

e primo  $\alpha^m \gamma^{m+2r} + \gamma^m \alpha^{m+2r}$  e tertio

& sic de reliquis ita ut littera  $\alpha$  jungatur cum omnibus aliis litteris secundum hanc legem. Item

e secundo complexo  $\beta^m \gamma^{m+2r} + \gamma^m \beta^{m+2r}$  e tertio

e secundo  $\beta^m \delta^{m+2r} + \delta^m \beta^{m+2r}$  e quarto. &c.

Atque idem constat de omnibus aliis litteris.

Quod erat tertium

23. Erunt igitur summae binorum factorum hujusmodi ad numerum  $\frac{p \cdot p - 1}{2}$ .

24. Sed in  $NN$ , præter quadrata, erunt dupla facta e singulis litteris in omnes sequentes, & singularum litterarum exponens est  $m + r$ , quemadmodum

$$2\alpha^{m+r}(\beta^{m+r} + \gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \epsilon^{m+r} + \&c) +$$

$$2\beta^{m+r}(\gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \epsilon^{m+r} + \&c) +$$

$$2\gamma^{m+r}(\delta^{m+r} + \epsilon^{m+r} + \&c) +$$

$$2\delta^{m+r}(\epsilon^{m+r} + \&c) + \&c.$$

In complexis horum Factoribus

$$\beta^{m+r} + \gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \epsilon^{m+r} + \&c. \quad \text{primi;}$$

$$\gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \epsilon^{m+r} + \&c. \quad \text{secundi;}$$

&c.

numerus terminorum simplicium unitate decrevit continuo, ita ut in ultimo

timo fit unus terminus simplex, cum in primo fuerit  $p = 1$ . Sunt ergo omnino dupla facta simplicia in NN, qualia,

$$2\alpha^{m+r} \beta^{m+r}; 2\alpha^{m+r} \gamma^{m+r}; \&c. 2\beta^{m+r} \gamma^{m+r}; 2\beta^{m+r} \delta^{m+r}; \&c. \\ \&c.$$

numero  $\frac{p \cdot p - 1}{2}$ , quot nempe erant summæ duorum factorum in LP (No. 23. hujus). Quod erat quantum.

25. Possunt ergo hæc dupla facta singula comparari cum totidem illis summis, & quidem ita ut duæ litteræ sint ubique eadem, hoc pacto,

$$\alpha^m \beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \beta^m \quad \& \quad 2\alpha^{m+r} \beta^{m+r} \\ \alpha^m \gamma^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \gamma^m \quad \& \quad 2\alpha^{m+r} \gamma^{m+r} \quad \&c.$$

Item

$$\beta^m \gamma^{m+2r} + \beta^{m+2r} \gamma^m \quad \& \quad 2\beta^{m+r} \gamma^{m+r} \\ \beta^m \delta^{m+2r} + \beta^{m+2r} \delta^m \quad \& \quad 2\beta^{m+r} \delta^{m+r} \quad \&c. \\ \&c.$$

26. Quando igitur eadem litteræ, ex. gr.  $\alpha$  &  $\beta$ , habent eadem signa in factis

$$\alpha^m \beta^{m+r}; \alpha^{m+r} \beta^m; \alpha^{m+r} \beta^{m+r},$$

hæc facta habebunt eadem signa; secus vero contraria.

27. Ponuntur autem eadem litteræ præditæ iisdem signis in L; N; ac P; quare si in P fuerit  $\alpha^{m+r}$  positiva, &  $\beta^{m+r}$  negativa, positivæ erunt  $\alpha^m$  in L &  $\alpha^{m+2r}$  in P; ac negativæ  $\beta^{m+r}$  in P ac  $\beta^m$  in L. Ergo facta

$$+ \alpha^m \cdot - \beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \cdot - \beta^m \quad \text{in LP}$$

ac

$$+ 2\alpha^{m+r} \cdot - \beta^{m+r} \quad \text{in NN}$$

erunt negativa. Idem constat de reliquis, & melius si potestates omnes fuerint positivæ, aut omnes negativæ.

Hæc autem erant quinto demonstranda.

28. Cum autem sit

$$\alpha^m \beta^{m+2r} \text{ ad } \alpha^{m+2r} \beta^{m+r} \text{ ut } \beta^r \text{ ad } \alpha^r \text{ ut } \alpha^{m+r} \beta^{m+r} \text{ ad } \alpha^{m+2r} \beta^m$$

& sic de reliquis; quandoquidem in his comparationibus exponentes ejusdem litteræ

$$m; m+r; m+2r$$

sunt semper æquidifferentes. Ergo (Eucl. prop. 25. lib. V.)

$$\alpha^m \beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \beta^m \text{ major est quam } 2\alpha^{m+r} \beta^{m+r}$$

& sic de reliquis omnibus. Ergo

29. Quando omnes termini positivi sunt tum in LP, tum in NN, eadem potestatum summæ (N°. 20. hujus pag. 93.) major quantitas addita est ad complendum factum LP, quam ad complendum NN.

30. Tunc igitur  $\sqrt[4]{LP}$  major est quam N. Et quando  $m$  ac  $m+2r$  sunt numeri pares, est  $\sqrt[4]{LP}$  major quam summa potestatum  $m+r$  e radicibus positive sumptarum.

31. Sit nunc  $m = 2$ , &  $r = 1$ , erit  $m+r = 3$ , ac  $m+2r = 4$ . Quare  $\sqrt[4]{LP}$ , media proportionalis inter summam quadratorum, & summam quadrato-quadratorum radicum, major erit quam summa cuborum radicum, cum signis affirmativis connexorum; quod primo loco docet Auctor N°. III. hujus capituli.

32. Si radices omnes æquationis essent æquales, qualibet summa duorum factorum in LP æqualis esset duplo facto respondente in NN. Effet enim tunc

$$\alpha^m \beta^{m+2r} = \alpha^m \cdot \beta^{m+2r} = \alpha^{2m+2r} = \alpha^{m+2r} \beta^m = \alpha^{m+2r} \cdot \alpha^m$$

&

$$\alpha^m \beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \beta^m = 2\alpha^{2m+2r} = 2\alpha^{m+r} \beta^{m+r} = 2\alpha^{m+r} \cdot \alpha^{m+r}$$

& sic de reliquis. Tunc ergo  $\sqrt[4]{LP}$  esset summa potestatum  $m+r$  e radicibus cum signis suis connexarum. Igitur, quo minus inter se differunt æquationis radices, eo minus  $\sqrt[4]{LP}$  differt a summa potestatum  $m+r$  e radicibus cum signis affirmativis connexarum.

Ita, quando radices sunt 1; 2; 3; — 4, summa cuborum sub signis affirmativis connexorum est 100, &  $\sqrt[4]{LP}$  est minor quam 104; qui duo numeri (quod maximum) quaternario differunt. Quando radices sunt 1; 2; 3; — 5; summa cuborum cum signis affirmativis connexorum est 161, &  $\sqrt[4]{LP}$  major quam 167, qui duo numeri, saltem, senario differunt. Tandem quando radices sunt 1; 3; 7; — 11; summa cuborum cum signis affirmativis connexorum est 1702, &  $\sqrt[4]{LP}$  major quam 1755; & hi duo numeri differunt, saltem, 53.



33. Ex eo quod

$$\pm \alpha^m \beta^{m+2r} \pm \alpha^{m+2r} \beta^m \text{ atque } \pm \alpha^{m+r} \beta^{m+r}$$

sint æquales quando  $\alpha = \beta$ , secus inæquales, & quidem ita ut prior summa superet alteram, confecimus eo magis has quantitates differre, quo magis differunt  $\alpha$  &  $\beta$ . Hoc etiam si per se constat, tamen facile demonstratur. Est enim

$$\pm \alpha^m \beta^{m+2r} \pm \alpha^{m+2r} \beta = \pm \alpha^m \beta^m (\beta^{2r} + \alpha^{2r})$$

&

$$\pm 2\alpha^{m+r} \beta^{m+r} = \pm \alpha^m \beta^m \cdot 2\alpha^r \beta^r.$$

sunt ergo hæ duæ quantitates in ratione Factorum inæqualium.

Ponatur  $\alpha^r = x$ ;  $\beta^r = y$ . Erit

$$\alpha^{2r} + \beta^{2r} = x^2 + y^2 \text{ atque } 2\alpha^r \beta^r = 2xy.$$

Sit nunc major quantitas  $x = y + z$ , erit

$$x^2 + y^2 = 2y^2 + 2yz + z^2 \text{ \& } 2xy = 2y^2 + 2yz.$$

Hæ duæ quantitates differunt quantitate  $z^2$ , & quo major fuerit  $z$ , eo major erit propositarum differentia  $\alpha^m \beta^m z^2$ .

34. Quando sunt in æquatione radices positivæ ac negativæ, &  $m+r$  est numerus impar, N constat e potestatibus positivis & negativis, quarum communis exponens est  $m+r$ . Sit ergo

$$\bullet \text{ Summa potestatum positivarum} = a$$

$$\bullet \text{ Summa potestatum negativarum} = b$$

Erit

$$N = a - b \text{ \& } \sqrt{LP} \text{ major quam } a + b$$

(N°. 30. hujus). Igitur

35. Addendo æqualia inæqualibus

$$N + \sqrt{LP} \text{ major quam } 2a;$$

atque ideo

Tom. II.

N

N

$$\frac{N + \sqrt{LP}}{2} \text{ major quam } a.$$

36. Hinc, quando  $m = 2$  &  $r = 1$ , hujus medię proportionalis & summę cuborum sub propriis signis semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmatarum, quod secundo loco docet noster eodem N°. III. hujus capituli.

37. Pariter, si in N°. 34. hujus, demantur æqualia ex inæqualibus, fiet

$$\sqrt{LP} - N \text{ major quam } 2b; \text{ \& } \frac{\sqrt{LP} - N}{2} \text{ major quam } b.$$

38. Ideo, quando  $m = 2$  &  $r = 1$ , earundem semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum, quod tertio loco asserit Auctor ibidem.

39. Ex N°. 35. & 38. constat quod maxima radicum affirmatarum minor est quam radix cubica illius semisummę; & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentię; ut noster N°. IV. hujus.

40. Si, manente  $r = 1$ ; ponatur, ordine,

$$m = 4; m = 6; m = 8; m = 10. \text{ \&c.}$$

& sit, ordine,

Summa potestatum positivarum, quintarum, septimarum, nonarum, undecimarum &c. =  $a$ .

Summa potestatum negativarum pariter quintarum, septimarum, nonarum, undecimarum &c. =  $b$ .

Erit semper ipsius  $a$  radix quinta, septima, nona, undecima, major quam maxima radicum affirmatarum; & ipsius  $b$  radix eadem major quam maxima radicum negativarum (N°. 39. hujus).

Sed, quo magis crescit exponens potestatum, e quarum summa extrahitur radix denominata ab exponente potestatum, eo minor fit radix illa (N°. 12. pag. 89. hujus). Ergo propius accedet ad maximam radicum tum affirmatarum tum negativarum, quo major assumetur exponens; id est sequendo præceptum Auctoris N°. V. hujus capituli.

41. Quando una est radix positiva, vel, secundum N°. 34. hujus,

$$a = a^{m+r}; \text{ est } \frac{\sqrt{LP} + N}{2} \text{ major quam } a^{m+r} \text{ (N°. 35. hujus).}$$

$$\text{ \& ipsius } \frac{\sqrt{LP} + N}{2} \text{ radix } m+r, \text{ major quam } a.$$

42. Quando autem plures sunt radices affirmatę, aut

$$a = \alpha^{m+r} + \beta^{m+r} + \text{\&c.}, \text{ \& } \frac{\sqrt{LP} + N}{2} \text{ major quam } \alpha^{m+r} + \beta^{m+r} + \text{\&c.};$$

at-

atque ipſius  $\frac{\sqrt{LP} + N}{2}$  radix  $m + r$ , major quam

$$(\alpha^{m+r} + \beta^{m+r} + \&c.)^{\frac{1}{m+r}}, \text{ quæ rursus major}^{\circ} \text{ quam } \alpha.$$

(N<sup>o</sup>. 7. pag. 87. hujus), ſed multo minor quam  $\alpha + \beta + \&c.$ , ut conſtat e theoremate binomiali. Igitur quando una eſt radix poſitiva, magis ad eam acceditur hac methodo, quam quando ſunt plures poſitivæ.

43. Idem intelligitur de radicibus negativis; ita ut demonſtratione conſtet hac methodo propius accedi ad radicem, *quando unica eſt radix negativa, vel unica affirmativa*, quam quando plures ſunt tum negativæ tum affirmativæ; *quam vero prope accedatur, exemplo videre eſt*, ut ait Auſtor in fine Ni. IV. hujus Capituli.

44. Hac methodo ſemper habetur limes major quam maxima radix æquationis. Eſt & methodus inveniendi limitem maxima radice minorem. En eam, qualem tradit MAC-LAURINUS in *Algebra ſua* anglice ſcriptæ Parte ſecunda, Cap. 5. in fine. Sit æquatio

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots \&c. = 0;$$

quare

$$\frac{BB - 2AC + 2D}{n};$$

hujus radix quarta erit paulo minor quam maxima radix æquationis.

Ex. gr. ſit æquatio

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$$

cujus radices ſunt 1; 2; 3; — 5; harum maxima eſt 3. Jam  $BB = 361$ ;  
 $2AC = 98$ ;  $2D = 60$

quare

$$\frac{BB - 2AC + 2D}{4} = \frac{323}{4} = 80 \frac{3}{4}, \text{ cujus radix quarta vix minor eſt}$$

quam 3, quandoquidem ipſius 3 quarta poteſtas eſt 81.

45. Sic autem demonſtrari poteſt hoc theorema, quod hætenus inobſervatum aſſert Auſtor, ſed ſine demonſtratione. Coefficientis B ſecundi termini compleſcitur facta omnia e binis radicibus. Quare BB continebit.

Primo quadrata omnium factorum e binis radicibus

$$a^2b^2; a^2c^2; a^2d^2 \&c; b^2c^2; b^2d^2 \&c; c^2d^2; c^2e^2 \&c.$$

N 2

Si,

Si, ex. gr., quatuor tantum ponantur radices

$$a; b; c; d;$$

ita poterunt ordinari hæc quadrata

$$a^2 (b^2 + c^2 + d^2) + b^2 (c^2 + d^2) + c^2 d^2$$

Secundo bina facta e quadratis singularum in binas reliquas

$$2a^2bc; 2a^2bd; 2a^2cd \text{ \&c; } 2b^2ad; 2b^2cd; \text{ \&c.}$$

Et, manendo in hypothesi quatuor radicum, bina facta e quadratis singularum in binas reliquas, erunt

$$2a^2 (bc+bd+cd) + 2b^2 (ac+ad+cd) + 2c^2 (ab+ad+bd) + 2d^2 (ab+ac+bc)$$

Tertio bina facta e singulis quaternis. Sed singula hæc facta e quaternis conficiuntur ex factis diversis, quæ singula habent duos Factores diversos, ductis in alia facta diversa, quæ singula pariter habent duos Factores diversos. Hic ergo, (per Num<sup>um</sup> 27. Comment. ad Cap. II. hujus pag. 16,) erit  $p = n = 2$ , & unum idemque factum semper repetitum invenietur  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ .ies.

Hoc in nostra hypothesi erit  $6abcd$ .

46. Sed C est summa factorum e ternis radicibus, & A est summa singularum. Quare AC complectetur,

Primo quadrata singularum radicum ducta in binas reliquas, ut BB secundo loco; sed semel sumta in AC, & bis in 2AC.

Secundo facta e singulis quaternis; ut BB tertio loco. Hic autem est  $p = 1$ ; &  $n = 3$ ; quare unum idemque factum repetitum invenietur semper  $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 4$ .ies in AC; & octies in 2AC.

47. Igitur BB — 2AC continebit excessum omnium factorum e quadratis binarum radicum, quæ nempe continet BB primo loco, supra his summam factorum e quaternis; id est, in exemplo assumto

$$a^2 (b^2 + c^2 + d^2) + b^2 (c^2 + d^2) + c^2 d^2 - 2abcd$$

Sed hæc summa restituitur addendo 2D, id est in exemplo  $2abcd$ . Igitur omnino est BB — 2AC + 2D summa omnium factorum e quadratis binarum radicum.

48. Atqui hæc summa continet factum ex quadrato maximæ radice in summam quadratorum e reliquis; factum ex quadrato secundæ radice in summam quadratorum e reliquis, & sic semper; ut per se constat, & in exemplo dispicitur.

Di-

Dicatur hæc summa  $= \beta$ , & summa quartarum potestatum e singulis radicibus  $= \alpha$ ;

In nostro exemplo est

$$\alpha = a^4 + b^4 + c^4 + d^4.$$

Harum quartarum potestatum, ut & radicum, numerus est  $n$ . Eigo (Vide Addit. pag. 62. Lemm. IV.)

$\beta$  minor est quam  $\frac{n-1}{2} \alpha$ , est autem  $\frac{n-1}{2} \alpha$  minor quam  $na^4$ ; ponitur enim  $a$  radix maxima. Quare fortius

$$\frac{\beta}{n} = \frac{BB - 2AC + 2D}{n} \text{ minor est quam } a^4.$$

49. Habetur ergo duplex limes, *major* per regulam NEWTONI, *minor* per regulam MAC-LAURINI, inter quos consistit radix maxima.

50. Circa hoc theorema MAC-LAURINI observandum illud exhibere quantitatem vera radice minorem. Quapropter perficeretur theorema, si inveniretur methodus determinandi aliam quantitatem, illa majorem quam præbet theorema, tamen vera radice minorem.

51. Sed, si pro coefficiente tertii termini, quadrandus sumeretur coefficientis aliquis sequens, ex. gr. C quarti termini, & adhereretur correctiones necessariae, ut manerent secundæ potestates inter se multiplicatæ,

$$a^2b^2 (c^2 + d^2 + e^2 + \&c) + a^2c^2 (d^2 + e^2 + \&c) + \&c. + \\ b^2c^2 (d^2 + e^2) + b^2d^2 (e^2 + \&c) + \&c.$$

quoniam est  $a^2b^2$  minor quam  $a^4$ , quia ponitur  $a$  radix maxima, & idem verum est de ceteris, adhuc minor esset limes sic determinatus limite priore.

52. Si vero esset æquatio trium dimensionum; tunc  $D = 0$ , & limes determinaretur per

$$\frac{BB - 2AC}{2}$$

53. Sit nunc, ex hypothesi Ni. VI. hujus, radicem summa

$$+ \alpha + \beta - \gamma - \delta - \epsilon - \&c.$$

ita ut radices duæ  $\alpha$  &  $\beta$ , sint positivæ, reliquæ negativæ. Erit summa quadratorum

$$+ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \&c = K$$

N 3

sum-

summa cuborum

$$+ \alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3 - \delta^3 - \epsilon^3 - \&c = L$$

summa quartarum potestatum

$$+ \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \epsilon^4 + \&c. = M$$

Hæ autem summæ potestatum inveniuntur per N<sup>um</sup>. VIII. Cap. III. pag. 55. hujus, & per N<sup>um</sup>. 50. &c. pag. 70. &c. hujus. Hinc  $\sqrt{KM}$  paulo major quam  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \epsilon^3 + \&c.$  (per N<sup>um</sup>. 30. pag. 96. hujus).

atque ideo

$\frac{\sqrt{KM} + L}{2}$  paulo major quam  $\alpha^3 + \beta^3$  (N<sup>o</sup>. 42. pag. 98. hujus). atque inventa est, *quam proxime*, summa cuborum e duabus radicibus positivis.

§4. Pariter, erit summa quintarum potestatum

$$+ \alpha^5 + \beta^5 - \gamma^5 - \delta^5 - \epsilon^5 - \&c = N$$

summa sextarum

$$+ \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \epsilon^6 + \&c = O$$

& summa septimarum

$$+ \alpha^7 + \beta^7 - \gamma^7 - \delta^7 - \epsilon^7 - \&c = P$$

Quapropter  $\sqrt{NP}$  non multum differet ab

$$+ \alpha^6 + \beta^6 - \gamma^6 - \delta^6 - \epsilon^6 - \&c$$

Quare  $\frac{\sqrt{NP} + O}{2}$  parum differet ab  $\alpha^6 + \beta^6$

&

$\frac{\sqrt{NP} - O}{2}$  parum differet ab  $-\gamma^6 - \delta^6 - \epsilon^6 - \&c.$

Nos, brevitatis gratia, ponemus æquales, negligendo differentiam. Hoc posito, est

$$(\alpha^3 + \beta^3)^2 = \alpha^6 + 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6 = \left(\frac{\sqrt{RM} + L}{2}\right)^2$$

&

VNP

$$\sqrt{NP} + O - \left( \frac{\sqrt{RM} + L}{2} \right)^2 = 2\alpha^6 + 2\beta^6 - \alpha^6 - 2\alpha^3\beta^3 - \beta^6 = \alpha^6 - 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6$$

cujus radix quadratica est  $\alpha - \beta$ , differentia cuborum duarum radicum positivarum  $\alpha$ , &  $\beta$ .

Jam est

$$(\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^3 - \beta^3) = 2\alpha^3; \text{ hinc invenitur } \alpha,$$

sed

$$(\alpha^3 + \beta^3) - (\alpha^3 - \beta^3) = 2\beta^3; \text{ unde invenitur } \beta.$$

55. Constat autem ex N<sup>o</sup>. 12. pag. 89. hujus,

quod si pro potestatibus, quarum exponentes sunt

$$2; 3; 4; 5; 6; 7.$$

fumerentur potestates, quarum exponentes essent

$$4; 5; 6; 7; 8; 9; \text{ vel } 6; 7; 8; 9; 10; 11 \text{ \&c.}$$

propius accederetur ad veram radicem. Hæc tradit Auctor N<sup>o</sup>. VI. Hujus. Nunc ad Num VII.

56. Totius rei fundamenta jacta jam sunt ab Auctore in N<sup>o</sup>. II. Cap III. pag. 40. hujus, & a nobis in N<sup>o</sup>. 15...32. pag. 61...64. hujus. Nan ibi ostendimus quod, substituendo in proposita,  $y + e$  pro  $x$ , si transformata habet omnes terminos positivos, est  $e$  major quam maxima radix positiva propositæ (N<sup>o</sup>. 25. pag. 64. hujus). Tunc enim transformata habebit omnes terminos positivos; atque ideo radices omnes negativas (N<sup>o</sup>. 23. pag. 13. hujus). Posuimus autem  $y + e = x$ ; &  $y = x - e$ ; debet autem esse  $y$  quantitas negativa; quia  $y$  exponit transformatæ radices, & illæ sunt negativæ; est igitur  $x - e$  quantitas negativa, ac  $e$  major quam  $x$ ; id est quam quævis radix propositæ. Ut ergo inveniatur *limes major quavis radice affirmativa*, ita erit in transformata quantitas  $e$  determinanda, ut omnes in transformata termini fiant *affirmativi*; id est *ejusdem signi cum altissimo termino equationis* (N<sup>o</sup>. VII. in fine), qui poni solet affirmativus.

57. Sed quantitas  $e$  determinanda, quovis signo potest exponi; ergo & per  $x$ ; dummodo intelligamus quod hæc littera, quæ in proposita exponit radices æquationis, in nostra hypothesi exponit quantitatem  $e$  ita determinandam, ut omnes termini in transformata fiant positivi.

58. Atqui, hoc posito, quod nempe  $x$  sit idem ac  $e$  in transformata, ipsa proposita locum tenet ultimi termini in transformata (N<sup>o</sup>. 16 pag. 61. 62. hujus). Proposita ordinis  $n$ , ut loco citato, postquam ejus termini singuli ducti fuerunt in exponentes.

$$n; n-1; n-2, n-3; n-4; n-5. \dots 0$$

&c

& divisi per  $e$ , vel per  $x$ , locum tenet penultimi termini in transformata &c. (N<sup>o</sup> 17... 20. pag. 62. 63 hujus). Igitur.

59. Si multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus (vel per exponentem, quem habet incognita  $x$  in ipso termino multiplicato), & dividatur factum per radicem æquationis, (id est per ipsam incognitam  $x$ ). Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius (qui erit, ut constet, exponens quem in quantitate inventa per primam operationem, habebit incognita in ipso termino multiplicato); & factum dividatur per radicem æquationis, ut supra. Et sic pergatur donec deveniatur ad binomium. Si hæc, inquam, fiant, inveniuntur transformatæ coefficientes ab ultimo, primus, secundus, tertius, &c..

60. His igitur peractis, supererit determinandus numerus, qui evectus ad aptam potestatem & positus pro  $x$ , & ejus potestatibus, in his coefficientibus, eos reddat omnes positivos.

61. Sed hic numerus ita determinandus est, ut sit minimus illorum, qui & integri sunt, & propositum præstant. Hoc autem efficitur facili tentamine.

62. Dixi numeros tentandos esse debere integros; nam proposita ponitur a fractionibus liberâ, & coefficiente prædita unitate, in altissimo termino. Atqui hujusmodi æquatio nullam habet radicem fractam. (N<sup>o</sup> 76. pag. 27. hujus.). Ubi lex, quod altissimus terminus habeat coefficientem unitatem, est intelligenda; alioquin, multiplicando per fractionem, haberetur æquatio rationalis, cujus radices sunt fractæ.

63. Constat binomium, quod hoc pacto invenitur ultimo loco, esse coefficientem termini secundi, a primo, transformatæ; id est  $ne \pm A$ . Sed  $A$  est summa radicum, si eæ sunt vel omnes positivæ vel omnes negativæ; est autem  $n$  exponens termini altissimi, atque ideo numerus radicum ipsarum. Erit ergo maxima radix major quam  $\frac{A}{n}$ ; & fortius si adsint radices tum negativæ tum positivæ, quarum differentia est  $A$ . Quare tentandus statim est numerus proxime major quam  $\frac{A}{n}$ .

Sic, æquatio

$$x^4 - 26x^3 + 151x^2 - 246x + 80 = 0$$

tractata secundum Auctoris regulam, præbet

$$4x^3 - 78x^2 + 302x - 246$$

vel dividendo per 2

$$2x^3 - 39x^2 + 151x - 123$$



&amp;c

$$6x^2 - 78x + 231$$

ac

$$12x - 78 = 4x - 26.$$

Hic autem est  $n = 4$ ; ac  $\frac{26}{4} = 6\frac{1}{2}$ ; tentamen ergo incipio a 7.

Hic numerus, substitutus pro  $x$ , dat, ut 8, secundo loco numeros negativos, & 9 tertio: tento 10; hinc

$$4x - 26 = 40 - 26 = 14$$

$$6x^2 - 78x + 231 = 600 - 780 + 231 = +51$$

positivum; ut

$$2x^3 - 32x^2 + 231x - 403 = 2000 - 3200 + 2310 - 403 = +7$$

sed ipsa æquatio dat  $-80$ ; est ergo maxima radix major quam 10. Reipsa hujus æquationis radices sunt

11; 8; 5; 2;

Patet autem quantitatem  $\frac{A}{n}$  utilem esse quando radices sunt vel omnes positivæ vel omnes negativæ, quod e signis æquationis intelligitur; & illam eo propius ad radicem accedere, quo minus ipsarum radices quantitate differunt.

64. Numerus sic inventus erit limes *major* maximæ radicis; numerus vero maximus eorum, qui dant aliquod ex factis per hanc regulam repertis, negativum, erit limes *minor* maximæ radicis.

65. Postquam hoc pacto inventus est limes  $m$ , qui superat maximam æquationis radicem, assumatur  $z = m - x$ , & substituendo in proposita  $m - z$  hujusque potestates, pro  $x$  & ejus potestatibus, habebitur transformatæ, cujus omnes radices erunt affirmativæ; siquidem est  $m$  major quam  $x$ , atque ideo  $m - x$ , vel  $z$ , quantitas positiva; quare positivæ sunt omnes radices transformatæ, quas exponit littera  $z$ .

Sic igitur æquatio quævis transformari potest in aliam, cujus radices omnes positivæ sint.

66. Eadem transformatio perficietur, si reperiatur limes  $n$ , qui superet maximam radicem negativam propositæ, & assumatur  $z = x + n$ , atque fiat solita substitutio. Cum enim sit  $n$  major quam quævis radix negativa propositæ, quas exponit  $x$ ; erit  $x + n$  quantitas positiva, atque ideo  $z$ , vel quævis transformatæ radix, erit positiva.

Hæc omnia congruunt cum N<sup>o</sup>. 22 ... 30. pag. 62. hujus.

67. Cum ergo nota sit facilis methodus propositam transformandi in aliam,

Tom. II.

O

aliam, ejus radices omnes sint positiva, atque ideo signa omnia alternantia (N<sup>o</sup> 15. & 20. pag. 61. 62. 63. hujus); has tantum æquationes considerabimus in sequentibus, si quando utile id erit ad faciliorem rerum explicationem.

68. Limes minimus pro hujusmodi æquationibus, est 0, qui profecto minor est quam quævis quantitas positiva. Limes autem maximus facile invenietur methodo jam tradita. Superest ut videamus quomodo possint definiri limites ipsarum radicum.

69. Sit æquatio ordinis  $n$ , habens omnes radices positivas,

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. \dots \pm S = 0$$

in qua erit  $S$  quantitas positiva si  $n$  est numerus par; sed negativa si impar.

70. Si in hac æquatione ponatur 0 pro  $x$ , omnes termini evanescent, & manebit ultimus cum signo quod habet in proposita.

71. Hujus æquationis radices sint

$$\omega; \psi; \chi; \phi \dots \xi; \nu; \mu; \lambda \dots \delta; \gamma; \beta; \alpha, \text{ ad numerum } n;$$

& sit quævis præcedens, a sinistra in dextram, minor quam sequens ad dextram, vel  $\omega$  minor quam  $\psi$ ; &  $\psi$  minor quam  $\chi$ ; & sic de reliquis.

Propositæ æquationis Factores ad eundem numerum  $n$ , erunt

$$x - \omega = 0; x - \psi = 0; x - \chi = 0; x - \phi = 0 \dots x - \xi = 0; \&c.$$

72. Assumatur nunc quantitas  $+e$ , major quam  $\nu$ , & minor quam  $\mu$ . Erit  $e$  fortius major quam  $\xi \dots \phi$ ;  $\chi$  & reliquæ ad sinistram, & minor quam  $\lambda \dots \delta$ ;  $\gamma$ ; & reliquæ sequentes ad dextram. Si  $e$  ponatur pro  $x$ , Factor  $x - \nu$  erit positivus ut & reliqui ad sinistram, & Factor  $x - \mu$  negativus ut reliqui ad dextram.

Ex. gr. sit  $\nu = \xi + a$ ;  $\mu = \xi + a + b + c$ ;  $\lambda = \xi + a + b + c + d$ ; &  $e = \xi + a + b$ ; atque pro  $x$  in Factoribus, ponatur  $e = \xi + a + b$ ; fiet Factor

$$x - \nu = x - \xi - a = \xi + a + b - \xi - a = +b$$

positivus; & fortius omnes Factores præcedentes ad sinistram, erunt positivi; nam ex eadem quantitate  $\xi + a + b$ , demitur quantitas continue minor quam  $\nu$ . Sed Factor

$$x - \mu = x - \xi - a - b - c = \xi + a + b - \xi - a - b - c = -c$$

erit negativus; & fortius negativi fient omnes Factores sequentes ad dextram, quia ex eadem quantitate  $\xi + a + b$ , demitur quantitas continue major quam  $\mu$ .

73. Sit nunc  $n = m + p$ , & sit  $m$  numerus Factorum positivorum, ac  $p$  numerus Factorum negativorum.

Factum e Factoribus positivis, quicumque sit numerus eorum, semper est positivum  $= +P$ .

Factum

Factum e Factoribus negativis, negativum est, si eorum numerus est impar, & tunc fit  $= -Q$ .

Idem est positivum, si Factorum numerus est par; & tunc  $= +Q$ .

Est autem

$$+P.-Q = -PQ; \text{ \& } +P.+Q = +PQ.$$

Et numeri vulgares alterne sunt pares & impares, vel contra. Ergo alterne facta oriunda ex his substitutionibus, erunt positiva & negativa, vel contra. Quapropter.

74. Si  $\epsilon$  sit minor quam minima radicum; erit  $m = 0$ ; &  $p = n$ ; vel omnes Factores erunt negativi. Tunc si  $n$  est numerus impar, tum factum PQ, tum ultimus propositæ terminus S, habebunt signum  $-$ .

Si vero sit  $n$  numerus par, tum factum PQ, tum ultimus propositæ terminus, habebunt signum  $+$ .

75. Sit  $\epsilon$  major quam radix minima  $\omega$ , & minor quam sequens  $\psi$ ; erit  $m = 1$ ; &  $p = n-1$ , vel unus erit Factor positivus. Tunc, si  $n$  est numerus impar, par erit  $n-1$ ; & factum PQ habebit signum  $+$ .

Si vero sit  $n$  numerus par, impar erit  $n-1$ ; & factum PQ habebit signum  $-$ .

76. Sit  $\epsilon$  major quam secunda radix  $\psi$ , (& fortius quam minima  $\omega$ ), sed minor quam sequens  $\chi$ ; erit  $m = 2$ ; &  $p = n-2$ ; vel duo erunt Factores positivi, ceteris manentibus negativis. Tunc, si  $n$  est numerus impar, impar quoque erit  $n-2$ , & factum PQ habebit signum  $-$ .

Sed si  $n$  sit numerus par, par æque erit  $n-2$ , & factum PQ habebit signum  $+$ . (Lem. XIII. pag. 85. Addit.)

Hæc, puto, sufficere possunt ad illustrandam propositionem nostram.

77. Hinc facile ad æquationes omnes extenduntur quæ diximus N<sup>o</sup> 69. ...73. hujus. Sit enim  $n = l + k = m + p$ ; & proposita habeat  $l$  radices negativas ac  $k$  radices positivas; vel proposita constet ex numero  $l$  Factorum formæ

$$x+A=0; x+B=0; x+C=0; \text{ \&c.}$$

& ex numero  $k$  Factorum formæ

$$x-R=0; x-P=0; x-Q=0; \text{ \&c.}$$

78. Factores prioris formæ, per continuam multiplicationem, consicient æquationem ordinis  $l$ , cujus omnes termini erunt positivi; igitur & ultimus S, positivus erit.

79. Factores posterioris formæ, pariter per multiplicationem continuam, consicient æquationem ordinis  $k$ , cujus termini erunt alterne positivi & negativi. Igitur ultimus ejus terminus s erit negativus si  $k$  est numerus impar, secus vero positivus, ut supra N<sup>o</sup> 69.

80. Multiplicando æquationem N<sup>o</sup> 78. ordinis  $l$  per æquationem N<sup>o</sup> 79.

ordinis  $k$  conficietur æquatio ordinis  $l+k=n$ , in qua erunt radices tum positivæ tum negativæ, & cujus ultimus terminus  $+S. \pm s = \pm S$ , erit positivus, si numerus radicum negativarum est par, secus vero negativus, pariter ut supra N<sup>o</sup>. 69.

81. In hac, si ponatur  $o$  pro  $x$ , manebit dumtaxat ultimus terminus, cum signo quod habebat in proposita, ut N<sup>o</sup>. 70.

82. Si in eadem pro  $x$  ponatur  $+e$ , seu major seu minor quam quævis radix negativa, ex illis orti Factores positivi

$$x+A=0; x+B=0; \&c. \text{ fient } e+A=0; e+B=0 \&c,$$

& manebunt positivi. Hinc ergo nulla fiet mutatio in signis æquationis propositæ, neque in facto quod oritur ex hac substitutione.

83. Sed mutatio fiet, secundum observata N<sup>o</sup>. 72. & 73. quando pro  $x$  in æquatione proposita ponitur  $+e$  major quam aliqua radix positiva  $v$ , (atque ideo quam reliquæ hac minores), & minor quam proxime major  $\mu$ , & quam reliquæ hac majores.

84. Cum ergo quævis æquatio ordinis  $n$ , in qua sunt radices tum positivæ tum negativæ, considerari possit tanquam conflata ex duabus, quarum una complectitur omnes radices negativas propositæ, altera omnes radices positivas ejusdem; & cum omnis mutatio, quæ fit in proposita per substitutionem, oriatur ex æquatione habente omnes radices positivas, constat in genere, quod.

85. Si in æquatione, cujus radices aliquæ sunt positivæ, aliquæ negativæ, pro  $+x$  ponatur  $+e$ , modo major modo minor quam aliqua propositæ radix positiva, duo quæ conficiuntur ex hac duplici substitutione, habebunt signa opposita.

86. Manifesta est hujus conversâ. Si pro æquationis propositæ incognita  $E$  ejus potestatibus, substituuntur ordine duæ quantitates inequales, & duæ novæ quantitates, quæ conficiuntur ex his duabus substitutionibus, habeant signa opposita; hæ duæ quantitates, quæ substituuntur, erunt limites unius saltem radicis æquationis propositæ.

Nam, si utraque quantitas esset minor quam radix aliqua  $\mu$ , & major quam radix præcedens  $v$ , utrumque productum haberet idem signum ut patet ex demonstratis; quia nempe idem in utroque casu esset numerus Factorum, tum positivorum, tum negativorum.

In exemplum assumamus æquationem N<sup>o</sup>. 63. pag. 104. hujus

$$x^4 - 26x^3 + 231x^2 - 806x + 880 = 0$$

cujus radices omnes positivæ sunt 11; 8; 5; 2.

In hac statim substituendo  $o$  pro  $x$  manet  $+880$ .

substituendo  $+1$ , qui numerus minor est minima radice 2, fit

$$1 - 26 + 231 - 806 + 880 = +280.$$

Est

Est ergo 1 *limes minimus*. Substituendo + 3, qui est major quam 2 & minor quam 5, fit

$$81 - 702 + 2079 - 2418 + 880 = -80$$

Si pro  $x$  ponatur + 4, qui numerus pariter major est quam 2 & minor quam 5, productum pariter erit negativum, nempe

$$256 - 1664 + 3696 - 3244 + 880 = -76$$

Si vero pro  $x$  ponatur + 6, deinde + 7, qui numeri sunt majores quam 2 & 5, sed minores quam 8, prodibunt duo facta positiva, id est ex 6

$$1296 - 5616 + 8316 - 4836 + 880 = +40$$

& c 7

$$2401 - 8918 + 11319 - 5642 + 880 = +40.$$

& sic de reliquis.

Pariter sumatur æquatio Ni. 10. pag. 88. illa, cujus radices sunt reales, nempe

$$x^4 - 14x^3 + 55x^2 - 66x + 14 = 0$$

Ponendo 0 pro  $x$ , manet + 14.

Ponendo + 1, major quam minima radix 2 —  $\sqrt{3}$ , fit

$$1 - 14 + 55 - 66 + 14 = -10.$$

Ponendo + 2, fit + 6; ponendo + 3 fit + 14, & reipsa tum 1, tum 2 tum 3 majores sunt quam 2 —  $\sqrt{3}$ , sed minores quam 2 +  $\sqrt{3}$ .

Neque tantum ipsius 2 —  $\sqrt{3}$  limites sunt 1 & 2, sed etiam ipsius 5 —  $\sqrt{11}$ , nam quia  $\sqrt{11}$  minor est quam 4, profecto 5 —  $\sqrt{11}$  major est quam 5 — 4 = 1. Sed 1 & 3 limites sunt utriusque, nam  $\sqrt{11}$  major est quam 3, ac 5 —  $\sqrt{11}$  minor quam 5 — 3 = 2. Ideo diximus N° 86. hujus, hos esse limites unius *saltem* radices.

Ponamus nunc in eadem æquatione + 4; fiet — 10; & numeri 3 ac 4 sunt limites radices 2 +  $\sqrt{3}$ .

Ponendo + 5, fit — 66; reipsa 4 & 5 minores sunt quam maxima radix 5 +  $\sqrt{11}$ .

87. Superfluum duco monere, quod si radices omnes essent negativæ, aut mutanda essent signa alterna, secundum N<sup>um</sup> 1. p. 49. & N<sup>os</sup> 8...12 p. 58. 59. hujus, aut assumenda esset — 5.

88. Sit nunc æquatio generalis ordinis  $n$

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \dots + S = 0$$

in qua coefficientes, quamvis omnes scripti sint positivi, intelliguntur quifque cum suo signo, ita ut sint signa tum positiva tum negativa, atque ideo radices tum positivæ tum negativæ, ad arbitrium. Hæ autem radices, quævis cum suo signo, sint quæ N<sup>o</sup>. 71. p. 106. hujus, & crescant eodem ordine. Hæc transformetur, secundum N<sup>am</sup> 15. pag. 61. hujus, ponendo  $x = y + e$ .

89. Terminus ultimus transformatæ erit (N<sup>o</sup>. 16. pag. 61. hujus)

$$e^n + Ae^{n-1} + Be^{n-2} + Ce^{n-3} + De^{n-4} + \dots + S$$

in quo coefficientes habebunt quisque eadem signa, quæ habebant in proposita. Si in eo pro  $+e$  substituatur  $\pm \mu$ , una nempe e propositæ radicibus, & quidem  $+\mu$  si radix substituta fuerit positiva,  $-\mu$  si fecus, terminus ille evanescet. Nam hæc substitutio conficiet ex ultimo termino eandem quantitatem, quam conficeret e proposita (N<sup>o</sup>. 16. pag. 61. hujus.). Sed proposita per aptam radicis substitutionem evanescit (N<sup>o</sup>. 4..7. pag. 56...58. hujus). Ergo &c. (Vide N<sup>am</sup> 24. pag. 64. hujus). Reliqua pars æquationis dividi poterit per  $y = 0$ , & manebit æquatio ordinis  $n - 1$ , in qua  $y$  erit incognita, &  $\pm \mu$  ac ejus potestates erunt pro  $e$  & ejus potestatibus. Huic se aptant jam dicta: tamen non pigebit rem exponere.

90. Propositæ æquationis radices sint

positivæ  $\tau$ ;  $\sigma$ ;  $\epsilon$ ;  $\pi$ ;  $\alpha$ ; &c. negativæ  $\lambda$ ;  $\kappa$ ;  $\iota$ ;  $\theta$ ;  $\eta$ ; &c.

si substituatur quantitas positiva pro  $e$  in transformata, radices positivæ minuentur, & negativæ augebuntur; ac transformatæ Factores fient

$$y + \mu - \tau = 0; y + \mu - \sigma = 0; y + \mu - \epsilon = 0; \&c.$$

orti e radicibus positivis; &c

$$y + \mu + \lambda = 0; y + \mu + \kappa = 0; y + \mu + \iota = 0; \&c.$$

orti e radicibus negativis

(N<sup>o</sup>. 23. pag. 64. hujus.) Sic, si proponatur æquatio

$$x^5 - 2x^4 - 158x^3 + 568x^2 + 1021x - 1430, = 0$$

cujus radices positivæ sunt

1; 5; 11;

& negativæ

2; 13.

Ponatur autem  $x = y + 1$ , ea transformabitur in

$$\begin{aligned} y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1 \\ - 2y^4 - 8y^3 - 12y^2 - 8y - 2 \\ - 158y^3 - 474y^2 - 474y - 158 \\ + 568y^2 + 1136y + 568 \\ + 1021y + 1021 \\ - 1430 = 0 \end{aligned}$$

quæ, deleto ultimo termino evanescente, & divisa per  $y$  fit

$$y^4 + 3y^3 - 156y^2 + 92y + 1680 = 0$$

cujus Factores sunt

$$\begin{aligned} y + 1 - 5 = y - 4; \quad y + 1 - 11 = y - 10; \quad y + 1 + 2 = y + 3; \\ y + 1 + 13 = y + 14 \end{aligned}$$

91. Si vero alia quantitas, præter unam e propositæ radicibus, assumpta fuisset pro  $\mu$ ; mansisset ultimus terminus, & constaret e differentiis ac summis N°. 90. inter se multiplicatis; atque esset

$$(\mu - \tau)(\mu - \sigma)(\mu - \pi) \&c. (\mu + \lambda)(\mu + \kappa)(\mu + \theta) \&c.$$

92. Sed si in transformata pro  $e$  substituatur quantitas negativa, augentur radices positivæ, & minuantur negativæ; ac Factores sunt

$$y - \mu - \tau = 0; \quad y - \mu - \sigma = 0; \quad y - \mu - \pi = 0; \quad \&c.$$

orti e radicibus positivis, &

$$y - \mu + \lambda = 0; \quad y - \mu + \kappa = 0; \quad y - \mu + \theta = 0; \quad \&c.$$

orti e radicibus negativis.

(N°. 28. pag. 64. hujus). Quare, nisi sit  $\mu$  una e propositæ radicibus, manebit ultimus terminus, & constabit, ut N°. 91., summis & differentiis inter se multiplicatis.

93. Factum e summis N°. 90. est semper positivum. Factum e summis N°. 92. est positivum quando eæ summæ sunt numero pari, secus vero negativum.

94 Si in transformata ponatur pro  $e$  quantitas *positiva*, & *par differentiarum* numerus mutet signum, id est, aliquot differentiarum

$$\mu - \tau; \quad \mu - \sigma; \quad \mu - \pi; \quad \mu - \theta; \quad \&c.$$

ad numerum parem, fiant *negativæ*, ceteris manentibus positivis, factum e pari negativorum Factorum numero erit positivum; positivum pariter est factum

factum e Factoribus positivis. Ergo factum ex omnibus manebit positivum.

95. Si vero, dum substituitur quantitas positiva, impar sit numerus differentiarum quæ fiunt negativæ, factum ex his erit negativum, & negativum reddet factum ex omnibus.

96. Contra, si substituaturs quantitas negativa, & aliquot differentiarum, ad numerum vel parem vel imparem

$$-\mu + \lambda; -\mu + \kappa; -\mu + \iota; -\mu + \theta; \&c.$$

fiant positivæ, reliquæ manebant negativæ; factum e positivis semper erit positivum; factum e negativis, pariter positivum, si earum numerus est par; Factum e summis pariter est positivum, si summarum numerus est par. Quare, si par est tum numerus tum differentiarum negativarum, tum summarum, factum ex omnibus est positivum.

97. Sed si alteruter numerus, vel differentiarum negativarum, vel summarum, sit impar, factum ex omnibus erit negativum.

98. Si tandem uterque numerus, tum differentiarum, tum summarum negativarum, est impar, factum ex omnibus est positivum.

99. Quando numerus differentiarum & summarum æquat numerum radicem propositæ, & substituitur quantitas positiva, minor quam minima radix positiva æquationis, tot erunt differentiarum negativæ, quot radices positivæ; atque illarum factum habebit idem signum ac factum harum; atque ideo ultimus transformatæ terminus idem signum ac ultimus propositæ.

100. Idem accidit si substituitur quantitas negativa, minor quam minima radix negativa propositæ.

101. Sed, quando in transformata ponitur pro  $e$  una e radicibus positivis propositæ, numerus differentiarum unitate minuitur; & evanescente ultimo transformatæ termino (N°. 89. pag. 110. hujus), manet in penultimo factum e differentis, qui est par &  $\equiv 2l$ , si numerus radicem positivarum in proposita erat impar &  $\equiv 2l + 1$ ; & contra est impar &  $\equiv 2l - 1$ , si numerus radicem positivarum est par &  $\equiv 2l$ . Pariter si substituitur quantitas negativa, numerus differentiarum unitate decrescit, & sit par ac  $\equiv 2k$ , si numerus radicem negativarum in proposita, est impar &  $\equiv 2k + 1$ ; & contra.

102. Sint propositæ æquationis radices, ordine crescentes

$$a; \psi; \chi; \phi; v; \&c. \text{ positivæ; } \lambda; \kappa; \iota; \theta; \eta; \&c. \text{ negativæ.}$$

substituendo  $+a$  in transformata, erunt ejus Factores

$$y + a - a = 0 = y; y + a - \psi = 0; y + a - \chi = 0; y + a - \phi = 0 \&c.$$

omnes negativi, præter primum  $= 0$

Substituendo  $+\psi$ ; Factores erunt

$$y +$$



$$y + \psi - u = 0; y = 0; y + \psi - \chi = 0; y + \psi - \phi = 0; \&c.$$

omnes negativi, præter primum positivum, & secundum = 0.

Substituendo + $\chi$ ; Factores erunt

$$y + \chi - u = 0, y + \chi - \psi = 0; y + \chi - \chi = 0 = y; \&c.$$

quorum duo primi sunt positivi; tertius = 0; reliqui negativi & sic de reliquis.

Hic observandum hanc substitutionem reducere differentias jam inventas, sed sub signo contrario; & quidem ut quæ (negligendo  $y = 0$ ) fuit in prima substitutione, prima, secunda, tertia, &c.; sit prima substitutionis secundæ, tertiæ, quartæ, &c.; quæ in secunda substitutione est secunda, tertia, quarta, &c., sit secunda substitutionis tertiæ, quartæ, quintæ &c.

103. Igitur terminus, qui manet in transformata & per substitutionem reducta, ultimus, qui nempe est penultimus transformatæ non reductæ, idest tandem quantitas

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c.$$

fit alterne positiva & negativa per substitutionem ordinatam radicum propositæ in transformata, cujus terminus est hæc ipsa quantitas, pro  $e$  vel pro  $x$ ; licet enim quantitatem indeterminatam quocunque simbolo exponere; sed animadvertendum hic litteram  $x$  non exponere propositæ radices, ut in proposita.

Sic, si proponatur æquatio in exemplum jam assumpta ad Num. 90. hujus, pag. 110.

$$x^5 - 2x^4 - 158x^3 + 568x^2 + 1021x - 1430 = 0$$

ex hac per notas regulas educetur penultimus transformatæ terminus

$$5x^4 - 8x^3 - 474x^2 + 1136x + 1021$$

In hac pro  $x$  & ejus potestatibus ponatur, primo, minima propositæ radix positiva + 1, inveniemus residuum

$$+1680 = 4.10. - 3. - 14 = (5-1)(11-1)(-1-2)(-1-13)$$

Ponatur secundo + 5, & erit residuum

$$-3024 = -4. + 6. - 7. - 18 = (1-5)(11-5)(-2-5)(-13-5).$$

Ponatur tertio + 11; residuum erit

$$+1820 = -10. - 6. - 13. - 24 = (1-11)(5-11)(-2-11)(-13-11)$$

Tom. II.

P

Sub-

Substituendo *quarto* minimam e radicibus negativis — 2, fit

$$-3003 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot -11 = (1+2)(5+2)(11+2)(-13+2)$$

Tandem substituendo — 13, residuum invenitur

$$+66528 = 14 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 11 = (13+1)(13+5)(13+11)(13-2)$$

in his ea accidunt quæ attulimus N<sup>o</sup> 92...103. hujus. pag. 111...113.

104. Cum ergo radices æquationis propositæ, ordine, substitutæ in

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c.$$

dent facta alterne positiva & negativa, radices illæ sunt limites inter hujus quantitatis radices. (N<sup>o</sup>. 4. & 86. pag. 37. & 108. hujus). Nam, seu ponatur quantitas illa = 0, seu secus, semper substitutio supra descripta dabit residua alterne negativa & positiva.

105. Sint nunc radices æquationis

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

$t$ ;  $s$ ;  $r$ ;  $q$ ; &c. positivæ, &  $f$ ;  $d$ ;  $c$ ;  $b$  &c. negativæ

& hæ ordine crescant more solito.

Jam una ex ejus radicibus est 0, quia hæc æquatio ab origine erat ordinis  $n$ , & divisa fuit per  $x = 0$ . Est autem 0 minor quam propositæ radix minima  $\omega$ , & est  $\omega$  limes æquationis nuper inventæ; oportet ergo ut sit  $\omega$  minor quam  $t$ . Quare  $\downarrow$  erit major quam  $t$  & minor quam  $s$ ; &c.

106. Quod esse nequeat  $\omega$  major quam  $t$ , res sic probari potest. Radices positivæ æquationis ordinis  $n$  sint numero =  $l$ ; substituta minima in transformata, vel ponendo ultimum transformatæ terminum evanescere, quod idem est, (N<sup>o</sup>. 89. pag. 110. hujus); radices positivæ æquationis ordinis  $n-1$  erunt numero =  $n-1$ . Si esset  $\omega$  major quam  $t$  & minor quam  $s$ ;  $\downarrow$  major quam  $s$  & minor quam  $r$ ; &c., superessent duæ radices maximæ æquationis ordinis  $n$ , quæ singulæ majores essent quam maxima radix æquationis ordinis  $n-1$ . Ideo hæ substitutæ una post aliam in æquatione ordinis  $n-1$ , darent duo facta cum iisdem signis, quod est contra demonstrata N<sup>o</sup>. 103. hujus.

107. Cum sit  $\omega$  major quam 0 & minor quam  $t$ ;  $\downarrow$  major quam  $t$  & minor quam  $s$ ;  $\downarrow$  major quam  $s$  & minor quam  $r$ ; & sic de reliquis; erit contra 0 minor quam  $\omega$ ;  $t$  major quam  $\omega$ , & minor quam  $\downarrow$ ;  $s$  major quam  $\downarrow$  & minor quam  $\downarrow$ ; &c. Quare radices æquationis ordinis  $n-1$ , erunt limites radicum æquationis ordinis  $n$ . His addi debet 0; & limes maximus jam inventus.

108. *Æquationes ita comparatæ, ut unius radices sint limites radicum alterius, dicuntur æquationes limitum.*

Quapropter æquationes, quas Newtonus descripsit N<sup>o</sup>. VII. hujus pag. 84. & quarum exemplum attulit in fine pag. 85., sunt sibi mutuo æquationes limitum.

109. Quo magis receditur ab æquatione proposita, vel quo minor est exponens æquationis limitum, eo magis limites recedunt a propositæ radicibus. Sit enim proposita æquatio generalis, qua sæpius usi sumus; & ejus radices positivæ (nam quod dicitur de positivis facile traducitur ad negativas) illæ ipsæ, quæ supra N<sup>o</sup>. 102. pag. 112. hujus; designentur nempe litteris græcis incipiendo ab ultima, quæ exponit minimam propositæ radicem, & pergendo ordine. Pariter æquationis limitum primæ

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

radices exprimantur litteris latinis minoribus & italicis, incipiendo a *t*, quæ exponit minimam hujus radicem, & pergendo ad *s*; *r*; &c. *Æquationis limitum secundæ,*

$$\frac{n \cdot n - 1}{2} x^{n-2} + \frac{n-1 \cdot n-2}{2} Ax^{n-3} + \frac{n-2 \cdot n-3}{2} Bx^{n-4} + \&c. = 0$$

radices exponantur litteris minoribus romanis

$$t; s; r; p; q; \&c.$$

*Æquationis tertiæ radices litteris majoribus italicis*

$$T; S; R; P; Q; \&c.$$

*Æquationis quartæ litteris majoribus romanis*

$$T; S; R; P; Q; \&c.$$

Ostensum est esse *t* inter  $\omega$  &  $\psi$ ; *s* inter  $\psi$  &  $\chi$ ; *r* inter  $\chi$  &  $\phi$ ; *p* inter  $\phi$  &  $\nu$ ; &c. Pariter esse *t* inter  $t$  &  $s$ ; *s* inter  $s$  &  $r$ ; *r* inter  $r$  &  $p$ ; &c.; *T* inter  $T$  &  $S$ ; *S* inter  $S$  &  $R$ ; *R* inter  $R$  &  $P$ ; &c.; unde patet propositum.

110. Quæ demonstrata fuerunt de proposita multiplicata in singulis terminis per exponentem incognitæ in ipso termino, vera sunt etiam si assumatur quævis alia progressio arithmetica, & per hujus terminos multiplicentur ordine singuli termini propositæ. Sit enim ultimus progressionis arithmeticæ assumptæ terminus  $m$ , & differentia terminorum sit  $p$ . Ea debet habere terminorum numerum  $= n + 1$ , quot nempe sunt termini propositæ, quæ est ordinis  $n$ ; demto ultimo, qui est  $= m$ , manet numerus terminorum, atque ideo differentiarum,  $= n$ : atqui in singulis progressionis terminis numerus differentiarum unitate crevit; ergo in primo ter-

mino adjungi ipsi  $m$  debet  $np$ , & in sequentibus  $(n-1)p$ ;  $(n-2)p$ ; &c., & quidem per additionem, si terminus ultimus  $m$  est minimus; per subtractionem, si is est maximus. Erit ergo progressio

$$m \pm np; m \pm (n-1)p; m \pm (n-2)p; \dots m \pm 3p; m \pm 2p; m \pm p; m;$$

In qua potest terminus aliquis esse  $= 0$ , & tunc, si progressio decrescit a primo termino  $m + np$  ultimum versus, illi qui sequuntur (ad dextram) terminum evanescentem, erunt negativi; si vero progressio crescat a primo termino  $m - np$  ultimum versus, illi qui præcedunt (ad sinistram) terminum evanescentem, erunt negativi.

Nunc proposita

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots + Px^1 + Rx + S = 0$$

multiplicata per hanc progressionem, dat

$$\begin{aligned} mx^n + mAx^{n-1} + mBx^{n-2} + mCx^{n-3} + mDx^{n-4} \dots + mPx^1 + mRx + mS \\ \pm np x^n \pm (n-1)pAx^{n-1} \pm (n-2)pBx^{n-2} \pm (n-3)pCx^{n-3} \pm (n-4)pDx^{n-4} \dots \\ \pm 2pPx^1 \pm pRx \end{aligned}$$

Harum duarum serierum prima est ipsa æquatio ducta in  $m$ . Sed ea, per hypothesim,  $= 0$ ; ergo & ejus multiplex  $= 0$ ; nec mutat valorem alterius. Altera autem est

$$\pm px(x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c.)$$

cujus divisor est  $px$  & Factor compositus est ipsa æquatio, quæ oritur e proposita multiplicando terminos singulos per exponentem. Hæc, ex demonstratis, substituendo, ordine, propositæ radices a minima ad maximam, dat facta alterne positiva & negativa, quæ ducta in  $+p$ , manent alterne positiva & negativa, qualia erant; sed ducta in  $-p$  fiunt alterne negativa & positiva. Ergo &c.

Exemplo sit æquatio trium dimensionum

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 24 = 0$$

cujus radices, positivæ omnes, sunt 1; 3; 7.

hæc ducta in exponentes & divisa per  $x$ , dat

$$3x^2 - 22x + 31$$

quæ, substituendo ordine

$$+ 1; + 3; + 7; \text{ dat } + 12; - 8; + 24$$

eadem ducta per terminos seriei

$$0; 1; 2; 3, \text{ dat } - 11x^2 + 62x - 63$$

quæ per eandem substitutionem præbet

$$- 12; + 24; - 168$$

Eadem ducta in terminos seriei

$$5; 2; - 1; - 4 \text{ fit } 5x^3 - 22x^2 - 31x + 84$$

&c, per solitam substitutionem, invenitur

$$+ 36; - 72; + 504.$$

sunt ergo omnes hæ æquationes limitum propositæ.

111. Si proposita æquatio esset potestas  $n$  binomii  $x + \omega$ ; vel si esset

$$A = n\omega; B = \frac{n \cdot n - 1}{2} \omega^2; C = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} \omega^3;$$

$$D = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \omega^4; \text{ \&c.}$$

tunc prima series  $N^i$ . 113. præcedentis maneret

$$m (x + \omega)^n$$

sed secunda fieret

$$pnx (nx^{n-1} + (n-1) n\omega x^{n-2} + \frac{(n-2) \cdot n \cdot n - 1}{2} \omega^2 x^{n-3} +$$

$$\frac{(n-3) n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} \omega^3 x^{n-4} \dots + n\omega^{n-1})$$

id est

$$pnx (x^{n-1} + (n-1) \omega x^{n-2} + \frac{n-1 \cdot n - 2}{2} \omega^2 x^{n-3} \dots + n\omega^{n-1})$$

$$= pnx (x + \omega)^{n-1}$$

P 3

1 (2.

112. Si quis propositæ terminus abesset, asterisco supplendus esset, ut suus terminorum numerus æquationi constet.

113. Constat hæc esse vera, quatenus radices sunt reales in proposita, etiam si præter reales, aliquæ sint imaginariæ.

Sic, si æquatio trium dimensionum, nuper in exemplum allata, multiplicetur per

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

cujus radices duæ sunt imaginariæ  $2 + \sqrt{-2}$ , &  $2 - \sqrt{-2}$ ; fiet

$$x^5 - 15x^4 + 81x^3 - 211x^2 + 270x - 126 = 0$$

unde

$$5x^4 - 60x^3 + 243x^2 - 422x + 270$$

hæc, substituendo,

$$+1; +3; +7; \text{ dat } +36; -24; +648$$

pro tribus radicibus realibus.

114. Sed, quævis quantitas substituatur in æquatione, cujus radices omnes sunt imaginariæ, factum orietur semper positivum. Si enim æquatio hujusmodi

$$x^3 \pm 2mx + mm + nn = 0$$

si pro  $x$  substituatur quantitas quævis minor quam  $m$ ; ex. gr.  $m - p$ , fiet æquatio

$$m^3 - 2mp + p^3 \pm 2m^2 \mp 2mp + m^2 + n^2$$

id est, si sit  $+2mx$

$$4m^3 - 4mp + p^3 + n^2 = (2m - p)^2 + n^2, \text{ \& } m^2 + n^2, \text{ si sit } -2mx.$$

quæ semper est positiva, quia positivum est quadratum ipsius  $2m - p$ . Fortius manebit quantitas positiva, si pro  $x$  substituatur vel  $m$  vel quantitas major quam  $m$ .

115. Observandum esse demonstratum idem accidere etiam si quantitas substituta sit negativa, quia quadratum semper erit positivum.

116. Cum ergo res demonstrata sit pro æquationibus quadraticis; & semper binæ imaginariæ cœcant in æquationem quadraticam, factum ex his factis peculiaribus, erit positivum, & propositio in genere est demonstrata.

117. Quando igitur tot inveniuntur paria limitum, quot sunt radices æquationis propositæ, ea habet omnes radices reales; & in genere, pro-

posita tot habet radices reales quod inveniuntur limitum paria.

118. Prima limitum æquatio, jam toties nominata, deducitur ab ultimo transformata termino (N. 17. 20. pag. 62. 63. hujus). Hæc tota nihilo æqualis est. Nihilo pariter æqualis ostensus est ejus ultimus terminus, quando pro  $e$  substituitur aliqua  $e$  propositæ radicibus. Quare tota transformata, una cum termino qui erat penultimus, nunc ultimus factus est, nihilo æqualis est. Ejus radices sunt differentię vel summæ radicum æquationis propositæ, quarum factum est ille terminus

$$ne^{n-1} + (n-1) \Delta e^{n-2} + (n-2) B e^{n-3} + (n-3) C e^{n-4} + \&c.$$

qui profecto non evanescit, neque evanescet quia pro  $e$  scripta sit littera  $x$ , quod pendet a scribentis voluntate. Sed, si terminus ille ponatur nihilo æqualis, illius radices (quæ nec sunt differentię nec summæ radicum propositæ) demonstratæ sunt limites radicum propositæ, & singulæ majores quam respondentes radices propositæ; idest illius minima major quam minima propositæ &c.

Sic æquatio trium dimensionum jam allata

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$$

substituendo  $y + e$  pro  $x$  fit

$$\begin{aligned} y^3 + 3ey^2 + 3e^2y + e^3 \\ - 11y^2 - 22ey - 11e^2 \\ + 31y + 31e \\ - 21 \end{aligned} = 0$$

Hæc transformata, ponendo  $e = 1$ , quæ est una  $e$  propositæ radicibus, habet ultimum terminum nihilo æqualem, sed penultimum  $= 12$ . Non ergo est

$$3e^3 - 22e + 31 = 3x^3 - 22x + 31 = 0$$

Reliquæ transformatæ

$$y^3 - 8y + 12 = 0$$

radices sunt 6; & 2; differentię duarum radicum reliquarum 7 & 3 a substituta. Interim si ponatur

$$3x^3 - 22x + 31 = 0$$

erit

$$x = \frac{11}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{7}$$

est

est autem  $\sqrt{7} = 2, 645$ ; quare  $x = \frac{11 \pm 5, 290}{3} = \text{vel } 5, 430 \text{ vel } 1, 903$

Posterior numerus medius est inter 1 & 3, prior inter 3 & 7

119. Sed penultimus transformatæ terminus fieret nihilo æqualis, si duæ æquationis propositæ radices essent æquales. Nam, facta substitutione N<sup>o</sup>. 90. pag. 110. hujus, ille constabit e differentis

$$\mu - \tau; \mu - \sigma; \mu - \zeta; \mu - \pi; \text{ \&c.},$$

&c e summis

$$\mu + \lambda; \mu + \kappa; \mu + \iota; \mu + \theta; \text{ \&c.};$$

eritque numerus summarum ac differentiarum simul  $= n - 1$ ; hæ autem jungendæ per multiplicationem sunt ad numerum  $n - 2$ , in quovis e factis simplicibus, quæ simul sumta faciunt coefficientem termini penultimi; Factor autem quivis, ex. gr.  $\mu - \sigma$ , erit in omnibus factis simplicibus, uno dempto complectente reliquos Factores omnes (N<sup>o</sup>. 106. pag. 27. Tomi I.). Ergo, si  $\mu = \sigma$ , id est si una radix propositæ substituitur in transformatæ, non evanescet penultimus hujus terminus, sed manebit factum simplex illud, in quo non est Factor  $\mu - \sigma = 0$ , nempe

$$(\mu - \tau) (\mu - \zeta) (\mu - \pi) \text{ \&c. } (\mu + \lambda) (\mu + \kappa) (\mu + \iota) (\mu + \theta) \text{ \&c.},$$

quod confirmat quæ diximus N<sup>o</sup>. 116. hujus. Sed si  $\mu$  æquet etiam aliquam aliam radicem  $\epsilon$ , tunc erit  $\mu - \epsilon = 0$ , & omnino evanescentem reddet terminum penultimum. Erat autem  $\mu = \sigma$ ; nunc est  $\mu = \epsilon$ ; quare  $\sigma = \epsilon$ , & duæ radices æquationis propositæ sunt æquales.

120. Igitur æquatio

$$nx^{n-1} + (n-1) Ax^{n-2} + (n-2) Bx^{n-3} + (n-3) Cx^{n-4} \dots = 0$$

& inservit propositæ, quando ea habet duas radices æquales, & complectitur limites radicum propositæ, si sint inæquales. Quapropter vocabitur vel æquatio limitum, vel æquatio radicum æqualium.

121. Si æquatio ordinis  $n$ , in qua sunt duæ radices æquales, exponatur per  $Q$ , ejus æquatio radicum æqualium exponi debet per  $\frac{Q}{x + \epsilon}$ , ubi  $\epsilon$  ponitur una e radicibus æqualibus.

122. Si æquatio ordinis  $n$  habeat radicum æqualium numerum  $q$ , & multiplicentur singuli propositæ termini per exponentes, æquatio ordinis  $n - 1$ , quæ hinc conficitur, habebit radicum æqualium numerum  $q - 1$ .

Sit æquatio generalis consueta.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \dots + Px^1 + Qx^1 + Rx + S = 0 \quad \&c$$



& ponatur  $n = q + r$ : quia æquatio proposita habet  $q$  radices æquales, (quas designabo per  $\omega$ ), ea per multiplicationem confecta erit ex  $(x + \omega)^q$ , & ex æquatione ordinis  $r$ ,

$$x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} + Dx^{r-4} \dots + Px^1 + Qx^0 + Rx + S = 0;$$

atque ideo ipsa proposita poterit exprimi hoc pacto

$$x^r (x + \omega)^q + Ax^{r-1} (x + \omega)^q + Bx^{r-2} (x + \omega)^q \dots + Px^1 (x + \omega)^q + Qx^0 (x + \omega)^q + Rx (x + \omega)^q + S(x + \omega)^q = 0.$$

123. Constat æquationem ordinis  $r$  habere, pro termino  $s+1$  ..  $m$ , ipsius  $x$  exponentem  $r-s$ ; fit ille terminus  $Mx^{r-s}$ , factum  $Mx^{r-s} (x + \omega)^q$ , si ordine scribantur singuli potestatis termini, habebit exponentes

$$q+r-s; q+r-s-1; q+r-s-2; q+r-s-3 \dots r-s.$$

Nunc in progressionem Ni. 110. pag. 116. hujus, ponatur  $r-s$  pro  $m$ , &  $q$ ;  $q-1$ ;  $q-2$ ; &c. pro  $np$ ;  $(n-1)p$ ;  $(n-2)p$ ; &c; id est 1 pro  $p$ , &  $q$  pro  $n$ ; & pro æquatione ibidem proposita substituat,ur,

$$Mx^{r-s} (x + \omega)^q = Mx^{r-s} (x^q + q\omega x^{q-1} + \frac{q \cdot q-1}{2} \omega^2 x^{q-2} + \dots \omega^q);$$

invenietur æquatio multiplicata per progressionem arithmeticam, cujus  
prima series

$$(r-s) Mx^{r-s} (x^q + q\omega x^{q-1} + \frac{q \cdot q-1}{2} \omega^2 x^{q-2} \dots + \omega^q) = (r-s) Mx^{r-s} (x + \omega)^q$$

Series altera

$$+ Mx^{r-s+1} (qx^{r-1} + q \cdot q-1 \omega x^{q-2} + \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2}{2} \omega^2 x^{q-3} \dots + \omega^{q-1}) \\ = q Mx^{r-s+1} (x + \omega)^{q-1},$$

ubi Factor compositus  $(x + \omega)^{q-1}$ , habet radicum æqualium numerum  $q-1$ .

124. Summa terminorum constituentium terminum hunc generalem, dividi potest per  $x$ ; quo facto manet is

Tom. II.

Q

( $r-s$ )

$$(r-s) Mx^{r-s-1} (x+\omega)^q + qMx^{r-s} (x+\omega)^{q-1}$$

Est autem  $(r-s) Mx^{r-s-1} (x+\omega)^q$  ipse terminus generalis æquationis compositæ divisus per  $x$  & multiplicatus per exponentem ipsius  $x$ ; &  $qMx^{r-s} (x+\omega)^{q-1}$ , est idem terminus divisus per  $x+\omega$ , & multiplicatus per exponentem ipsius  $(x+\omega)^q$ . Hinc constat quomodo facile inveniri possint singuli termini. Rem tamen explicemus aliquot exemplis.

125. Jam, quamdiu  $r-s$  est nihilo major, manebit utraque series  $(r-s) Mx^{r-s-1} (x+\omega)^q$  &  $qMx^{r-s} (x+\omega)^{q-1}$ . Sed quando  $r-s=0$ ; id est  $r=s$ , atque  $s+1=r+1$ , evanescet series  $(r-s) Mx^{r-s-1} (x+\omega)^q$  & manebit  $qMx (x+\omega)^{q-1}$ . Hoc autem accidet in ultimo compositæ termino  $S(x+\omega)^q$ ; nam æquatio ordinis  $r$  habet terminorum numerum  $r+1=s+1$ , ac terminus  $s+1$ ...mus est ipse ultimus.

Igitur ultimus compositæ terminus, multiplicatus per seriem arithmeti-

$$q; q-1; q-2; q-3; q-4; \dots 0$$

fit

$$qSx (x+\omega)^{q-1}.$$

In termino præcedente est  $s=r-1$ ; hinc  $1=r-s$ ; &  $q+r-s=q+1$ ;

quare

$$(r-s) Mx^{r-s-1} (x+\omega)^q + qMx^{r-s} (x+\omega)^{q-1} = Rx (x+\omega)^q + qRx^2$$

$$(x+\omega)^{q-1} = Rx ((x+\omega) + qx) (x+\omega)^{q-1} = Rx ((q+1)x + \omega) (x+\omega)^{q-1}$$

Tertius, ab ultimo, terminus dat  $s=r-2$ ; hinc  $2=r-s$ , &  $q+r-s=q+2$ ; quapropter tunc

$$(r-s) Mx^{r-s-1} (x+\omega)^q + Mx^{r-s+1} (x+\omega)^{q-1} = 2Qx^3 (x+\omega)^q + qQx^3$$

$$(x+\omega)^{q-1} = Qx^3 ((2x+\omega) + qx) (x+\omega)^{q-1} = Qx^3 ((q+2)x + 2\omega) (x+\omega)^{q-1}$$

Quartus ab ultimo dat  $s=r-3$ ; unde  $3=r-s$ ; &  $q+r-s=q+3$ , atque

$$(r-s) Mx^{r-s-1} (x+\omega)^q + qMx^{r-s+1} (x+\omega)^{q-1} = 3Px^3 (x+\omega)^q + qPx^4$$

$$(x+\omega)^{q-1} = Px^3 (3x + 3\omega + qx) (x+\omega)^{q-1} = Px^3 ((q+3)x + 3\omega) (x+\omega)^{q-1}$$

Et

Et sic progrediendo ab ultimo primum versus. Sed in ipso primo est  $s=0$ ; quare  $r-s=r$ , &  $q+r-s=q+r$ ; unde

$$(r-s) Mx^{r-s} (x+\omega)^q + q Mx^{r-s+1} (x+\omega)^{q-1} = rx^r (x+\omega)^q + qx^{r+1} (x+\omega)^{q-1} = x^r (rx+r\omega+qx) (x+\omega)^{q-1} = x^r ((r+q)x+r\omega) (x+\omega)^{q-1}$$

Secundus terminus dat  $s=1$ ; atque ideo  $r-s=r-1$ , &  $q+r-s=q+r-1$ ; unde

$$(r-s) Mx^{r-s} (x+\omega)^q + q Mx^{r-s+1} (x+\omega)^{q-1} = (r-1) Ax^{r-1} (x+\omega)^q + q Ax^r (x+\omega)^{q-1} = Ax^{r-1} (rx-x+r\omega-\omega+qx) (x+\omega)^{q-1} = Ax^{r-1} ((r+q-1)x+(r-1)\omega) (x+\omega)^{q-1}$$

In tertio est  $s=2$ ; &  $r-s=r-2$ , ac  $q+r-s=q+r-2$ ; hinc

$$(r-s) Mx^{r-s} (x+\omega)^q + q Mx^{r-s+1} (x+\omega)^{q-1} = (r-2) Bx^{r-2} (x+\omega)^q + q Bx^{r-1} (x+\omega)^{q-1} = Bx^{r-2} (rx-2x+r\omega-2\omega+qx) (x+\omega)^{q-1} = Bx^{r-2} ((r+q-2)x+(r-2)\omega) (x+\omega)^{q-1}$$

In quarto est  $s=3$ ;  $r-s=r-3$ , ac  $q+r-s=q+r-3$ ; quare

$$(r-s) Mx^{r-s} (x+\omega)^q + q Mx^{r-s+1} (x+\omega)^{q-1} = (r-3) Cx^{r-3} (x+\omega)^q + q Cx^{r-2} (x+\omega)^{q-1} = Cx^{r-3} (rx-3x+r\omega-3\omega+qx) (x+\omega)^{q-1} = Cx^{r-3} ((r+q-3)x+(r-3)\omega) (x+\omega)^{q-1}$$

Abunde, puto, ad casus peculiare aptatum est theorema generale N<sup>o</sup> 124. Nunc.

126. Quoniam singuli termini æquationis propositæ, multiplicati quisque per suos exponentes, complectuntur potestates

$$(x+\omega)^q \text{ \& \& } (x+\omega)^{q-1}$$

ultimus autem complectitur tantum  $(x+\omega)^{q-1}$ , patet totam propositam, post aptam multiplicationem per exponentes, continere radices æquales ad numerum  $q-1$ . Potest autem hæc dividi per  $x$ , per quem multiplicati sunt singuli termini, & æquatio ordinis  $r+q-1=n-1$ , sic in-

inventā, est ipsa proposita, cujus termini singuli multiplicati sunt per suos exponentes. Ergo &c.

127. Aequatio supra inventa sponte distribuitur in duas series, quarum una, divisa per  $x$ , est

$$(x + \omega)^r (rx^{r-1} + (r-1)Ax^{r-2} + (r-2)Bx^{r-3} + (r-3)Cx^{r-4} \dots + 3Px^2 + 2Qx + R)$$

altera, pariter divisa per  $x$ , est

$$q(x + \omega)^{q-1} (x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} \dots + Px^3 + Qx^2 + Rx + S)$$

quæ simul additæ complent inventam. Est autem prima series factum ex ipsius  $x + \omega$  potestate  $q$  in æquationem radicum æqualium ipsius  $x^r + Ax^{r-2} + \&c.$ , & secunda series est factum vicissim ex æquatione radicum æqualium potestatis  $(x + \omega)^q$  in propositam  $x^r + Ax^{r-1} + \&c.$ ; quod est observandum.

Præbeamus exemplum arithmeticum. Aequatio

$$x^2 - 31x^6 + 401x^2 - 2791x^4 + 11195x^3 - 25525x^2 + 29875x - 13125 = 0$$

conficitur ex

$$x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625 = 0 = (x - 5)^4$$

& ex

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0 = (x - 1)(x - 3)(x - 7)$$

Aequatio proposita septimi gradus, multiplicando quemque terminum per suum exponentem, & factum dividendo per  $x$ , dat

$$7x^6 - 186x^5 + 2005x^4 - 11164x^3 + 33585x^2 - 51050x + 29875 = 0$$

Hic  $r = 3$ ;  $q = 4$ ;  $\omega = -5$ . Igitur, ex theoremate præcedente,

$$x^r (r+q) x + r\omega (x+\omega)^{q-1} = x^3 (7x-15) (x-5)^3 = (7x^4-15x^3) (x-5)^3 = 7x^7 - 120x^6 + 750x^5 - 2000x^4 + 1875x^3$$

&

$$Ax^{r-1} ((r+q-1)x + (r-1)\omega) (x+\omega)^{q-1} = -11x^2 (6x-10) (x-5)^3 = (-66x^3 + 110x^2) (x-5)^3 = -66x^6 + 1100x^5 - 6600x^4 + 16500x^3 - 13750x^2$$

&

Et duæ partes jam inventæ, simul

$$7x^7 - 186x^6 + 1850x^5 - 8600x^4 + 18375x^3 - 13750x^2.$$

Jam

$$\begin{aligned} Bx^{r-2} ((r+q-2)x + (r-2)\omega)(x+\omega)^{q-1} &= 31x(5x-5)(x-5)^3 = \\ (155x^2 - 155x)(x-5)^3 &= \\ + 155x^5 - 2480x^4 + 13950x^3 - 31000x^2 + 19375x, \end{aligned}$$

quam adde summæ priori, & invenies

$$7x^7 - 186x^6 + 2005x^5 - 11080x^4 + 32325x^3 - 44750x^2 + 19375x$$

$$\begin{aligned} Tandem Cx^{r-3} ((r+q-3)x + (r-3)\omega)(x+\omega)^{q-1} &= -21(4x)(x-5)^3 = \\ -84x^4 + 1260x^3 - 6300x^2 + 10500x \end{aligned}$$

Et, addendo summæ jam inventæ, ac dividendo per  $x$ , reperies æquationem superiorem.

Patet autem hanc habere tres radices æquales, quia dividi potest per  $(x-5)^3$ , manente quoto

$$7x^3 - 81x^2 + 265x - 239 = 0$$

128. Si vero plures essent æquationes radicum æqualium inter se multiplicatæ, ut

$$(x+\omega)^q (x+\psi)^r (x+\chi)^u : \&c.$$

æquatio inventa post consuetam exponentium multiplicationem dividi posset,

$$\text{per } (x+\omega)^{q-1}; \text{ per } (x+\psi)^{r-1}; \text{ per } (x+\chi)^{u-1} \&c.$$

Ex. gr. sit æquatio.

$$x^7 - 15x^6 + 90x^5 - 282x^4 + 501x^3 - 407x^2 + 272x - 60 = 0 =$$

$$(x-1)^3 (x-2)^2 (x-3) (x-5) = 0$$

Hæc tractata secundum regulam, dat

$$7x^6 - 90x^5 + 450x^4 - 1128x^3 + 1503x^2 - 814x + 272 = 0$$

quæ divisa per

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)^{q-1} = 0$$

Q 3

re-

relinquit quotum

$$7x^4 - 7(x^3 + 291x^2 - 470x + 272) = 0$$

Quotum hoc divisum per

$$x - 2 = (x - 2)^3 = (x - 2)^{4-1} = 0$$

præbet

$$7x^3 - 62x^2 + 167x - 136 = 0$$

& hæc posterior æquatio neque per  $x - 1$ , neque per  $x - 2$  dividi potest.  
129. Hujus rei ratio est, quod ultimus compositæ terminus est ipse terminus ultimus quantitatis

$$S(x + \omega)^q (x + \psi)^r (x + \chi)^u \&c; \text{ nempe } S\omega^q \psi^r \chi^u \&c.$$

Cum autem tota hæc quantitas facta e potestatibus inter se multiplicatis, multiplicari debeat in singulis terminis per exponentes ipsius  $x$ , terminus ultimus multiplicatus erit per 0. Hoc evanescente, tota series dividi poterit per  $x$ , qui per multiplicationem adjungi poterit ipsi  $S$ , & manebit, neglectis terminis seriei arithmeticæ,

$$Sx(x + \omega)^{q-1} (x + \psi)^{r-1} (x + \chi)^{u-1} \&c.$$

130. Si esset  $x + \omega = x + a \pm \sqrt{b}$ , atque ideo si quantitas furda esset in æquatione radicum æqualium rationale, necessario esset eadem potestas alterius binomii  $x + \psi = x + a \mp \sqrt{b}$  (Nº. 45. pag. 19. hujus.). Tunc ultimus compositæ terminus esset

$$Sx(x + a + \sqrt{b})^{q-1} (x + a - \sqrt{b})^{r-1} = (x^2 + 2ax + a^2 - b)^{q-1}$$

& superesset æquatio rationalis.

Ita æquatio

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = 0 = (x - 1 - \sqrt{2})^2 (x - 1 + \sqrt{2})^2 = (x^2 - 2x - 1)^2$$

fit, ex regula, post divisionem per 4

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 = (x^2 - 2x - 1)(x - 1).$$

131. Patet idem accidere quando radices æquales sunt imaginariæ, quia & ipse semper sunt binæ oppositæ, & factum ex binis erit formæ

$$x^2 + 2ax + a^2 + b.$$

Sit

Sit ex. gr. æquatio

$$x^3 - 4x^2 + 10x - 12x + 9 = 0 = (x - 1 + \sqrt{-2})^2 (x - 1 - \sqrt{-2})^2$$

Hinc, per methodum consuetam, habetur

$$4x^2 - 12x^2 + 20x - 12 = x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x - 1 + \sqrt{-2})(x - 1 - \sqrt{-2})(x - 1)$$

Ubi una est potestas ejusdem radicis  $(x + \omega)^q$ .

132. Constat ex N<sup>o</sup>. 123. pag. 121. hujus; æquationem compositam divisam per  $(x + \omega)^{q-1}$

relinquere quotum, quod sic scribi potest

$$+ r\omega x^r + (r-1)A\omega x^{r-1} \dots + 4M\omega x^4 + 3P\omega x^3 + 2Q\omega x^2 + R\omega x$$

$$(r+q)x^{r+1} + (r+q-1)Ax^r + (r+q-1)Bx^{r-1} \dots + (q+3)Px^4 + (q+2) = 0$$

$$Qx^3 + (q+1)Rx^2 + qSx$$

133. Quare si cognoscatur una e radicibus æqualibus  $\omega$ , & earum numerus  $q$ , facile detegatur æquatio, quæ cum  $(x + \omega)^1$  conficitur propositam. Nam quoti secundum terminum multando quantitate  $r\omega$ , & reliquum dividendo per  $r + q - 1$ , invenietur  $A$ , coefficientis inveniendus secundi termini. Hunc multiplicando per  $(r-1)\omega$ , auferendo a quoti tertio termino, & residuum dividendo per  $r + q - 2$ , invenietur  $B$ ; &c.

Sic, N<sup>o</sup>. 124. pag. 122. hujus, erat  $q = 4$ ;  $\omega = 5$ , & quotum

$$7x^3 - 81x^2 + 265 - 239 = 0$$

cum sit  $q + r = 7$ , &  $q = 4$ ; est  $r = 3$ ; ac  $r\omega = 15$ : sed  $81 - 15 = 66$ ,

atque  $\frac{66}{6} = 11 = A$ . Jam  $(r-1)\omega = 10$ ; &  $(r-1)\omega A = 110$ . At-

qui  $265 - 110 = 155$ , &  $\frac{155}{5} = 31$ . Quare  $B = 31$ . Tandem  $(r-2)\omega$

$= 5$ ;  $(r-2)\omega B = 155$ ; &  $239 - 155 = 84$ ; &  $\frac{84}{4} = 21$ ; ergo  $C = 21$ ,

& æquatio investiganda est

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$$

Qualis reipsa erat.

134. Quotum jam inventum, nempe divisum per  $x$ , continet summam e duabus æquationibus limitum, quæ inserviunt ipsi multiplicanti,

$$x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} + Dx^{r-4} \dots + Qx^3 + Px^2 + Rx + S = 0$$

Hæc,

Harum una deducta est e proposita, multiplicando singulos terminos per terminos seriei arithmeticae,

$$r\omega; (r-1)\omega; (r-2)\omega; (r-3)\omega; (r-4)\omega \dots 3\omega; 2\omega; 1\omega; 0$$

alteram vero dat proposita, cujus termini, more solito, multiplicati sunt per

$$(r+q); (r+q-1); (r+q-2); (r+q-3) \dots (q+3); (q+2); (q+1); q$$

135. Quando est  $q = 1$ ; vel una est radix sibi æqualis, aut, (quod idem est,) radices omnes inæquales sunt, proposita fit

$$(x+\omega)(x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} \dots + Qx^1 + Px^0 + Rx + S = 0 =$$

$$x^{r+1} + (\omega + A)x^r + (\omega A + B)x^{r-1} + (\omega B + C)x^{r-2} \dots + (\omega Q + P)x^0 +$$

$$(\omega P + R)x^1 + (\omega R + S)x + \omega S = 0$$

& quorum Ni. 133. evadet

$$(r+1)x^r + r(\omega + A)x^{r-1} + (r-1)(\omega A + B)x^{r-2} + (r-2)(\omega B + C)x^{r-3} +$$

$$\dots 3(\omega Q + P)x^1 + 2(\omega P + R)x + \omega R + S = 0$$

Prorsus ut N<sup>o</sup>. 104. pag. 114. hujus. Quare id quod ibi demonstratum est, nunc alio pacto demonstratur. *Alio pacto*, inquam; nam quod potestas  $(x+\omega)^n$ , si ejus singuli termini multiplicentur per exponentes ipsius  $x$ , præbeat  $nx(x+\omega)^{n-1}$ , etsi quasi corollarium deductum sit N<sup>o</sup>. 110. pag. 116. hujus a propositione generale, tamen per se patet. Quandoquidem omnes potestatis  $(x+\omega)^n$  termini, præter primum & ultimum, habebunt  $n$  inter coefficientium Factores, per theorema binomiale. Sed multiplicatio per exponentes ipsius  $x$ , delet ultimum terminum qui multiplicatur per 0, & primum multiplicat per  $n$ . Ergo post hanc multiplicationem, omnes termini sunt multiplicati per  $n$ ; sed & per  $x$ , quod constat. Quapropter Factor  $nx$  præponi poterit summæ terminorum superstitem, quorum primus exponentem habebit  $n-1$ , secundus  $n-2$ ; &c., qui sunt exponentes potestatis  $(x+\omega)^{n-1}$ . Item secundus ejus terminus, qui nunc habet coefficientem unitatem, multiplicatur per  $n-1$ : tertius, qui nunc habet coefficientem  $\frac{n-1}{2}$ , multiplicatur per  $n-2$ , & coefficientem

habet  $\frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ ; &c. Hi autem sunt coefficientes potestatis  $(x+\omega)^{n-1}$ , quæ debet habere  $n$  terminos, quot relinquit, post multiplicationem, potestas



testas  $(x + \omega)^n$ ; hæc enim habebat  $n + 1$  terminos, quorum ultimus expunctus est. Ergo &c.

136. Quanquam  $(x + \omega)^{n-1}$  contineat  $n - 1$  Factores æquales, tamen, ut habeatur æquatio vera & completa, sumi debet ejus multiplex  $n(x + \omega)^{n-1}$ . Sunt enim in  $(x + \omega)^n$  Factores æquales numero  $n$ , quorum quisque, ordine, potest auferri per divisionem. Erunt ergo omnino  $n$  quotientes diversi.

137. Ut lux affundatur huic asserto, ponamus æquationis ordinis  $n$  Factores esse

$$x + a; x + b; x + c; x + d; x + e; \&c.$$

ad numerum  $n$ ; & æquationem ex his conflata esse  $Q$ . Si hæc dividitur per singulos ordine Factores, manebit post singulas divisiones

$$\frac{Q}{x+a}; \frac{Q}{x+b}; \frac{Q}{x+c}; \frac{Q}{x+d}; \frac{Q}{x+e}; \&c.$$

& quotientes erunt numero  $n$ . Nunc denotet  $x + m$  ambigue singulos divisores hujus quotientis, vel singulos Factores æquationis  $Q$ , habebitur

$$\frac{Q}{x+m}; \frac{Q}{x+m}; \frac{Q}{x+m}; \frac{Q}{x+m}; \frac{Q}{x+m}; \&c.$$

ad numerum  $n$ . Sed omnes exprimi debent. Fiet ergo  $\frac{nQ}{x+m}$ . Exprimat nunc  $x + m$  unum e Factoribus æqualibus, & patebit propositum.

138 Ex observatis N°. 127. pag. 124. hujus, potest intelligi quod si esset

$$x + \omega = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} \dots + py^1 + qy^1 + ry + s = Q.$$

Æquatio, quæ ex  $n$  radicibus æqualibus ipsius

$$(y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} \dots + py^1 + qy^1 + ry + s)^n = Q^n$$

unam adimit, est

$$ny (my^{m-1} + (m-1)ay^{m-2} + (m-2)by^{m-3} \dots + 3py^1 + 2qy + r) = nQ^{n-1}$$

Idem deduci, potest ex N°. 124. pag. 121. 122. hujus.

Sed rem demonstrare non pigebit.

139. Sint æquationis  $Q$  Factores

Tom. II.

R

$y +$

$y + a; y + \beta; y + \gamma; y + \delta; \&c.$

ad numerum  $m$ ; vel fit

$$Q = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} \dots + py + qy + ry + s = \\ (y + a)(y + \beta)(y + \gamma)(y + \delta). \&c.$$

queritur quomodo exprimenda sit per  $Q$  æquatio ambigue repræsentans

$$(y+a)^{n-1}(y+\beta)^n(y+\gamma)^n(y+\delta)^n\&c.; (y+a)^n(y+\beta)^{n-1}(y+\gamma)^n(y+\delta)^n\&c.; \\ (y+a)^n(y+\beta)^n(y+\gamma)^{n-1}(y+\delta)^n\&c.; (y+a)^n(y+\beta)^n(y+\gamma)^n(y+\delta)^{n-1}\&c.; \\ \&c.$$

Jam quantitas

$$my^{m-1} + (m-1)ay^{m-2} + (m-2)by^{m-3} \dots + 3py + 2qy + r$$

ea est quæ oritur ex æquatione  $Q$  transformata ut N°. 137. pag. præcedente, atque ideo exponit ambigue

$$\frac{Q}{y+a}; \frac{Q}{y+\beta}; \frac{Q}{y+\gamma}; \frac{Q}{y+\delta}; \&c.$$

Eft autem

$$\frac{Q}{y+a} = (y+\beta)(y+\gamma)(y+\delta) \&c.; \& \\ Q^{n-1} = (y+a)^{n-1}(y+\beta)^{n-1}(y+\gamma)^{n-1}(y+\delta)^{n-1} \&c.$$

Quapropter

$$\frac{Q}{y+a} \cdot Q^{n-1} = (y+a)^{n-1}(y+\beta)^n(y+\gamma)^n(y+\delta)^n \&c.$$

Continet igitur  $n-1$  Factores æquales ipsi  $y+a$ . Sed ea ut completa habeatur, multiplicari debet per  $n$ . (N°. 132. hujus). Ergo  $\&c.$

Eft autem  $\frac{Q}{y+a}$  dimensionum  $m-1$ , &  $Q^{n-1}$  dimensionum  $mn-m$ ; quare quantitas inventa est dimensionum  $mn-1$ , ut debebat.

Sit, ut exemplum demus,

$$Q = x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$$

$\&c.$

&, elevando ad secundam potestatem,

$$Q^2 = x^6 - 22x^5 + 183x^4 - 724x^3 + 1423x^2 - 1302x + 441 = 0$$

Hæc multiplicata per exponentes, & divisa per  $x$ , fit

$$6x^5 - 110x^4 + 732x^3 - 2172x^2 + 2846x - 1302 = 0 =$$

$$2(3x^2 - 22x + 31)(x^3 - 11x^2 + 31x - 21)$$

Ubi æquatio limitum propositæ est Factor unus

$$3x^2 - 22x + 31.$$

140. Si exponens ipsius  $Q$  est fractus, velut  $\frac{n}{n+r}$ , dico æquationem, quæ continet numerum Factorum æqualium unitate minorem quam ante, constare ex æquatione limitum ipsius  $Q$  ducta in exponentem fractum  $\frac{n}{n+r}$ , & in ipsius  $Q$  potestatem unitate minorem quam ante, cujus nempe exponens est  $\frac{n}{n+r} - 1 = \frac{r}{n+r}$ .

Nam, quia exponens ipsius  $Q$  est  $\frac{n}{n+r}$ , ponitur  $Q^n$  constare e numero  $n+r$  Factorum æqualium, qui eam restitunt inter se multiplicati, vel quorum unus evertus ad potestatem  $n+r$  conficit ipsam  $Q^n$ . Sit ergo

$$Q^{\frac{n}{n+r}} = (y+a)^{\frac{n}{n+r}} (y+\beta)^{\frac{n}{n+r}} (y+\gamma)^{\frac{n}{n+r}} \&c.$$

quæritur quomodo per  $Q$  & ejus potestates exponi debeat

$$(y+a)^{\frac{r}{n+r}} (y+\beta)^{\frac{n}{n+r}} (y+\gamma)^{\frac{n}{n+r}} \&c.$$

Jam est

$$Q = (y+a)(y+\beta)(y+\gamma) \&c., \& \frac{Q}{y+a} = (y+\beta)(y+\gamma)(y+d) \&c.$$

atque

$$Q^{\frac{r}{r+n}} = (y+a)^{\frac{r}{r+n}} (y+\beta)^{\frac{r}{r+n}} (y+\gamma)^{\frac{r}{r+n}} (y+d)^{\frac{r}{r+n}} \&c. \quad \text{Qua.}$$

Quare

$$\frac{Q}{y+a} \cdot Q^{-\frac{r}{r+n}} = (y+a)^{-\frac{r}{r+n}} (y+\beta)^{-\frac{r}{r+n}} (y+\gamma)^{-\frac{r}{r+n}} \dots \&c.$$

Est autem  $1 - \frac{r}{r+n} = \frac{r+n-r}{r+n} = \frac{n}{n+r}$ . Quare patet propositum, quod pertinet ad ipsas quantitates.

Quod spectat ad coefficientem, toties repeti debet quantitas inventa, quoties divisor  $y+a$  continetur in  $(y+a)^{\frac{n}{n+r}}$ , continetur autem  $\frac{n}{n+r} \dots ies;$

quia  $y+a$  est  $\frac{n+r}{n}$  .. ma potestas ipsius  $(y+a)^{\frac{n}{n+r}}$ . Ergo &c.

Exemplum dabimus rationale sub forma irrationali, ut melius veritas theporematis dispiciatur. Est

$$(x^2 - 3x + 2)^3 = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8 = 0 = Q.$$

quapropter

$$Q^{\frac{2}{3}} = (x^2 - 3x + 2)^2,$$

Hujus æquatio radicum æqualium est:

$$2(2x - 3)(x^2 - 3x + 2) = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 12$$

sed secundum regulam hujus numeri, æquatio radicum æqualium ipsius

$$Q^{\frac{2}{3}}, \text{ est}$$

$$\frac{2}{3}(6x^4 - 45x^3 + 132x^2 - 189x + 132x - 36) Q^{\frac{2}{3} - 1}$$

Et  $Q^{\frac{2}{3} - 1} = Q^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ ; per quam si dividatur præcedens, invenietur æquatio radicum æqualium, qualis esse debet.

141. Tandem quando æquatio proposita fracta est, qualem representat  $\frac{Q}{R}$ , ejus æquatio radicum æqualium est excessus, quo factum e denomina-

tore

tore  $R$  in æquationem radicum æqualium numeratoris  $Q$  superat factum vicissim e denominatoris  $R$  æquatione radicum æqualium in numeratorem  $Q$ , divisus per denominatoris quadratum.

Nam ponamus  $\frac{Q}{R} = S$ , æquatio radicum æqualium fractionis propositæ erit æqualis simili æquationi ipsius  $S$ . Est autem  $Q = RS$ ; & æquatio radicum æqualium ipsius  $Q$  est factum ex  $R$  in æquationem radicum æqualium  $S$ , una cum factum ex æquatione radicum æqualium  $R$  in  $S$  (Nº. 127. pag. 124. hujus). Ergo utrinque auferendo posterius factum, excessus, quo æquatio radicum æqualium ipsius  $Q$  superat factum ex  $S$  in æquationem radicum æqualium  $R$ , æqualis est factum ex  $R$  in æquationem radicum æqualium ipsius  $S$ ; ac multiplicando per  $R$ , excessus quo factum ex  $R$  in æquationem radicum æqualium ipsius  $Q$ , superat factum ex  $RS$ , vel ex  $Q$ , in æquationem radicum æqualium ipsius  $R$ , æqualis est quadrato ipsius  $R$  multiplicato per æquationem radicum æqualium ipsius  $S$ , ac dividendo per quadratum  $R$ ; &c.

142. Si queritur æquatio, quæ contineat  $n - 2$  Factores æquales, æquatio quæ continet  $n - 1$  Factores æquales tractanda est secundum methodos jam traditas, & sic pergendum est donec unus supersit Factor æqualis.

142. Quare si æquatio sit integra & rationalis ordinis  $n$ , & ea habeat radices æquales numero  $g$ , ut una supersit radix æqualis, statim multiplicari potest per numerum  $g - 1$  serierum arithmeticarum inter se ductarum in singulis terminis vel columnis.

$$n; n-1; n-2; n-3; n-4 \dots 4; 3; 2; 1; 0$$

$$n-1; n-2; n-3; n-4; n-5 \dots 3; 2; 1; 0$$

$$n-2; n-3; n-4; n-5; n-6 \dots 2; 1; 0$$

&c.

143. Hic redit observatio N°. 119. pag. 120. hujus; nempe si tres sint radices æquales, evanescet tertius ab ultimo terminus transformata; etiam quartus si quatuor; &c. Cum autem hi termini deducantur quilibet e præcedente, multiplicando singulos præcedentis terminos per terminos seriei arithmeticæ divisos per eundem divisoem (N°. 119 pag. 62. hujus); & pro his terminis assumi possint termini alterius seriei arithmeticæ (N°. 110. pag. 114. 115. hujus), atque ideo multiplicis, hinc optime confirmatur Numerus præcedens.

Regulam hanc primus tradidit HUDDENIUS in epistola II. ad SCHOTENIUM, quæ est in CARTESII Geometria &c. latine edita Amstelodami ex Typographia Blaviana anno 1683. pag. 507. Auctor acutissimus eam traducit ad *maxima* & *minima*, (quod & nos statim facturi sumus,) aptat ad æquationes fractas, & ad eas, quæ plures incognitas complectuntur. Eandem demonstravit HUGENIUS. (Oper. var. vol. 1. pag. 490. edit. Lugd. Batav. apud Janssonius van der Aa 1724).

144. Uterque pro fractionibus hanc tradit regulam. Quantitates cognitæ, si quæ adsint, deleantur, præter eas quæ sunt in fractionis denominatore. Quantitates reliquæ, si non habent eundem denominatorem, eo reducantur. Singuli termini numeratorem constituentes ducantur in singulos terminos denominatoris, & producta singula multipla sumantur secundum numerum, quo exponens incognitæ in termino numeratoris differt ab exponente ejusdem in termino denominatoris. Signa ponantur ex lege multiplicationis, quoties exponens numeratoris major est exponente denominatoris; quando secus, signa contraria. Hanc regulam recidere in illam, quam attulimus, facile patebit.

145. Si in æquatione, cujus radices positivæ sunt eadem quæ N<sup>o</sup> 71. hujus pag. 106, (nempe expressæ litteris græcis, & crescentes ab ultima  $\omega$ , primam versus,) ordine, substituaturs pro incognita quantitas  $a$ , major quam  $\sigma$ , & omnes præcedentes, ultimam versus, sed minor quam  $\epsilon$ , & omnes sequentes primam versus; factum quod hinc oriatur, constabit e differentiis

$$a - \omega; a - \psi; a - \chi; a - \phi \dots a - \sigma; a - \epsilon; a - \pi; \&c.$$

(N<sup>o</sup> 91. hujus, pag. 111); quarum  $a - \sigma$  & omnes quæ præcedunt ad sinistram, sunt positivæ, quia e majore  $a$  demuntur minores  $\omega$ ;  $\psi$ ;  $\chi$ ; &c.; sed  $a - \epsilon$ ;  $a - \pi$ ; & reliquæ sequentes ad dextram, sunt negativæ, siquidem a minore  $a$  auferuntur majores  $\epsilon$ ;  $\pi$ ; &c..

146. Quia hic tantum quæro facti quantitatem, non signum, (quandoquidem agitur de substitutione quantitatum quæ sunt inter duas proximas radices, & facta oriunda ex his substitutionibus habent idem signum, & quantitate comparanda sunt) assumam, pro negativis defectibus, excessus positivos  $\epsilon - a$ ;  $\pi - a$ , qui defectibus æquales sunt, sed oppositi.

147. Quo magis crescit  $a$ , eo magis crescunt primæ quantitates

$$a - \omega; a - \psi; a - \chi; a - \phi \dots a - \sigma$$

& eo magis decrescunt aliæ illæ

$$\epsilon - a; \pi - a; \sigma - a; \&c.$$

Crescit igitur factum e primis, & decrescit factum ex aliis. Quare factum ex omnibus inde crescit, hinc decrescit.

148. Tamen hæc facta crescunt ad certum finem usque, deinde decrescunt.

Quoniam enim posuimus  $a - \sigma$  ultimam quantitatum positivarum, etiam præcedens  $a - \tau$  positiva est; & minimum  $a - \sigma = 1$ ; ac  $a = \tau + 1$ ; quia substituuntur numeri integri. Quapropter in prima substitutione Factores positivi erunt

$$\tau + 1 - \omega; \tau + 1 - \psi; \tau + 1 - \chi; \tau + 1 - \phi \dots 1.$$

& Factores negativi, signis mutatis, atque ideo facti positivi,

$$\epsilon - \tau - 1; \pi - \tau - 1; \circ - \tau - 1; \xi - \tau - 1; \nu - \tau - 1; \mu - \tau - 1; \&c.$$

Sed, quia substituuntur, ordine, numeri naturales, erunt in secunda substitutione Factores positivi

$$\tau + 2 - \omega; \tau + 2 - \psi; \tau + 2 - \chi; \tau + 2 - \phi \dots 2$$

& Factores negativi, pariter signis mutatis,

$$\epsilon - \tau - 2; \pi - \tau - 2; \circ - \tau - 2; \xi - \tau - 2; \nu - \tau - 2; \mu - \tau - 2; \&c.$$

Singuli Factores positivi primæ substitutionis, minores sunt quam singuli Factores positivi respondentes secundæ substitutionis. Ergo hæcenus factum e primis minus est quam factum e secundis, ut jam observatum est N°. præcedente. Præterea est

$$(\tau + 2 - \omega)(\tau + 2 - \psi) = (\tau + 1 - \omega)(\tau + 1 - \psi) + 1(\tau + 1 - \omega) + 1(\tau + 1 - \psi) + 1 =$$

$$AB + A + B + 1$$

$$\text{ponendo } \tau + 1 - \omega = A; \& \tau + 1 - \psi = B.$$

Eodem pacto, factum e tribus

$$(AB + A + B + 1)(\tau + 2 - \chi) = (AB + A + B)(\tau + 1 - \chi) + 1(AB + A + B) +$$

$$1(\tau + 1 - \chi) + 1 = CD + C + D + 1$$

$$\text{ponendo } AB + A + B = C; \& \tau + 1 - \chi = D$$

149. Ergo quando factum ex omnibus Factoribus positivis primæ substitutionis exponitur per MN; factum e Factoribus omnibus positivis secundæ substitutionis exponendum erit per

$$MN + M + N + 1.$$

150. Eodem pacto probabitur, quod quando factum ex omnibus Factoribus, qui erant negativi & facti sunt positivi mutatione signorum, primæ substitutionis, exponitur per PQ, factum respondens e Factoribus secundæ substitutionis, exponendum est per

$$PQ - P - Q + 1.$$

Hoc autem factum positivum est, quia oritur e Factoribus positivis. Sed majus est quam unitas; nam hæc theorematum excludunt radices imaginarias, & si  $\epsilon - \tau$  esset quantitas minor quam unitas, esset  $\epsilon - \tau - 1$  quantitas negativa; & si  $\epsilon - \tau = 1$ , esset  $\epsilon - \tau = 0$ ; neutrum fieri potest in nostro casu.

Cum

Cum ergo sit  $\xi - \tau - 1$  major unitate, &  $\pi - \tau - 1$  major quam  $\xi - \tau - 1$ , &c; seu plures sint hujusmodi Factores, seu sit unus, semper erit  $PQ - P - Q + 1$  major unitate, quare &

$$(MN + M + N + 1) (PQ - P - Q + 1) \text{ major quam } MNPQ$$

151. Crescunt ergo facta a primo ad secundum. Nunc demonstrandum ea pariter crescere ab ultimo ad penultimum. Quod est facilius. Cum enim debeat esse  $a - \xi$  quantitas negativa, minimum, erit  $a - \xi = -1$  &  $a = \xi - 1$ . Tunc ergo ultimæ substitutionis Factores positivi erunt

$$\xi - 1 - \omega; \xi - 1 - \psi; \xi - 1 - \chi; \xi - 1 - \phi; \xi - 1 - \nu; \&c \dots \xi - \sigma - 1$$

& negativi, signis mutatis, ut supra

$$1; \pi - \xi + 1; \pi - \xi + 1; \xi - \xi + 1; \nu - \xi + 1; \mu - \xi + 1; \&c.$$

Sed in penultima substitutione, Factores positivi

$$\xi - 2 - \omega; \xi - 2 - \psi; \xi - 2 - \chi; \xi - 2 - \phi; \xi - 2 - \nu; \&c \dots \xi - \sigma - 2$$

ac negativi, signis mutatis

$$2; \pi - \xi + 2; \pi - \xi + 2; \xi - \xi + 2; \nu - \xi + 2; \mu - \xi + 2. \&c.$$

& ponendo, ut supra, facta ex ultimis MN ac PQ, facta e penultimis erunt  $MN - M - N + 1$  ac  $PQ + P + Q + 1$ . Et quia  $\xi - \sigma - 2$  debet esse quantitas positiva, erit  $\xi - \sigma - 1$  major unitate, unde factum e penultimis majus factum ex ultimis.

152. Cum ergo facta crescant, tum incipiendo a primo ultimum versus, tum incipiendo ab ultimo primum versus, constat eadem, incipiendo a primo crescere ad certum finem usque, & deinde decrescere. Est ergo saltem unum factum omnium maximum.

153. Exponat littera  $y$ , facta quæ oriuntur e singulis substitutionibus. Erit ergo

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \dots + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = y$$

vel

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \dots + Px^3 + Qx^2 + Rx + \frac{S}{-y} = 0$$

Nunc, aut plures sunt ipsius  $y$  valores maximi, atque ideo æquales; aut unus est maximus.

Si plures sint maximi, habebit æquatio plures radices æquales. Si unus est maximus, duo erunt valores æquales hinc inde a maximo; nam, etiam si per numerorum naturalium substitutionem facta crescant per saltum, reipsa crescunt



crescunt fluxu continuo. Si enim pro 1; 2; &c; ponerentur numeri 1;  $1\frac{1}{2}$  vel 1, 5; 2, &c., factum medium inveniretur inter duo oriunda ex 1 &

ex 2: si 1;  $1\frac{1}{4}$  vel 1,25;  $1\frac{1}{2}$  vel 1,50;  $1\frac{3}{4}$  vel 1,75; 2, tria media invenirentur; & si numeri 1, & 2 exponerentur lineis, quæ crescunt fluxu continuo, innumerabilia. Quoniam autem eodem pacto decrescunt facta quo creverant, oportet ut duo sint hinc inde æqualia.

154. Sumatur igitur æquatio, quæ propositæ est radicum æqualium, & habebitur numerus radicum æqualium unitate minutus. Hæc ergo continebit maximum valorem. At hæc æquatio est ipsa æquatio limitum, quia hic ultimus terminus est  $s - \gamma$ , qui evanescit dum multiplicatur per 0. Ergo æquatio limitum continet maxima facta.

In exemplum assumamus æquationem

$$x^3 - 57x^2 + 936x - 3780 = 0$$

cujus radices sunt 6; 21; 30. Ex regula habetur

$$3x^2 - 114x + 936 = 0 = x^2 - 38x + 312$$

cujus radices sunt 12, & 26. Ponendo  $x = 12$ , propositæ factum sic facile invenitur

$$x^3 - 57x^2 = (x - 57)x^2 = (12 - 57)x^2 = -45x^2.$$

Et

$$x^3 - 57x^2 + 936x = -45x^2 + 936x = (-45x + 936)x =$$

$$(-540 + 936)x = +396x = 4752$$

unde auferendo 3780, manet factum + 972

sed ponendo  $x = 11$ , habetur

$$x^3 - 57x^2 = (x - 57)x^2 = (11 - 57)x^2 = -46x^2.$$

Item

$$-46x^2 + 936x = (-46x + 936)x = (-506 + 936)x = 430x = 4730,$$

unde auferendo 3780, manet factum + 950 priore minus

Item ponendo  $x = 13$ , est

$$x^3 - 57x^2 = (+13 - 57)x^2 = -44x^2;$$

&amp;c

$$-44x^2 + 956x = (-44x + 956)x = (-572 + 936)x = +364x = 4732$$

unde auferendo 3780, manet factum 952, item priore minus.

Vix autem differunt duo facta 950, & 952; unde constat quod vel paupisfer augendo 11, vel minuendo 13, magis accederetur ad æqualitatem.

Ponatur nunc  $x = 10$ , habebitur

$$x^3 - 57x^2 = (10 - 57)x^2 = -47x^2$$

&amp;c

$$-47x^2 + 936x = (-47x + 936)x = (-470 + 936)x = 4660$$

unde auferendo 3780, manet factum adhuc minus 880

Tandem ponatur  $x = 14$ , erit

$$x^3 - 57x^2 = (14 - 57)x^2 = -43x^2, \text{ \& } -43x^2 + 936x =$$

$$(-602 + 936)x = 334x = 4676$$

unde auferendo 3780, manet factum 896, item minus.

Igitur tum augendo, tum minuendo numeros substitutos, facta minuuntur. Præterea factorum respondentium differentia augentur, quandoquidem duorum maximo proximorum differentia est 2; & remotiorum differentia est 16. Siquis autem poneret 9 & 15 differentiam factorum inveniret 54.

154. Vera quantitas media inter duas est earum summa dimidiata. Hinc statim recideremus in duas radices æquales, nam inter  $\omega$  &  $\psi$  media est  $\frac{\omega + \psi}{2}$ ; quæ substituta dat unam differentiam  $\frac{\omega + \psi}{2} - \omega = \frac{\psi - \omega}{2}$ , &

aliam  $\frac{\omega + \psi}{2} - \psi = \frac{\omega - \psi}{2}$ , quæ sunt æquales, quamvis oppositæ. Sed

hæ duæ radices, inter quas quæritur media, non sunt æquales; atque ideo proposita non habet radices æquales. Ergo ea, quæ secundum regulam deducitur e proposita, continere non potest unam e duabus radicibus æqualibus, quæ non sunt. Si vero vellemus uteducta habeat duas radices æquales, hæc multiplicari deberet per progressionem arithmeticam, & adduceret ad secundam æquationem limitum.

155. In exemplo Nr. 153. attigi rationem substituendi numerum datum in æquatione proposita. Hæc ratio rem reddit facillimam, liberat a potestatum formatione, & aliquot multiplicationes tantum postulat. Ideo fufius explicanda videtur, cum nemini quod sciam, venit in mentem, quod miror.

Huc

Huc tota res recidit, ut in unam summam cogantur duo termini proximi; statim primus & secundus; deinde horum summa & tertius, atque ita porro.

Sit æquatio generalis, ordinis  $n$ , consueta, & in ea pro  $x$  poni debeat  $a$ . Incipio a duobus terminis altissimis. Cum sit

$$x^n + Ax^{n-1} = x^{n-1} (x + A) = x^{n-1} (a + A);$$

pono  $a$  pro  $a + A$ . Igitur summa duorum priorum terminorum est  $ax^{n-1}$ ; huic adjungatur tertius, eritque

$$ax^{n-1} + Bx^{n-2} = x^{n-2} (ax + B) = x^{n-2} (aa + B);$$

sit  $aa + B = \beta$ ; summa trium priorum terminorum fiet  $\beta x^{n-2}$ ; & ad-  
dendo quartum terminum, fiet

$$\beta x^{n-2} + Cx^{n-3} = x^{n-3} (\beta x + C) = x^{n-3} (\beta a + C);$$

ponatur  $\beta a + C = \gamma$ ; erit  $\gamma x^{n-3}$  summa quatuor priorum terminorum; & sic de reliquis.

156. Si nulli deficient in æquatione termini, una erit multiplicatio, & una additio vel subductio (pro signis coefficientium) in conjunctione duorum terminorum continuorum. Deficiet additio vel subductio, si qui deficient termini in æquatione. Primus, ex. gr. terminus post  $Cx^{n-3}$ , sit  $Gx^{n-7}$ . Summa hæctenus inventa, erat  $\gamma x^{n-3}$ . Est ergo

$$\gamma x^{n-3} + Dx^{n-4} = x^{n-4} (\gamma x + D) = x^{n-4} (\gamma x + 0) = x^{n-4} \gamma a = \delta x^{n-4}$$

Item

$$\delta x^{n-4} + Ex^{n-5} = x^{n-5} (\delta x + E) = x^{n-5} (\delta x + 0) = x^{n-5} \delta a = \epsilon x^{n-5}$$

Pariter

$$\epsilon x^{n-5} + Fx^{n-6} = x^{n-6} (\epsilon x + F) = x^{n-6} (\epsilon x + 0) = x^{n-6} \epsilon a = \zeta x^{n-6}$$

Denique

$$\zeta x^{n-6} + Gx^{n-7} = x^{n-7} (\zeta x + G) = x^{n-7} (\zeta a + G) = x^{n-7} \eta; \text{ \&c.}$$

Tamen, quando res facilius videbitur, omitti possunt termini nulli, hoc pacto

$$\gamma x^{n-3} + Gx^{n-7} = x^{n-7} (\gamma x^4 + G) = x^{n-7} (\gamma a^4 + G) = \text{\&c.}$$

S<sub>2</sub>

157.

157. Hinc demonstrari potest in genere theorema, quod tradi solet. *Æquationis maximus coefficientis negativus, unitate auctus, superat maximam propositæ radicem positivam.*

Sit æquatio, cujus omnes termini negativi, præter primum

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \dots - Hx^{n-r} \dots S = 0$$

& sit H maximus coefficientium negativorum. Fiat

$$x = y + H + 1$$

dico transformatam habere omnes coefficientes positivos; atque ideo (per Num 35. p 64. hujus,) esse  $H+1$  majorem quavis radice positiva propositæ. Nam, quia H major est quam A; B; C; D ... S; ponatur

$$-A = -H + \alpha; -B = -H + \beta; -C = -H + \gamma \dots -S = -H + \epsilon$$

Fiet ergo proposita.

$$\begin{array}{ccccccc} x^{n-H} & x^{n-1-H} & x^{n-2-H} & x^{n-3} & \dots & Hx^{n-r} & \dots -H \\ +\alpha & +\beta & +\gamma & & & & +\epsilon \end{array} = 0$$

Nunc assumatur exponens  $s$ , & pro  $x$  ponendo  $H+1$ ; habebitur

$$(H+1)^s + (\alpha-H)(H+1)^{s-1} + (\beta-H)(H+1)^{s-2} + (\gamma-H)(H+1)^{s-3} + \dots$$

Hujus summa invenietur positiva per regulam Ni. præcedentis. Est enim

$$(H+1)^s + (\alpha-H)(H+1)^{s-1} = (H+1+\alpha-H)(H+1)^{s-1} = (1+\alpha)(H+1)^{s-1}$$

summa duorum priorum terminorum. Sed

$$(1+\alpha)(H+1)^{s-1} + (\beta-H)(H+1)^{s-2} = ((1+\alpha)(H+1) + \beta-H)(H+1)^{s-2} =$$

$$(\alpha H + \alpha + H + 1 + \beta - H)(H+1)^{s-2} = (\alpha H + \alpha + \beta + 1)(H+1)^{s-2}$$

Et summa trium priorum terminorum est positiva; atque, pergendo, tota invenietur positiva

158. Quare, si omnes termini, post primum, negativi sunt, primus major est quam summa reliquorum; & fortius si inter eos aliqui sint positivi, qui vel primum positivum augment, vel reliquos negativos minuunt.

159. Ergo si tum primus, tum summa reliquorum multiplicetur per eundem numerum  $p$ ; erit factum e primo termino in  $p$  majus quam factum e summa reliquorum pariter in  $p$ ; & fortius si primus terminus ducatur in  $p$ ; summa reliquorum in numerum minorem  $p - q$ ; atque adhuc fortius, si primus terminus ducatur in  $p$ ; secundus in  $p - q$ ; tertius in  $p - 2q$ , & sic

sic semper minuendo numerum multiplicantem.

160. Hinc & ex *N<sup>is</sup>* 16...19. pag. 61. 62. hujus, constat transformatæ coefficientes omnes esse positivos, & demonstratum est theorema propositum. Quanda quidem *primo*, ponendo  $s = n$ , habebitur ultimus transformatæ terminus, positivus per *Num* 157. Ponendo  $s = n - 1$  habebitur coefficientis penultimi, cujus singuli termini ducendi sunt in singulos terminos progressionis arithmeticæ.

$$n; n - 1; n - 2; n - 3; n - 4; n - 5; \&c:$$

& erit positivus per *Num* 159., per quem etiam inveniuntur positivi reliqui facile determinandi. *Secundo*, cum hæc vera sint de æquatione, cujus omnes termini sunt negativi, præter primum, fortius vera erunt de proposita, in qua sunt alii termini positivi. Tunc autem proposita habet plures radices positivas, & maximus negativus coefficientis, auctus unitate, superat earum maximam. Raro quidem satis prope accedit hic limes; tamen utilis esse potest.

161. Ex dictis constat nullos esse limites radicum imaginariarum. Si quidem limites, major & minor, substituti in æquatione dant facta alterne positiva & negativa (*N<sup>o</sup>* 85. pag. 108. hujus); & nulla est quantitas, quæ substituta in æquatione, cujus radices omnes sunt imaginariæ, dat factum negativum, *N<sup>is</sup>* 114...116. pag. 118. hujus.); fortius nulla quæ dat factum nihilo æquale; nam illud semper est positivum.

162. Si duæ radices sunt æquales, nulla est quantitas inter eas media, nempe minor quam una & major quam altera. Tunc autem æquatio limitum continet unam e duabus radicibus æqualibus, (*N<sup>is</sup>* 119. 122. pag. 120. hujus;) eadem unam radicem habet nihilo æqualem (*N<sup>o</sup>* 105. pag. 114. hujus.) Ergo radicum æqualium limes est vel 0, vel una e radicibus æqualibus. Hinc

163. Quando tot inveniuntur limitum paria, quot sunt radices æquationis propositæ, nec 0 est limitum unus, æquatio habet omnes radices reales & inæquales.

164. Si quas radices æquales habet aliqua ex æquationibus limitum, etiam proposita habet radices æquales; & harum numerus facile determinatur. Proposita sit ordinis  $n$ , & æquatio limitum sit  $m$ .ma, vel ordinis  $n - m$ , quoniam æquatio limitum unitate depressior est quam præcedens, & prima unitate depressior quam proposita. Nunc æquatio limitum  $m$ .ma habeat radicem æqualium numerum  $p$ ; numerus radicum æqualium in proposita erit  $m + p$ , quia unam aufert quævis æquatio limitum.

165. Quapropter si qua e radicibus alicujus æquationis limitum substituta in proposita, eam reddit nihilo æqualem, proposita habet aliquot radices æquales. Et si plures radices inæquales alicujus æquationis limitum substitutæ in proposita, eam reddant nihilo æqualem, plures sunt in proposita series radicum æqualium inter se; ita tamen ut una e radicibus æqualibus unius seriei, inæqualis sit uni e radicibus æqualibus alterius seriei.

166. Si æquatio limitum habet radices imaginarias, etiam proposita habet radices imaginarias. Nam si proposita haberet omnes radices reales, eæ substitutæ in æquatione limitum, darent facta alterne positiva & negativa (N<sup>o</sup>. 103. pag. 113. hujus;) quod est contra N<sup>um</sup>. 114... 116. pag. 118. hujus.

167. Sed si æquatio limitum nullas habet radices imaginarias, non ideo confici potest nullas esse imaginarias in proposita. Nam in æquatione rationali, duæ radices imaginariæ necessario conficiunt æquationem quadraticam rationalem (N<sup>o</sup>. 45. 47. & 48. pag. 19. & 20. hujus), quæ ideo habet radices imaginarias, quia terminus ultimus & positivus est & major quadrato dimidiati coefficientis pro secundo termino. Factum ex his omnibus invenitur in ultimo propositæ termino, quem delet multiplicatio per exponentem. Igitur fieri potest ut quantitas, quæ radices reddebat imaginarias, minuta sit, ita ut radices fiant reales.

168. Æquatio limitum statim est ejusdem ordinis ac proposita; & cum dividi possit per  $x = 0$ , una radix imaginaria statim forte ablata est. Ergo tunc & alia, quæ eam semper comitatur.

169. Si proposita est ordinis paris, ejus prima æquatio limitum, ut & tertia, quinta, &c., est ordinis imparis; & habet saltem unam radicem realem (N<sup>o</sup>. 55. pag. 21. hujus;) ergo quævis æquatio limitum auferre potest duas radices imaginarias. Quare nunc, si duæ tantum sunt imaginariæ in proposita, ipsa prima limitum æquatio; si quatuor tertia, quinta si sex, & reliquæ sequentes nullam habere poterunt radicem imaginariam, a quibus tamen immunis non est proposita.

170. Si proposita est ordinis imparis, ejus prima æquatio limitum habere potest tot imaginarias radices, quot proposita; sed secunda æquatio limitum erit impar, & redibunt observata in N<sup>o</sup>. præcedente.

## CAPUT V.

*Æquationum Reductio per Divisores surdos.*

I. **H**actenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurimum dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel quod perinde est, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit ut ex utraque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

II. *Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nihilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde si æquatio quadratica sit (nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut si æquatio sit  $xx - ax - b = 0$ , aufer utrobique  $-b$  & adde  $\frac{1}{4}aa$ , & emerget

$$xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa,$$

& extracta utrobique radice, fiet

$$x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}, \text{ sive } x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}.$$

III. *Quod si æquatio sit quatuor dimensionum, sit ea*

$$x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0,$$

ubi  $p, q, r, \& s$ , denotant cognitæ quantitates terminorum æquationis signis propriis adfectas. Fac

$$q - \frac{1}{4}pp = \alpha; \quad r - \frac{1}{2}ap = \beta.$$

$$s - \frac{1}{4}aa = \gamma.$$

Dein pone pro  $n$  communem aliquem terminorum  $\beta$  &  $2\gamma$  divisorem integrum, & non quadratum, qui & impar esse debet & per 4 divisus unitatem relinquere, si terminorum  $p$  &  $r$  alteruter sit impar. Pone etiam pro  $k$  divisorem aliquem quan-

tita-

titatis  $\frac{\beta}{n}$  si  $p$  sit par, vel imparis divisoris dimidium si  $p$  sit impar, vel nihil, si dividuum  $\beta$  sit nihil. Aufer quatum de  $\frac{1}{2}pk$ , & reliqui dimidium dic  $l$ . Dein pro  $Q$  pone  $\frac{\alpha+nkk}{2}$ , & tenta si  $n$  dividat  $QQ-s$ , & quoti radix sit rationalis & æqualis  $l$ . Si hoc contigerit ad utramque partem æquationis adde

$$nkkxx + 2nklx + nll,$$

& radicem extrahes utrobique, prodeunte

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = n^{\frac{1}{2}} \text{ in } kx + l.$$

Exempli gratia, proponatur æquatio

$$x^4 + 12x - 17 = 0,$$

& quia  $p$  &  $q$  hic desunt, &  $r$  est  $12$ , &  $s$  est  $-17$ , substitutis hisce numeris fiet  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 12$ , &  $\zeta = -17$ , & ipsorum  $\beta$  &  $2\zeta$  seu  $12$  &  $-34$  communis divisor unicus, nimirum  $2$ , erit  $n$ . Porro  $\frac{\beta}{n}$  est  $6$ , & ejus divisores  $1, 2, 3$ , &  $6$  successive tentandi sunt pro  $k$ , &  $-3$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $-1$ ,  $-\frac{1}{2}$  pro  $l$  respective. Est autem  $\frac{\alpha+nkk}{2}$  id est  $kk$  æquale  $Q$ . Est &  $\sqrt{\left(\frac{QQ-s}{n}\right)}$ , id est  $\sqrt{\left(\frac{QQ+17}{2}\right)} = l$ . Ubi numeri pares  $2$  &  $6$  scribuntur pro  $k$ ,  $Q$  fit  $4$  &  $36$ , &  $QQ-s$  numerus erit impar adeoque dividi non potest per  $n$  seu  $2$ . Quare numeri illi  $2$  &  $6$  rejiciendi sunt. Ubi vero  $1$  &  $3$  scribuntur pro  $k$ ,  $Q$  fit  $1$  &  $9$ , &  $QQ-s$  fit  $18$  &  $98$ , qui numeri dividi possunt per  $n$ , & quorum radices extrahi. Sunt enim  $\frac{1}{2}3$  &  $\pm 7$ : quarum tamen sola  $-3$  congruit cum  $l$ . Pono itaque  $k = 1$ ,  $l = -3$ , &  $Q = 1$ , & quantitatem

$$nkkxx + 2nklx + nll, \text{ id est } 2xx - 12x + 18,$$

addo ad utramque partem æquationis, & prodit

$$x^4 + 2xx + 1 = 2xx - 12x + 18,$$

& extracta utrobique radice,

$$xx + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}.$$

Quod



Quod si radicis extractionem effugere malueris, pone

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n(kx + l)},$$

& invenietur ut ante

$$xx + 1 = \pm \sqrt{2} (x - 3).$$

Et ex hac æquatione si radices iterum extrahas proveniet

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm \sqrt{\left( -\frac{1}{2} \mp 3\sqrt{2} \right)}, \text{ b. e. secundum signorum variationes,}$$

$$x = -\frac{1}{2} \sqrt{2} + \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}, \text{ \& } x = -\frac{1}{2} \sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$$

Item

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{2} + \sqrt{\left( -3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)}, \text{ \& } x = \frac{1}{2} \sqrt{2} - \sqrt{\left( -3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)}$$

Quæ quidem quatuor sunt radices æquationis sub initio propositæ,

$$x^4 + 12x - 17 = 0,$$

Sed earum ultimæ duæ sunt impossibiles.

Proponamus jam æquationem

$$x^4 - 6x^3 - 58xx - 114x - 11 = 0,$$

& scribendo  $-6$ ,  $-58$ ,  $-114$ , &  $-11$  pro  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , &  $s$  respective, orietur  $-67 = a$ ,  $-315 = \beta$ , &  $-1133\frac{1}{4} = \zeta$ . Numerorum  $\beta$  &  $2\zeta$ , seu

$-315$  &  $-\frac{4533}{2}$ , communis divisor est unicus, adeoque hic erit  $n$ , &

ipsius  $\frac{\beta}{n}$ , seu  $-105$ , divisores sunt  $3$ ,  $5$ ,  $7$ ,  $15$ ,  $21$ ,  $35$ , &  $105$ , qui ita-

que tentandi sunt pro  $k$ . Quare tento primum  $3$ , & quotum  $-35$ , qui

prodit dividendo  $\frac{\beta}{n}$  per  $k$ , seu  $-105$  per  $3$ , subduco de  $\frac{1}{2}pk$ , seu  $-3 \cdot 3$ ,

& restat  $26$ ; cujus dimidium  $13$  esse debet  $l$ . Sed  $\frac{a+nkk}{2}$ , seu  $\frac{-67+27}{2}$

(id est  $-20$ ) erit  $Q$ ; &  $QQ-s$  erit  $411$ , qui dividi potest per  $n$ , seu  $3$ , sed

quoti  $137$  radix non potest extrahi. Quamobrem rejicio  $3$  & tento  $5$  pro  $k$ .

Tom. II.

T

Quo-

Quotus qui jam prodit dividendo  $\frac{\beta}{n}$  per  $k$ , seu  $-10\frac{5}{8}$  per  $5$ , est  $-21$ , & hunc subducendo de  $\frac{1}{2}pk$ , seu  $-3.5$ , restat  $6$ , cujus dimidium  $3$  erit  $l$ . Est &  $Q$ , seu  $\frac{a+nkk}{2}$  id est  $\frac{-67+75}{2}$ , numerus  $4$ . Et  $QQ-s$ , seu  $16+11$  dividi potest per  $n$ ; & quoti, qui est  $9$ , radix extracta  $3$  congruit cum  $l$ . Quamobrem concludo esse  $l = 3$ ,  $k = 5$ ,  $Q = 4$ , &  $n = 3$ , & si

$$nkkxx + 2nklx + nll, \text{ id est, } 75xx + 90x + 27$$

ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi possit, & prodire

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n(kx+l)}, \text{ seu, } xx - 3x + 4 = \pm \sqrt{3(5x+3)},$$

& extracta iterum radice

$$x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{17 \pm \frac{21\sqrt{3}}{2}}.$$

Haud secus si proponatur æquatio hæc

$$x^4 - 9x^3 + 15xx - 27x + 9 = 0,$$

scribendo  $-9$ ,  $+15$ ,  $-27$ , &  $+9$ , pro  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , &  $s$  respective, emergit  $-5\frac{1}{4} = a$ ,  $-50\frac{5}{8} = \beta$ , &  $2\frac{7}{64} = \zeta$ . Ipsorum  $\beta$  &  $2\zeta$ , seu  $-\frac{405}{8}$

&  $\frac{135}{32}$ , communes divisores sunt  $3$ ,  $5$ ,  $9$ ,  $15$ ,  $27$ ,  $45$ , &  $135$ ; sed  $9$  quadratus est, &  $3$ ,  $15$ ,  $27$ ,  $135$  divisi per numerum  $4$  non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum  $p$  oporteret. His itaque rejectis restant soli  $5$  &  $45$  tentandi pro  $n$ . Ponamus primo  $n = 5$ , & ipsius  $\frac{\beta}{n}$  seu  $-\frac{81}{8}$

divisores impares dimidiati nempe  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{9}{2}$ ,  $\frac{27}{2}$ ,  $\frac{81}{2}$ , tentandi erunt pro  $k$ . Si  $k$  ponatur  $\frac{1}{2}$ , quotus  $-\frac{81}{4}$  qui prodit dividendo  $\frac{\beta}{n}$  per  $k$ ,

subductus de  $\frac{1}{2}pk$ , seu  $-\frac{9}{4}$ , relinquit  $18$  pro  $2l$ , &  $\frac{a+nkk}{2}$ , seu  $-2$ , est  $Q$ , &  $QQ-s$ , seu  $-5$  dividi quidem potest per  $n$ , seu  $5$ , sed quoti negativi  $-1$  radix impossibilis est, quæ tamen deberet esse  $9$ . Quare concludo  $k$  non esse  $\frac{1}{2}$ , & tento jam si sit  $\frac{3}{2}$ . Quotum qui oritur dividendo

do

do  $\frac{\beta}{n}$  per  $k$ , seu  $\frac{81}{8}$  per  $\frac{3}{2}$ , nempe quatum  $\frac{27}{4}$ , subduco de  $\frac{1}{2}pk$ ,  
seu  $\frac{27}{4}$ , & restat 0. Unde  $l$  jam nihil erit. Est autem  $\frac{a+nkk}{2}$ , seu  $3$ ,  
æqualis  $Q$ , &  $QQ - s$  nihil est; unde rursus  $l$ , qui hujus  $QQ - s$  di-  
visi per  $n$  radix est, invenitur nihil. Quamobrem his ita quadrantibus con-  
cludo esse  $n = 5$ ,  $k = \frac{3}{2}$ ,  $l = 0$ , &  $Q = 3$ , adeoque addendo ad  
utramque partem æquationis propositæ terminos

$$nkkxx + 2nlkx + nll \text{ id est } \frac{45}{4}xx,$$

& radicem quadraticam utrobique extrahendo, prodire

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n(kx + l)}, \text{ id est } xx - 4\frac{1}{2}x + 3 = \sqrt{5} \cdot \frac{3}{2}x.$$

IV. Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut si fuerit

$$x^4 - 2ax^3 + \frac{2aa}{cc}xx - 2a^3x + a^4 = 0,$$

substituendo  $2a$ ,  $2aa - cc$ ,  $2a^3$ , &  $a^4$ , pro  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , &  $s$  respective,  
obtinebuntur  $aa - cc = a$ ,  $-acc - a^3 = \beta$ , &  $\frac{3}{4}a^4 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{4}c^4 = \zeta$ .

Quantitatum  $\beta$  &  $2\zeta$  divisor communis est  $aa + cc$  qui proinde erit  $n$ ; &  $\frac{\beta}{n}$ ,  
seu  $-a$ , divisores habet 1 &  $a$ . Sed quia  $n$  duarum est dimensionum, &  
 $k\sqrt{n}$  non nisi unius esse debet, ideo  $k$  nullius erit, adeoque non potest  
esse  $a$ . Sit ergo  $k = 1$ , & diviso  $\frac{\beta}{n}$  per  $bb$  aufer quatum  $-a$  de  $\frac{1}{2}pk$ , seu  
 $-a$  & restabit nihil pro  $l$ . Porro  $\frac{a + nkk}{2}$ , seu  $aa$ , est  $Q$ , &  $QQ - s$  seu,  
 $a^4 - a^4$ , nihil est; & inde rursus prodit nihil pro  $l$ . Quod arguit quanti-  
tates  $n$ ,  $k$ ,  $l$ , &  $Q$ , recte inventas esse; & additis ad utramque partem æqua-  
tionis propositæ terminos

$$nkkxx + 2nlkx + nll, \text{ id est } aaxx + ccxx,$$

radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n(kx + l)}, \text{ id est } xx - ax + aa = \pm x\sqrt{(aa + cc)}.$$

Et extracta iterum radice

T 2

x =

$$x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa+cc)} + \text{vel} - \sqrt{\left(\left(\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}a\right)\sqrt{(aa+cc)}\right)}.$$

V. Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum surdarum*: potest tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, si modo pro quantitate  $n$  usurpetur unitas, eoque pacto una vice examinare possumus utrum æquatio fractis & surdis terminis carens divisorem aliquem duarum dimensionum aut rationalem aut surdum admittat. Ut æquatio

$$x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$$

proponatur, substituendo  $1, 5, +12, \&-6$ , pro  $p, q, r$ , &  $s$  respective inveniuntur  $5\frac{1}{4} = \alpha$ ,  $9\frac{3}{8} = \beta$ , & ponendo  $n = 1$ , quantitatis  $\frac{\beta}{n}$ , seu  $9\frac{3}{8}$ , divisores sunt  $1, 3, 5, 15, 25, 75$ : quorum dimidia (si quidem  $p$  sit impar) tentanda sunt pro  $k$ . Et si pro  $k$  tentemus  $\frac{5}{2}$ , fiet  $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$ , & ejus dimidium  $-\frac{5}{2} = l$ . Item  $\frac{\alpha+nkk}{2} = \frac{1}{2} = Q$ , &  $\frac{QQ - s}{n} = 6\frac{1}{4}$ , cujus radix congruit cum  $l$ .

Concludo itaque quantitates  $n, k, l, Q$ , recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis

$$nkkxx + 2nklx + nll, \text{ id est } 6\frac{1}{4}xx - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4},$$

radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm \sqrt{n(kx+l)}, \text{ id est } xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1\left(2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}\right);$$

seu

$$xx - 3x + 3 = 0, \& xx + 2x - 2 = 0,$$

adeoque per hasce duas æquationes quadraticas æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum supra traditam.

VI. Si quando quantitatis  $\frac{\beta}{n}$  multi sunt divisores ita ut omnes pro  $k$  tentare molestum fuerit, potest eorum numerus cito minui querendo omnes divisores quantitatis  $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ . Nam horum alicui, aut imparis alicujus dimidio

midio, debet quantitas  $Q$  æqualis esse. Sic in exemplo novissimo  $as = \frac{1}{4}rr$  est  $-\frac{9}{2}$ , e cujus divisoribus 1, 3, 9, aut iisdem dimidiatis  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{9}{2}$ , aliquis debet esse  $Q$ . Quare singillatim tentando quantitatibus  $\frac{\beta}{n}$  divisores dimidiatos  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{15}{2}$ ,  $\frac{25}{2}$ , &  $\frac{75}{2}$ , pro  $k$ , rejicio omnes qui non efficiunt  $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$ , seu  $-\frac{21}{8} + \frac{1}{2}kk$ ; id est  $Q$ , esse aliquem e numeris 1, 3, 9,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{9}{2}$ . Scribendo autem  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{15}{2}$ , &c. pro  $k$ , prodeunt respective  $-\frac{5}{2}$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $+\frac{1}{2}$ , &c. pro  $Q$ , e quibus soli  $-\frac{3}{2}$  &  $\frac{1}{2}$  reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{9}{2}$  adeoque, ceteris rejectis, aut erit  $k = \frac{3}{2}$ , &  $Q = -\frac{3}{2}$  aut  $k = \frac{1}{2}$ , &  $Q = \frac{1}{2}$ . Qui duo casus examinentur. Atque hæcenus de æquationibus quatuor dimensionum.

VII. Si æquatio sex dimensionum reducenda est, sit. ca.

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0,$$

& fac

$$q - \frac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta. \quad s - \frac{1}{2}p\beta = \gamma.$$

$$t - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \quad t - \frac{1}{2}\alpha\beta = \eta. \quad v - \frac{1}{4}\beta\beta = \theta.$$

$$\zeta\theta - \frac{1}{4}\eta\eta = \lambda.$$

Dein sumatur pro  $n$ , communis aliquis terminorum  $2\zeta$ ,  $\eta$ ,  $2\theta$ , divisor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modo terminorum  $p$ ,  $r$ ,  $t$  aliquis sit impar. Pro  $k$  sumatur divisor aliquis integer quantitatibus  $\frac{\lambda}{2nn}$  si  $p$  sit par, vel divisoris imparis dimidium si  $p$  sit impar, vel nihil si  $\lambda$  nihil sit. Pro  $Q$ , quantitas  $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$ . Pro  $l$  divisor aliquis quantitatibus

T 3

Qr

$\frac{Qr - QQp - t}{n}$ , si  $Q$  sit integer, vel divisoris imparis dimidium, si  $Q$  sit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil, si dividuum istud  $\frac{Qr - QQp - t}{n}$  sit nihil. Et pro  $R$  quantitas  $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + nkl$ . Dein tenta si  $RR - v$  dividi possit per  $n$ , & quoti radix extrahi; & præterea si radix ista æqualis sit tam quantitati  $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$  quam quantitati  $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$ . Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam  $m$ ; & vice æquationis propositæ scribe hanc

$$x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \pm \sqrt{n}(kxx + lx + m).$$

Etenim hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propositam. Quod si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modo prius constet æquationem per divisorem rationalem reduci non posse.

*Exempli gratia*, proponatur æquatio

$$x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 + 2a^3bxx + 3aab^2 - 4ab^3 = 0,$$

& scribendo

$$- 2a; + 2bb; + 2abb; - 2aabb + 2a^3b - 4ab^3;$$

$$0; \text{ \& } 3aab^2 - a^2bb \text{ pro } p, q, r, s, t, \text{ \& } v$$

respective, prodibunt

$$2bb - aa = \alpha; 4abb - a^3 = \beta; 2a^3b + 2aabb - 4ab^3 - a^4 = \gamma;$$

$$- b^4 + 2a^3b + 3aabb - 4ab^3 - \frac{5}{4}a^4 = \zeta;$$

$$- \frac{1}{2}a^5 + 3a^3bb - 4ab^4 = \eta; \text{ \& } - aab^4 + a^2bb - \frac{1}{4}a^6 = \theta.$$

Et terminorum  $2\zeta$ ,  $\eta$ , &  $2\theta$  communis divisor est  $aa - 2bb$ , seu  $2bb - aa$  perinde ut  $aa$  vel  $2bb$  majus sit. Sed esto  $aa$  majus quam  $2bb$ , &  $aa - 2bb$  erit  $n$ . Debet enim  $n$  semper affirmativum esse. Porro

$$\frac{\zeta}{n} \text{ est } -\frac{\int}{4}aa+2ab+\frac{1}{2}bb;$$

$$\frac{\eta}{n} \text{ est } -\frac{1}{2}a^3+2aab; \text{ \& } \frac{\theta}{n} \text{ est } \frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb;$$

adeoque

$$\frac{\zeta}{2n} \cdot \frac{\theta}{n} - \frac{\eta}{8nn} \text{ seu } \frac{\lambda}{2nn}$$

est

$$\frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5b - \frac{1}{8}a^4bb + \frac{1}{2}a^3b^3 - \frac{3}{8}aab^4,$$

cujus divisores sunt 1,  $a$ ,  $aa$ ; sed quia  $\sqrt{n.k}$  non nisi unius dimensionis esse potest, &  $\sqrt{n}$  unius est, ideo  $k$  nullius erit; proinde non nisi numerus esse potest. Quare rejectis  $a$  &  $aa$ , restat solum 1 pro  $k$ . Præterea  $\frac{1}{2}a$

+  $\frac{1}{2}nkk$  dat nihil pro  $Q$ , &  $\frac{QR-QQp-p}{n}$  etiam nihil est; adeoque  $l$ ,

qui ejus divisor esse debet, erit nihil. Denique  $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$  dat  $abb$  pro  $R$ . Et  $RR-v$ , est  $-2aavv+avbb$ , quod dividi potest per  $n$  seu  $aa-2bb$ , & quoti  $aabb$  radix extrahi, & radix illa negative sumpta, nem-

pe  $-ab$ , indefinitæ quantitati  $\frac{QR-\frac{1}{2}p}{n}$ , seu  $\frac{0}{0}$ , non est inæqualis, quantitati vero definitæ  $\frac{QQ+pR-nl-l-s}{2nk}$  æqualis est. Quamobrem radix illa,  $-ab$ , est  $m$ ; & loco æquationis propositæ scribi potest

$$x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \sqrt{n} kxx + lx + m),$$

id est

$$x^3 - axx + abb = \sqrt{(aa-2bb)} \cdot (xx-ab).$$

Cujus conclusionis veritatem probare potes quadrando partes æquationis inventæ & auferendo terminos ad dextram ex utraque parte. Ea enim operatione producet æquatio

$$x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 - 2a^2b^2x^2 + 3a^2b^4 - 4ab^3x^2 - a^4b^2 = 0$$

quæ

quæ reducenda proponebatur

VIII. Si æquatio est octo dimensionum, fit ea

$$x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vxx + wx + z = 0,$$

& fiat

$$q - \frac{1}{4}pp = a; \quad r - \frac{1}{2}pa = \beta; \quad s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}aa = \gamma;$$

$$t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}a\beta = \delta; \quad v - \frac{1}{2}a\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \epsilon;$$

$$w - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta; \quad \& \quad z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta.$$

Et terminorum  $2\delta$ ,  $2\epsilon$ ,  $2\zeta$ ,  $8\eta$ , quære communem divisorem qui integer sit, & non quadratus nec per quadratum divisibilis, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum  $p$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $w$  aliquis sit impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis, certum est æquationem per extractionem furdæ radicis quadraticæ reduci non posse, & si non potest ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum divisor communis. Opusculum igitur hæctenus institutum examinatio quædam est utrum æquatio reducibilis sit necne, adeoque cum ejusmodi reductiones raro possibiles sint, finem operi ut plurimum imponet.

IX. Et simili ratione si æquatio sit decem, duodecim, vel plurium dimensionum, impossibilitas reductionis cognosci potest.

Ut si ea sit

$$x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

faciendum erit

$$q - \frac{1}{4}pp = a; \quad r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta; \quad s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}aa = \gamma;$$

$$t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}a\beta = \delta; \quad v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}a\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \epsilon; \quad a - \frac{1}{2}a\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta;$$

$$b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta; \quad c - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta; \quad d - \frac{1}{4}\delta\delta = \kappa;$$

& quærendus communis divisor terminorum quinque  $2\epsilon$ ,  $2\zeta$ ,  $8\eta$ ,  $4\theta$ ,  $8\kappa$ , qui integer sit & non quadratus, quique etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alternorum  $p$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $a$ ,  $c$  aliquis sit impar.

X.



X. Sic si duodecim dimensionum æquatio fit

$$x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dxx + ex + f = 0,$$

faciendum erit

$$q - \frac{1}{4}pp = \alpha; r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta; s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma;$$

$$t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta; v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \epsilon;$$

$$a - \frac{1}{2}p\epsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta; b - \frac{1}{2}\alpha\epsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta;$$

$$c - \frac{1}{2}\beta\epsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta; d - \frac{1}{2}\gamma\epsilon - \frac{1}{4}\delta\delta = \iota; e - \frac{1}{2}\delta\epsilon = \lambda; f - \frac{1}{4}\epsilon\epsilon = \mu;$$

& quærendus communis divisor integer & non quadratus terminorum sex  $2\zeta, 8\eta, 4\theta, 8\iota, 4\lambda, 8\mu$ , qui per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum  $p, r, t, a, c, e$ , aliquis sit impar.

XI. Atque ita in infinitum progredi licebit: & æquatio proposita semper per extractionem surdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit, ubi ejusmodi divisor communis nullus est. Siquando vero ejusmodi divisor  $n$  inventus spem faciat futuræ reductionis, potest ea institui insistendo vestigiis operis quod in æquatione octo dimensionum subjungimus.

Quære numerum quadratum cui per  $n$  multiplicato ultimus æquationis terminus  $z$ , sub signo proprio adnexus, quadratum numerum efficit. Id autem expedite fiet si ad  $z$ , ubi  $n$  est par, vel ad  $4z$ , ubi  $n$  est impar, successive addantur  $n, 3n, 5n, 7n, 9n, 11n$ , & deinceps, donec summa æqualis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum, quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus prius occurrit quam summæ illius radix quadratica, aucta radice quadratica excessus illius summæ supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quam maximus terminorum æquationis propositæ  $p, q, r, s, t, v$ , &c., non opus erit rem ultra tentare. Æquatio enim reduci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus prius occurrit, sit ejus radix  $S$ , si  $n$  est par; vel  $2S$ , si  $n$  est impar; &  $\sqrt{\frac{SS - z}{n}}$  dic  $h$ . Debent autem  $S$  &  $h$  esse nu-

meri integri, si  $n$  est par, at si  $n$  impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si unus eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris  $R$  &  $m$ ,  $Q$  &  $l$ ,  $p$  &  $k$ , post inveniendis, observandum est. Et omnes numeri  $S$  &  $h$ , qui intra præfatum limitem inveniri possunt, in catalogum referendi sunt.

Postea pro  $k$  tentandi sunt omnes numeri successive, qui non efficiunt

$nk \pm \frac{1}{2}p$ , quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum est in omni casu  $\frac{mkk + a}{2} = Q$ . Dein pro  $l$  tentandi sunt successive numeri omnes, qui non efficiunt  $nl \pm Q$  quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum  $\frac{-npkk + 2\beta}{4} + nkl = R$ . Denique pro  $m$  tentandi sunt successive omnes numeri qui non efficiunt  $nm \pm R$  quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in casu quovis, si fiat

$$s - QQ - pR + nl = 2H, \text{ \& } H + nkm = S,$$

fit  $S$  aliquis numerorum qui prius pro  $S$  in catalogum relati erant; & præterea si alter numerus ei  $S$  respondens, qui pro  $b$  in eundem catalogum relatus erat, fit his tribus

$$\frac{2RS - v}{2nm}; \frac{2QS + RR - v - nmm}{2nl}; \text{ \& } \frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$$

æqualis. Si hæc omnia in aliquo casu evenerint, vice æquationis propositæ scribenda erit hæc

$$x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n(kx^2 + lxx + mx + b)}$$

*Exempli gratia* proponatur æquatio

$$x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10xx - 10x - 5 = 0:$$

Et erit

$$q - \frac{1}{4}pp = -1 - 4 = -5 = \alpha; \quad r - \frac{1}{2}p\alpha = -10 + 10 = 0 = \beta;$$

$$s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4} = \gamma; \quad t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = -5 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} = \delta;$$

$$v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = -10 - \frac{25}{8} = -\frac{105}{8} = \epsilon; \quad w - \frac{1}{2}\beta\gamma = -10 = \zeta;$$

$$z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = -5 - \frac{25}{64} = -\frac{345}{64} = \eta.$$

Ergo

2d; 2e, 2f; 8n; respective, sunt — 5; —  $\frac{10f}{4}$ ; — 20; & —  $\frac{34f}{8}$ ,  
 & earum divisor communis 5, qui per 4 divisus relinquit 1, perinde ut, ob  
 terminum imparem 5, oportuit. Cum itaque inventus sit divisor communis  
 n, seu 5, qui spem facit futuræ reductionis, quoniam iste impar est,

ad 4z, seu — 20, successive addo n; 3n; 5n; 7n; 9n; &c.

seu

5; 15; 25; 35; 45; &c.

& prodeunt

— 15; 0; 25; 60; 105; 160; 225; 300; 385; 480; 585; 700; 825; 960;

1105; 1260; 1425; 1600.

Ex quibus solum

0; 25; 225; & 1600

quadrati sunt. Quare horum radices dimidiatæ 0;  $\frac{5}{2}$ ;  $\frac{15}{2}$ ; 20; in cata-

logum referendæ sunt pro S, &  $\sqrt{\left(\frac{SS - z}{n}\right)}$ , id est 1;  $\frac{3}{2}$ ;  $\frac{7}{2}$ ; 9, res-  
 pective pro b. Sed quia S + nb, si scribatur 20 pro S & 9 pro b, fit 65,  
 numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20  
 & 9, & reliquos solum refero in tabulam ut sequitur.

$$\begin{array}{l|l} b & 1; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}; \\ \hline S & 0; \frac{5}{2}; \frac{15}{2}; \end{array}$$

His ita dispositis, tento pro k numeros omnes qui non efficiunt  $\frac{1}{2}p \pm nk$ ,  
 seu  $2 \pm sk$ , majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id est numeros

—8; —7; —6; —5; —4; —3; —2; —1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;

ponendo

$$\frac{nk + a}{2}, \text{ seu, } \frac{sk - 5}{2}$$

V 2

id

.id est numeros

$$\frac{315}{2}; 120; \frac{175}{2}; 60; \frac{75}{2}; 20; \frac{15}{2}; 0; -\frac{5}{2}; 0; \frac{15}{2}; 20; \frac{75}{2}; 60; \frac{175}{2}; 120.$$

respective pro Q. Imo vero, cum  $Q \pm nl$ , & multo magis Q, non debeat majus esse quam 40, rejiciendos esse sentio

$$\frac{315}{2}; 120; \frac{175}{2}; \& 60;$$

& qui his respondent

$$-8; -7; -6; -5; 5; 6; 7;$$

adeoque solos

$$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4;$$

pro k

&

$$\frac{75}{2}; 20; \frac{15}{2}; 0; -\frac{5}{2}; 0; \frac{15}{2}; 20; \frac{75}{2};$$

pro Q respective tentandos. Tentemus autem — 1 pro k & 0 pro Q, & in hoc casu pro l tentandi deinceps erunt suecessive omnes numeri qui non efficiunt  $Q \pm nl$  majus quam 40, id est omnes numeri inter 10 & —10, & pro R respective numeri

$$\frac{23 - nkk}{4} + nkl, \text{ seu } -5 - 5l$$

.id est

$$-55; -50; -45; -40; -35; -30; -25; -20; -15; -10; -5; 0;$$

$$5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45;$$

quorum tamen tres priores & ultimum, quia majores quam 40, negligere licebit. Tentemus autem — 2 pro l & 5 pro R, & in hoc casu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri qui non efficiunt  $R \pm mm$  seu  $5 \pm 5m$  majus quam 40, id est numeri omnes inter 7 & —9, & videndum an si ponendo

$$s - QQ - pR + nll, \text{ id est, } 5 - 20 + 20, \text{ seu, } 5 = 2H,$$

fit  $H+nkm$ , seu,  $\frac{f}{2} - fm = S$ , id est, si ex his numeris

$$\frac{-6f}{2}; \frac{-5f}{2}; \frac{-4f}{2}; \frac{-3f}{2}; \frac{-2f}{2}; \frac{-1f}{2}; \frac{-f}{2};$$

$$\frac{f}{2}; \frac{1f}{2}; \frac{2f}{2}; \frac{3f}{2}; \frac{4f}{2}; \frac{5f}{2}; \frac{6f}{2}; \frac{7f}{2}; \frac{8f}{2};$$

aliquis æqualis fit alicui numerorum 0;  $\pm \frac{f}{2}$ ;  $\pm \frac{1f}{2}$ ; qui prius in tabulam pro  $S$  relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt

$$-\frac{1f}{2}; -\frac{f}{2}; \frac{f}{2}; \frac{1f}{2};$$

quibus respondent

$$\pm \frac{7}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{7}{2};$$

pro  $h$  in eadem tabula scripti, ut & 2; 1; 0; — 1 pro  $m$  substituti.

Verum tentemus  $-\frac{f}{2}$  pro  $S$ , 1 pro  $m$ , &  $\pm \frac{3}{2}$  pro  $h$ , & fiet

$$\frac{2RS - w}{2nm} = \frac{-2f + 10}{10} = -\frac{3}{2},$$

&

$$\frac{2QS + RR - v - nmm}{2nb} = \frac{2f + 10 - f}{-20} = -\frac{3}{2},$$

&

$$\frac{pS + 2QR - t - 2n/m}{2nk} = \frac{-10 + f + 20}{-10} = -\frac{3}{2},$$

Quare cum prodeat omni casu  $-\frac{3}{2}$ , seu  $h$ , concludo numeros omnes recte inventos esse, adeoque vice æquationis propositæ scribendum esse

$$x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n}(kx^3 + lxx + mx + b),$$

id est

$$x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5}(-x^3 - 2xx + x - 1\frac{1}{2}).$$

Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimensionum quæ sub initio proponebatur.

XII. Quod si tentando casus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipsius  $b$  nullo in casu inter se consensissent, argumento fuisset æquationem per extractionem surdæ radicis quadraticæ reduci non potuisse.

XIII. Deberent autem aliqua hic in operis abbreviationem annotari, sed quæ brevitatis causa prætereo, cum tantarum reductionum perexiguus sit usus, & rei possibilitatem potius quam praxin commodissimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem surdæ radicis quadraticæ.

XIV. Adjungere jam liceret reductiones æquationum per extractionem surdæ radicis cubicæ, sed & has, ut quæ perraro utiles sint, brevitatis gratia prætereo.

XV. Sunt tamen reductiones quædam cubicarum æquationum vulgo notæ, quas, si penitus præterirem, Lector fortasse desideraret. Proponatur æquatio cubica

$$x^3 + qx + r = 0,$$

cujus secundus terminus deest. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex præcedentibus. Et supponatur  $x$  esse  $a + b$ . Erit

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \text{ (id est } x^3) + qx + r = 0.$$

Sit

$$3aab + 3abb \text{ (id est } 3abx) + qx = 0,$$

& erit

$$a^3 + b^3 + r = 0.$$

Per priorem æquationem est  $b = -\frac{q}{3a}$ , & cubice  $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$ . Ergo per posteriorem est

$$a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0, \text{ seu } a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27},$$

&c

& per extractionem affectæ radicis quadraticæ

$$a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}.$$

Extrahe radicem cubicam & habebitur  $a$ . Et supra erat,  $-\frac{q}{3a} = b$ , &

$a + b = x$ . Ergo  $a - \frac{q}{3a}$  radix est æquationis propositæ.

*Exempli gratia* proponatur æquatio

$$y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0.$$

Ad tollendum secundum æquationis hujus terminum ponatur  $x + 2 = y$ ,  
& orietur

$$x^3 - 6x + 8 = 0,$$

ubi est

$$q = -6, r = 8, \frac{1}{4}rr = 16, \frac{q^3}{27} = -8, a^3 = -4 \pm \sqrt{8}, a - \frac{q}{3a} = x,$$

&  $x + 2 = y$ ,

id est

$$2 + \sqrt[3]{(-4 \pm \sqrt{8})} + \frac{2}{\sqrt[3]{(-4 \pm \sqrt{8})}} = y.$$

Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum ubi  $q$  affirmativum est; vel etiam ubi  $q$  negativum est; &  $\frac{q^3}{27}$  non majus quam

$\frac{1}{4}rr$ , id est ubi due ex radicibus æquationis sunt impossibiles. At ubi  $q$  negativum

est, &  $\frac{q^3}{27}$  simul majus quam  $\frac{1}{4}rr$ , fit  $\sqrt{\left(\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27}\right)}$  quantitas impossi-

bilis, atque adeo æquationis radix  $x$  vel  $y$ , hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu tres sunt radices possibiles, quæ omnes eodem modo se habent ad æquationis terminos  $q$  &  $r$ , & indifferenter designantur per literam  $x$  vel  $y$ , adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi, qua una aliqua eruitur & exprimitur: Sed omnes tres lege præfata exprimere impossibile est.

Quantitas  $a - \frac{q}{3a}$ , qua  $x$  designatur, multiplex esse non potest, eaque de

causa

causa hypothefis quod  $x$ , hoc in cafu ubi triplex eft, æqualis effe poteft binomio  $a - \frac{q}{3a}$ , feu  $a + b$ , cujus nominum cubi  $a^3 + b^3$  conjunctim æquentur  $r$ , & triplum rectangulum  $3ab$  æquatur  $q$ , plane impoffibilis eft; & ex hypothefi impoffibili conclufionem impoffibilem colligi mirum effe non debet.

XVI. *Eft & alius modus has radices exprimendi.* Nimirum de  $a^3 + b^3 + r$ , id eft de nihilo, aufer

$$a^3 + r, \text{ feu } \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)},$$

& reftabit

$$b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}.$$

Eft itaque

$$a = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r + \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}\right)},$$

&

$$b = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r - \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}\right)};$$

vcl

$$a = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r - \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}\right)},$$

&

$$b = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r + \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}\right)},$$

adeoque horum fumma

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r + \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}r - \sqrt{\left(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}, \text{ crit } = x.$$

XVII. *Poffunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.*

Tol-



Tollendus est autem primum secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans

$$x^4 + qxx + rx + s = 0.$$

Pone hanc multiplicatione duarum

$$xx + ex + f = 0, \text{ \& } xx - ex + g = 0$$

generari; id est, eandem esse cum hac

$$x^4 * \begin{matrix} +f \\ +g \\ -ee \end{matrix} xx + \begin{matrix} eg \\ -ef \end{matrix} x + fg = 0,$$

& collatis terminis fiet

$$f + g - ee = q, \quad eg - ef = r, \quad \& \quad fg = s.$$

Quare

$$q + ee = f + g; \quad \frac{r}{e} = g - f; \quad \frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g; \quad \frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f;$$

$$\frac{qq + 2eeq + e^4 - \frac{rr}{e}}{4} (= fg) = s,$$

& per reductionem

$$e^6 + 2qe^4 + \frac{qq}{4} ee - rr = 0.$$

Pro  $ee$  scribo  $y$ , & fiet

$$y^3 + 2qyy + \frac{qq}{4} y - rr = 0,$$

æquatio cubica, cujus terminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam præcedentem, vel fecus, extrahi. Dein habita illa radice regredendum erit ponendo

$$\sqrt{y} = e; \quad \frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f; \quad \frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g;$$

& æquationes duæ

X

$$xx+ex+f=0, \text{ \& } xx-ex+g=0,$$

extractis earum radicibus, dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ

$$x^4+qxx+rx+s=0,$$

nimirum

$$x = -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee - f}, \text{ \& } x = \frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee - g}.$$

Ubi notandum est quod si æquationis biquadraticæ radices quatuor possibiles sunt, æquationis cubicæ

$$y^3+2qyy+\frac{qq}{4s}y-r=0$$

radices tres possibiles erunt, atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt.

XVIII. Sic & si æquationis quinque vel plurium dimensionum radices affectæ in radices non affectas, mediis æquationis terminis quoquo pacto sublatis, convertantur, illa radicum expressio semper erit impossibilis, ubi plures quam una radix in æquatione imparium dimensionum possibiles sunt, aut plures quam duæ in æquatione parium dimensionum, quæ per extractionem surdæ radicis quadraticæ, methodo supra exposita, reduci nequeunt.

XIX. Docuit Cartesius æquationem biquadraticam per regulas ultimo traditas reducere. E. g. proponatur æquatio a nobis supra reducta

$$x^4-x^3-5xx+12x-6=0.$$

Tolle secundum terminum scribendo  $v + \frac{1}{4}$  pro  $x$ , & oriatur

$$v^4 - \frac{43}{8}vv + \frac{75}{8}v - \frac{851}{256} = 0.$$

Ad tollendas fractiones scribe  $\frac{1}{4}z$  pro  $v$ , & oriatur

$$z^4 - 86zz + 60cz - 851 = 0.$$

Hic est

$$-86 = q, 600 = r, \text{ \& } -851 = s,$$

adeoque

$$y^3+2qyy+\frac{qq}{4s}y-r=0,$$

sub-

substitutis æquipollentibus fiet

$$y^3 - 172yy + 10800y - 360000 = 0.$$

Ubi tentando omnes ultimi termini divisores

$$1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 5; -5;$$

& deinceps usque ad 100, invenietur tandem  $y = 100$ . Quod idem multo expeditius per methodum a nobis supra expositam inveniri potuit. Dein habito  $y$ , radix ejus 10 erit  $e$ , &

$$\frac{g+ee-\frac{r}{e}}{2}, \text{ id est } \frac{-86+100+60}{2}, \text{ seu } -23 \text{ erit } f, \text{ \& } \frac{g+ee+\frac{r}{e}}{2} \text{ seu } 37 \text{ erit } g,$$

adeoque æquationes

$$xx + ex + f = 0, \text{ \& } xx - ex + g = 0,$$

scripto  $z$  pro  $x$ , & substitutis æquipollentibus, evadent

$$zz + 10z - 23 = 0, \text{ \& } zz - 10z + 37 = 0.$$

Restitue  $v$  pro  $\frac{1}{4}z$ , & orientur

$$vv + 2\frac{1}{2}v - \frac{23}{16} = 0,$$

$$\text{ \& } vv - 2\frac{1}{2}v + \frac{37}{16} = 0.$$

Restitue insuper  $x - \frac{1}{4}$  pro  $v$ , & emergent

$$xx + 2x - 2 = 0, \text{ \& } xx - 3x + 3 = 0,$$

æquationes duæ, quarum radices quatuor

$$x = -1 \pm \sqrt{3}, \text{ \& } x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}},$$

eædem sunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ sub initio propositæ

$$x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0.$$

Sed hæc facilius per methodum inveniendi divisores a nobis supra explicatam inveniri potuerunt.

# COMMENTARIUS

A D

## CAPUT V.

**S**tatim afferam regulæ in hoc capite contentæ explicationem & demonstrationem, quam a multis annis habeo, communicatam a celeberrimo *Nicolao BERNOULLIO*, olim apud *Basileenses* Juris Professore, neque hætenus publici juris factam. Similem postea tradidit acutissimus *Colin MAC-LAURIN*, in Algebra sua anglice scripta; sed testari possum hanc Bernoullianam scriptam esse ante alterius editionem.

1. In omni æquatione, fractis & surdis carente, rationalemque radicem integram habente; radix est æqualis divisori alicui termini infimæ dignitatis, seu termini in quem quantitas incognita non ingreditur.

A nobis ostensum est N°. 11. pag. 28. Tomi I.

2. Si talis æquatio habeat radicem rationalem fractam, radix hæc est æqualis fractioni, cujus numerator est divisor aliquis ultimi termini, in quo quantitas incognita est nullius dimensionis, & denominator æqualis divisori alicui coefficientis termini altissimæ dignitatis.

Sequitur facile ex præcedente N°. 1.

3. Hinc, si terminus altissimæ dignitatis sola unitate afficitur, radix æquationis rationalis necessario est quantitas integra.

Demonstratur N°. 76. pag. 27. hujus.

4. Hæc reductio in eo consistit, ut quærat an non æquatio in duas partes æquales dividi possit, quarum una sit perfectum, altera multipulum quadrati. Proponatur ex. gr. reducenda æquatio

$$x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0,$$

in qua  $p, q, r, s$ , significant quantitates, vel numeros integros affirmativos vel negativos. Hæc æquatio fingitur in duas partes dispecti

$$(xx + Px + Q)^2 = n(kx + l)^2,$$

Hoc est

$$x^4 + 2Px^3 + PPxx + 2Qxx + 2PQx + QQ = nkkxx + 2nklx + nll,$$

seu, omnibus terminis ad unam partem translatis,

$$x^4 + 2Px^3 + \frac{PPxx}{-nkkxx} + \frac{2PQx}{-2nklx} + \frac{QQ}{-nll} = 0,$$

quæ æquatio cum proposita, termino tenus, collata præbet

$$2P = p; PP + 2Q - nkk = q; 2PQ - 2nkl = r; QQ - nll = s;$$

seu

$$P = \frac{1}{2}p; Q = \frac{q - PP + nkk}{2} = \frac{q - \frac{1}{4}pp + nkk}{2} =$$

$$(\text{posito } q - \frac{1}{4}pp = \alpha) \frac{\alpha + nkk}{2}; l = \frac{2PQ - r}{2nk} = \frac{\frac{1}{2}\alpha p + \frac{1}{2}pnkk - r}{2nk} =$$

$$(\text{posito } r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta) \frac{1}{4}pk - \frac{\beta}{2nk}; ll = \frac{QQ - s}{n};$$

qui valores quantitatum  $P$ ,  $Q$ ,  $l$ , &  $ll$ , sunt illi ipsi quos NEWTONUS in Regula sua adhibet N<sup>o</sup>. III. hujus. pag. 143.

5. Præscribit præterea sequentes conditiones.

1. Quantitas  $n$  debet esse integra, non fracta.  
2. Eadem non debet esse quadratum.  
3. Eadem non debet esse divisibilis per quadratum; hæc conditio in sequentibus exemplis adjecta, in exemplo proposito per incuriam omissa fuit.

4. Eadem debet esse divisor quantitatis  $\beta$ .

5. Eadem debet esse divisor quantitatis  $2\zeta$ , existente  $\zeta = s - \frac{1}{4}\alpha\alpha$ .

6. Eadem debet esse impar, &c, per 4 divisa, unitatem relinquere, si quantitas  $p$  sit impar.

7. Item si  $r$  sit impar.

8. Eadem debet esse divisor quantitatis  $QQ - s$ .

9. Quantitas  $k$  debet esse divisor ipsius  $\frac{\beta}{n}$ , si  $p$  sit par.

10. Eadem debet esse dimidium divisoris quantitatis  $\frac{\beta}{n}$ , si  $p$  sit impar.

11. Quantitas  $Q$  debet esse divisor quantitatis  $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ , vel imparis divisoris dimidium.

6. Hic primo observandum est, quod si quantitas aliqua, de cujus divisoribus sermo est, sit fracta; NEWTONUS per divisorem intelligat divisorem numeratoris illius fractionis.

Veritas autem conditionum præscriptarum, sic demonstratur.

7. *Conditio 1.* Hæc conditio ad arbitrium assumpta est, commodioris calculi gratia, nam omnis quantitas composita per multiplicationem ex duobus Factoribus, sive integris sive fractis, quorum unus sit quadratus, alter non quadratus, semper in tales Factores resolvi potest, quorum unus sit integer non quadratus; alter quadratus, sive integer sive fractus.

8. *Conditio 2.* Si  $n$  esset quadratum, radix quantitatis  $n(kx + l)^2$  futura esset rationalis non surda, contra hypothesin.

9. *Conditio 3.* Hæc conditio etiam ad arbitrium assumitur, quia quantitas  $(kx + l)^2$  componi intelligitur ex omnibus Factoribus quadratis quantitatis  $n(kx + l)^2$ .

10. Si in æquatione  $nll = QQ - s$ , pro  $ll$  ponatur ejusdem alter valor supra inventus

$$\frac{(2PQ - r)^2}{4nnkk} = \frac{(pQ - r)^2}{4nnkk} = (\text{ob } nkk = 2Q - a) \frac{(pQ - r)^2}{4(2Q - a)},$$

proveniet

$$QQ - s = \frac{PPQQ - 2prQ + rr}{8Q - 4a},$$

sive

$$8Q^3 - 4aQQ - 8sQ + 4as = PPQQ - 2prQ + rr,$$

Hoc est

$$8Q^3 - 4aQQ - 8sQ + 4as = PPQQ - 2prQ + rr = 0,$$

$$\text{vel } (\text{ob } 4a + PP = 4Q)$$

$$8Q^3 - 4QQQ - 8sQ + 4as = 0,$$

cujus æquationis termini procedunt per potestates ipsius  $2Q$  habentes coefficientes integros, quare (per N. 1. & 3.) radix æquationis,  $2Q$ , est divisor integer quantitatis  $4as - rr$ , si scilicet hæc quantitas fuerit impar, quod non diversum est ab eo, quod NEWTONUS invenit, in *conditione* undecima. Ille enim per divisorem ipsius  $as - \frac{1}{4}rr$  intelligit divisorem inte-

grum numeratoris hujus fractionis  $\frac{4as - rr}{4}$ , cujus dimidium ponit  $= 2$ , quod idem est, ac si dixisset  $2Q$  esse divisorem ipsius  $4as - rr$ . Sed si  $4as - rr = 4qs - pps - rr$  sit par, &  $p$  etiam par, oportebit ut  $r$  quoque sit

fit par, quo casu singuli termini æquationis

$$8Q^3 - 4qQQ + 2prQ - rr = 0;$$

erunt per 4 divisibiles, & æquatio reducetur ad

$$2Q^3 - qQQ + \frac{1}{2}prQ - \frac{1}{4}rr = 0,$$

in qua singuli termini habebunt coefficientes integros; proinde (per N<sup>o</sup> 1.

& 2.) radix æquationis Q erit æqualis divisori quantitatis  $as - \frac{1}{4}rr$ , vel imparis divisoris dimidio. Quod si vero  $4as - rr$  sit par, sed p impar, poterit r esse par vel impar, prout s est par, vel impar; & quidem si s sit pariter par, id est per 4 divisibilis, erit quoque

$$4as - rr = 4qs - pp - rr,$$

& quilibet terminus æquationis per 4 divisibilis, unde idem obtinebit, quod prius; in reliquis vero casibus ubi s est impariter par, aut s & r, impares, quantitas  $4as - rr$  non poterit generaliter per 4; sed solum per 2 dividi; divisus igitur omnibus terminis per 2 prodibit æquatio

$$4Q^3 - 2qQQ + prQ - \frac{1}{2}rr = 0,$$

cujus æquationis radix Q est vel divisor quantitatis imparis  $2as - \frac{1}{2}rr$ , (per N<sup>um</sup> 1. hujus), vel æqualis fractioni, cujus numerator est divisor ejusdem quantitatis  $2as - \frac{1}{2}rr$ , & denominator divisor aliquis coefficientis 4 altissimi termini  $4Q^3$  (per N<sup>um</sup> 2.) qui divisor tamen non poterit esse 4; sed solum 2, quia, ut supra inventum est, quantitas  $2Q$  debet esse integra, quod iterum non differt a NEWTONI assertionem, quia divisor quantitatis  $as - \frac{1}{4}rr$ , in casu, ubi  $4as - rr$ , est divisibilis per 2, nihil aliud est,

quam divisor numeratoris hujus fractionis  $\frac{2as - \frac{1}{2}rr}{2}$ .

Quia  $nr = QQ - s$ , neutra quantitatum  $r$  &  $Q$  potest esse integra, nisi altera quoque simul sit integra; nam si  $r$  sit integra, erit etiam  $nr = QQ - s$  quantitas integra, quia, per Conditionem 1., quantitas  $n$  est integra, unde necessario  $Q$  est quan-

quantitas integra; & si  $Q$  sit integra, debet *nil* esse integra, quia  $QQ - s$  est quantitas integra; at quia  $n$  nequit esse multipulum quadrati  $ll$ , per Conditionem 3., non potest *nil* esse quantitas integra, existente  $ll$  fracta. Quia vero, ut antea demonstratum est, pro Conditione 11., quantitas  $2Q$  semper est integra,  $Q$  non potest alia esse fractio, quam quæ pro denominatore habet 2, unde sequetur quando  $Q$  est fracta quantitas, fore etiam  $l$  similiter fractam, id est, æqualem fractioni cujus denominator 2. Fingamus enim  $Q = \frac{1}{2}x$ , &  $l = \frac{y}{z}$ , & substituamus hos valores in æquatione  $nil = QQ - s$ , proveniet

$$\frac{nyy}{zz} = \frac{xx - 4s}{4}, \text{ seu, } n = \frac{(xx - 4s).zz}{4yy}$$

quæ quantitas non potest esse integra, secundum Condit. 1., nisi  $xx - 4s$ , sit divisibilis per  $yy$ , &  $zz$  per 4; nam, per hypothesim,  $xx$ , adeoque etiam  $xx - 4s$ , non est divisibilis per 4, nec  $zz$  per  $yy$ ; ponatur igitur  $z = 2u$ , seu  $zz = 4uu$ ; critque  $n = \frac{(xx - 4s)4uu}{yy}$ , sed quia  $\frac{xx - 4s}{yy}$  est quantitas integra, quantitas  $n$  evaderet hac ratione multipla quadrati  $uu$ , contra Conditionem 3.; quod ut vitetur, oportet  $u$  æqualem esse unitati, adeoque  $z = 2$ , &  $l = \frac{y}{2}$ . Hinc porro sequitur fore  $nyy = xx - 4s$ ; adeoque tam  $n$  quam  $yy$  esse divisorem quantitatis  $xx - 4s$ , seu numeratoris hujus fractionis  $\frac{xx - 4s}{4}$ , cui quantitas  $QQ - s$  par est. Quæ est conditio octava. Quod si vero quantitates  $Q$ , &  $l$  sint integræ, per se patet ex æquatione  $nil = QQ - s$ , esse  $n$  divisorem ipsius  $QQ - s$ .  
11. Quod si in æquatione  $nil = QQ - s$ , pro  $Q$  substituat

$$\frac{a + nkk}{2}, \text{ & } \frac{1}{4}pk - \frac{\beta}{2nk} \text{ pro } l;$$

proveniet hæc æquatio

$$\frac{1}{16}ppnkk - \frac{1}{4}p\beta + \frac{\beta\beta}{4nkk} = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ankk + \frac{1}{4}nnk^4 - s;$$

seu per  $4nkk$  multiplicando, & terminos æquationis secundum potestates ipsius  $nkk$  ordinando

$$n^3k^6 + 2annk^4 + ankkk - 4snkk - \beta\beta = 0,$$

$$- \frac{1}{4}ppnnk^4 + p\beta nkk$$

qua



quæ æquatio libera erit a fractionibus, si  $p$  fuerit par, nam

$$\frac{1}{4}pp, \text{ \& } \alpha = q - \frac{1}{4}pp, \text{ \& } \beta = r - \frac{1}{2}p,$$

erunt quantitates integræ; proinde (per *N<sup>o</sup>* 1. & 3. pag. 164.) radix æquationis  $nkk$  erit divisor integer quantitatis datæ  $\beta\beta$ : & quia  $n$  est quantitas integra, per *Condit.* 1., erit quoque  $kk$  quantitas integra (nam si fracta esset,  $n$  deberet esse multipla ipsius  $kk$ , ut  $nkk$  possit esse quantitas integra; at quia  $n$  non est divisibilis per quadratum, juxta *Condit.* 3., non potest esse eadem multipla ipsius  $kk$ ), erit igitur tam  $n$  quam  $kk$  divisor integer ipsius  $\beta\beta$ ; seu, quia nullus divisor quadratus ipsius  $\beta\beta$  potest esse  $n$ , erunt  $n$  &  $k$  divisores integri quantitatis  $\beta$ . Quæ est *Conditio* quarta. Vocetur  $h$  quotus, qui provenit dividendo  $\beta\beta$  per  $nkk$ ; five sit  $\beta\beta = hnk$ , erit  $hn$  quadratum, quia  $\beta\beta$ , &  $kk$  sunt quadrata; hinc ipse quotus  $h$  debet esse æqualis quantitati  $n$ , multiplicatæ vel divisæ per aliquod quadratum; sed posterior æqualitas locum habere non potest propter *Condit.* 3; erit igitur  $\beta\beta = hnk = nkk$  ducto in aliquod quadratum, & extrahendo utrimque radicem quadratam, erit  $\beta$  multipulum ipsius  $nk$  &  $\frac{\beta}{n}$  multipulum ipsius  $k$ , ut habet NEWTONUS. *Conditione* 9. pag. 165. hujus.

12. Porro si  $2l = \frac{pQ-r}{nk}$  sit par, debet etiam  $r$  esse par, quia  $p$  est par, per hypothesim, &  $Q$  quantitas integra ob  $l$  integram; quare si  $r$  fuerit impar, erit  $2l$ , & per consequens etiam  $2Q$  impar, & quia differentia duorum quadratorum imparium semper est divisibilis per 4, erit differentia ipsarum  $ll$ , &  $QQ$  quantitas integra, &  $QQ - s$  differet ab  $ll$  quantitate integra, proinde  $n$  seu  $\frac{QQ-s}{ll}$  erit unitas cum quantitate integra divisâ per  $ll$ , id est (quia  $2l$  est impar, &  $n$  quantitas integra per *Conditionem* 1.) unitas cum quadruplo quantitatis integræ, hoc est,  $n$  erit quantitas impar, quæ per 4 divisâ relinquit unitatem; quæ est *conditio septima*.

13. Si in æquatione  $nll = QQ - s$  substituaturs solus valor ipsius  $Q = \frac{\alpha + nkk}{2}$ , habebitur æquatio

$$nll = \frac{1}{4}\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha nkk + \frac{1}{4}nkk^2 - s;$$

seu per 4 multiplicando, & terminos secundum dimensiones ipsius  $n$  ordinando

$$k^2nn + 2\alpha kkn + \alpha\alpha - 4lln - 4s = 0,$$

in qua, ob  $2l$ ,  $k$ , &  $\alpha$ , quantitates integras per superius demonstrata (si

nempe  $p$  sit par,) omnes coefficientes potestatum ipsius  $n$  sunt quantitates integræ, unde sequitur (per Num 1.)  $n$  esse divisorem quantitatis datæ  $aa-4s$ , seu (ponendo  $\frac{1}{4}aa-s = \zeta$ ) quantitatis  $4\zeta$ , vel potius ipsius  $2\zeta$ , (quæ est *conditio* quinta,) quia divisores ipsius  $4\zeta$ , qui per quadratum 4 multiplicantur, propter Cond. 3., sunt rejiciendi.

14. Demonstratæ itaque sunt generaliter conditiones 1. 2. 3. 8. 11. ac conditiones 4. 5. 7. 9. pro hypothesi quod  $p$  sit par. Si  $p$  fuerit impar, erit  $a = q - \frac{1}{4}pp$ , quantitas fracta habens pro denominatore 4; ponatur igitur,  $a = \frac{A}{4}$ , ubi  $A$  significat quantitatem integram imparem; Similiter

$$\beta = r - \frac{1}{2}sp = r - \frac{1}{8}Ap,$$

erit quantitas fracta habens pro denominatore 8; ponatur igitur  $\beta = \frac{B}{8}$ , ubi  $B$  etiam significat quantitatem integram imparem, quibus valoribus in æquatione

$$n^3k^6 - \frac{1}{4}ppnnk^4 + \frac{2annk^4}{+} + \frac{aankk}{-} - \frac{4snkk}{+} - \beta\beta = 0,$$

pro  $a$  &  $\beta$  substitutis, habebitur

$$n^3k^6 + \frac{1}{2}Annk^4 + \frac{1}{16}AAnkk - \frac{1}{4}ppnnk^4 - \frac{4snkk}{+} - \frac{1}{8}Bpnkk - \frac{1}{64}BB = 0,$$

seu per 64 multiplicando

$$64n^3k^6 + 32Annk^4 + 4AAnkk - 16ppnnk^4 - 256snkk - 8Bpnkk - BB = 0,$$

ubi omnium terminorum coefficientes sunt integri, quapropter (per Num 1.) radix  $n$  erit divisor impar quantitatis  $BB$ , vel ipsius  $B$ , rejectis nempe divisoribus per quadratum divisibilibus (quæ sunt conditiones tertia & quarta), quod congruit cum NEWTONI assertionem, ipse enim divisor quantitatis fractæ  $\beta = \frac{B}{8}$  idem est ac divisor quantitatis  $B$ . Sed si in eadem

aqua-

æquatione  $4nkk$  habeatur pro radice, erit (per Nos 1. & 3.) non solum hæc radix  $4nkk$ ; sed & ipsa quantitas  $4kk$  divisor termini  $BB$ , hoc est  $2k$ , divisor ipsius  $B$ . Ponatur, ut supra,  $b$  quotus qui provenit dividendo  $BB$  per  $4nkk$ , sive sit  $BB = 4bnkk$ , erit  $bn$  quadratum, & ipse quotus  $b$  æqualis quantitati  $n$  ductæ in aliquod quadratum, fietque  $BB = 4nkk$  ducto in aliquod quadratum, &  $B = 2nk$  ducto in aliquam quantitatem integram, adeoque  $k$  æqualis dimidio divisoris quantitatis  $\frac{B}{n}$ . Et hæc est *conditio* decima.

15. Quia igitur  $k$  est dimidium divisoris imparis, ponatur  $k = \frac{2x+1}{2}$ ; similiter quia  $p$  est impar, ponatur  $p = 2y+1$ , & quia  $n$  est impar ponatur  $n = 2z+1$ ; eritque

$$\begin{aligned} 2Q &= a + nkk = q - \frac{1}{4}pp + nkk = q - yy - y - \frac{1}{4} + nkk = q - yy - y \\ &\quad - \frac{1}{4} + 2zkk + kk = q - yy - y - \frac{1}{4} + 2zxx + 2zx + \frac{1}{2}z + xx + x \\ &\quad + \frac{1}{4} = q - yy - y + 2zxx + 2zx + \frac{1}{2}z + xx + x, \end{aligned}$$

in qua expressione omnes termini sunt quantitates integræ si  $z$  fuerit par; sed supra demonstratum est, per condit. 11., quantitatem  $2Q$  semper esse integram, oportet igitur ut  $z$  sit par, per consequens  $n = 2z+1$ , est quantitas impar, quæ per 4 divisa relinquit unitatem. Hæc est *conditio* sexta.

16. Si resumatur æquatio

$$k^4nn + 2akkn + aa = 0,$$

(quæ supra fuit adhibita pro demonstranda conditione quinta, in hypothesi quod  $p$  sit par,) & eadem multiplicetur per 16, ita ut habeatur

$$16k^4nn + 32akkn + 16aa = 0,$$

evadent omnes termini integri (in hypothesi quod  $p$  sit impar, &  $k$  dimidium quantitatis imparis per condit. 10.), & radix æquationis  $n$  erit (per Num. 1.) divisor quantitatis

$$16aa - 64s, \text{ vel } 64s - 16aa = (\text{posito } A = 4s) 64s - AA,$$

quod non abludit a NEWTONI conditione quinta, nam ipse divisor quanti-

titatis  $2\zeta$  nihil aliud est quam divisor numeratoris hujus fractionis

$$\frac{64s - AA}{32} = 2s - \frac{1}{2}xx = 2\zeta.$$

17. Brevitatis causa omitto demonstrationem regularum pro reducendis æquationibus sex, octo, decem, & plurium dimensionum. Qui vestigiis hic positus insitet, eam haud difficulter inveniet.

18. Si altissimus terminus æquationis reducendæ pro coefficiente habeat non unitatem sed aliam quantitatem, poterit æquatio semper in aliam mutari, substituendo aliam incognitam, ita ut coefficientis altissimi termini fiat unitas, & regulæ præscriptæ ad novam æquationem applicari possint.

Sic si proponatur æquatio

$$mx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0,$$

multiplicetur ea per  $m^3$ , & fiet

$$m^4x^4 + m^3px^3 + m^3qxx + m^3rx + m^3s = 0,$$

ponatur  $mx = y$ , & habebitur

$$y^4 + py^3 + mqyy + mry + m^3s = 0,$$

ad quam æquationem regulæ præscriptæ applicari possunt. Vel multiplicentur termini æquationis solummodo per  $m$ , ut habeatur

$$mmx^4 + mpx^3 + mqxx + mrx + ms = 0.$$

Assumatur æquatio

$$(mxx + Px + Q)^2 = n(kx + l)^2,$$

quæ evoluta, & ordinata evadit

$$mmx^4 + 2mPx^3 + 2mQxx + 2PQx + QQ - nkxx - nll = 0,$$

& cum proposita termino tenus collata præbet

$$P = \frac{1}{2}p; Q = \frac{mq - \frac{1}{4}pp + nkk}{2m}; l = \frac{pQ - mr}{2nk}, \text{ \& } n = \frac{QQ - ms}{n},$$

ex quibus æquationibus sequendo methodum a nobis usurpatam similes regulæ pro determinandis valoribus quantitatum  $n$ ,  $k$ ,  $Q$ ,  $l$ , eliciuntur.

19. Hactenus BERNOULLIUS. Quoniam vero tum ipse tum MACLAURINUS altiorum regularum demonstrationem lectori quærendam

relinquunt, quod suam habet difficultatem, nonnulla addenda esse puto.  
 Coefficientes æquationis cujusvis exponam per litteras romanas minores;  
 ita ut ordinem alphabeti sequantur, & a sit coefficientis secundi termini, &c...  
 Erit ergo nunc æquatio generalis ordinis  $n$ , hujusmodi

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} \dots + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

20. Quoniam hic agitur de radice extractione, si  $n$  est numerus primus, res confici nequit. Sit igitur  $n = mr$ , & extrahenda sit radix  $m$ .ma, ut supersit æquatio ordinis  $r$ .

21. Primus a terminis addendis exponentem habebit exponentis  $m$  multiplex secundum numerum aliquem, non exclusa unitate. Patet enim polynomium ordinis  $ms$  esse posse perfectam potestatem  $m$ .mam polynomii ordinis  $s$ .

Sic, si æquatio sit quatuor, sex, octo, decem, duodecim &c; dimensionum, & quaratur radix quadrata; erit  $m = 2$ ; & primus terminorum addendorum habebit, pro æquatione quatuor dimensionum, exponentem 2; pro sex, vel 4, vel 2; pro octo vel 6, vel 4, vel 2; pro decem vel 8, vel 6, vel 4, vel 2; pro duodecim, vel 10, vel 8, vel 6, vel 4, vel 2.

Si vero æquatio sex, novem, duodecim, quindecim &c. dimensionum resolvenda sit per extractionem radice cubicæ, primus terminus addendus habebit exponentem 3; vel 6; vel 9; &c.

22. Erit ergo exponens primi termini addendi maximus  $mr - m = m(r - 1)$ , & minimus  $m$ .

23. Sed terminus, cujus exponens est  $mr - m$ , est  $m + 1$ .us æquationis propositæ; & terminus cujus exponens est  $m$ , est  $mr - m + 1$ .mus. Oportet ergo ut tot termini e proposita, quot præcedunt illum unde incipit additio, sint ipsi termini potestatis  $m$  alicujus binomii.

Quando  $m = 2$ , duo priores termini e proposita esse debent ipsi termini alicujus polynomii elevati ad secundum potestatem. Primus propositæ terminus est semper talis; sed & secundus, cujus coefficientis semper dividi potest non tantum per 2, sed per numerum quemvis.

24. Semper igitur duo priores termini æquationis reductæ per divisores sordos, erunt

$$x^r + \frac{a}{m} x^{r-1}$$

25. Si vero sit  $m$  binario major, tunc reliqui termini, qui augendum præcedunt, quales esse debeant investigandum est per theorema binomiale. Ex. gr. sit æquatio sex dimensionum

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

& ea reducenda sit per extractionem radice cubicæ. Addi debent termini quatuor, qui cubum perfectum efficere debent, & æquationem propositam

Y 3

tam pariter reddere cubum perfectum. Horum primus habebit exponen-  
tem 3; & cum a termino  $cx^3$  sint quatuor termini; quatuor pariter erunt  
addendi, qui constituent cubum binomii. Factum ponatur; & æquatio  
reducta sit

$$x^3 + \frac{a}{3}x + A = (kx + l)^3 \sqrt{n}$$

Erit, elevando ad tertiam potestatem

$$x^6 + ax^3 + \frac{a^2}{3}x^3 + \frac{a^3}{27} + 3Ax^3 + 2aAx^3 + 3A^2x^3 = n(kx + l)^3$$

Sed propositæ tribus prioribus terminis  $x^6 + ax^3 + bx^3$ , nihil additum  
est. Erit igitur

$$b = 3A + \frac{a^2}{3}; \text{ \& } A = \frac{3b - a^2}{9}$$

statim ergo oportet ut  $a$  dividi possit per ternarium; alioquin esset  $\frac{a^2}{3}$  quan-  
titas fracta; atque ideo  $2A + \frac{a^2}{3}$ , vel  $b$ ; quod est contra hypothesim; po-  
nitur enim proposita  $a$  fractionibus libera. Deinde necesse est ut excessus  
ipsius  $b$  super  $a \cdot \frac{a}{3}$ , dividi possit per ternarium. Tunc autem facile de-  
terminatur quantitas addenda. Trinomium

$$x^3 + \frac{a}{3}x + \frac{3b - a^2}{9}$$

elevetur ad tertiam potestatem. Differentia hujus potestatis & æquatio-  
nis propositæ dividatur per communes divisores, e quibus ille eligatur, qui  
præbet cubum pro quoto; factum erit quod petebatur.

Proponatur reducenda æquatio

$$x^6 + 6x^3 + 18x^3 + 27x^3 + 17x^3 + 9x + 3 = 0$$

Hic est

$$\frac{a}{3} = 2; a \cdot \frac{a}{3} = 12; b - \frac{a^2}{3} = 18 - 12 = 6; \frac{3b - a^2}{9} = \frac{36}{9} = 2 = A$$

Igitur

$$(x^3 + 2x + 2)^3 = x^6 + 6x^3 + 18x^3 + 32x^3 + 32x^3 + 24x + 8$$

Hu-

Hujus & æquationis propositæ differentia est

$$5x^3 + 15x^2 + 15x + 5$$

quam totam dividit unus numerus 5, & relinquit quotum

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

Ergo proposita reducta per extractionem radicis cubicæ, est

$$x^3 + 2x + 2 = (x + 1)^3$$

ubi quantitas  $(x + 1)^3$  positive sumenda est, quia proposita cubo minor est, ideoque per additionem complenda.

Si resolvenda proponeretur æquatio

$$x^6 - 9x^5 + 33x^4 + 1359x^3 + 7809x^2 + 15516x + 15516x + 10376 = 0$$

inveniretur

$$\frac{a}{3} = 3; a \cdot \frac{a}{3} = 27; 3b = 99; \frac{3b - aa}{9} = \frac{99 - 81}{9} = \frac{18}{9} = 2 = A$$

Est igitur

$$(x^2 - 3x + 2)^3 = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 36x + 8$$

Hujus & propositæ differentia est

$$1296x^3 + 7776x^2 + 15552x + 10368$$

negative sumenda, quia proposita cubo major est, ideoque minuenda ut fiat cubus. Hæc differentia divisa per 2, dat

$$648x^3 + 3888x^2 + 7776x + 5184$$

in qua cubi non sunt 648, & 5184. Iterum divido per 2, ut ipsa differentia divisa sit per 4; & invenio

$$324x^3 + 1944x^2 + 3888x + 2592$$

ubi rursus cubi non sunt numeri 324 & 2592. Iterum non divido per 2; tunc enim differentia divisa esset per 8, numerum cubum, & non haberetur divisor surdus. Differentiam ergo divido per 6, vel primum quotum per 3, & prodit

$$216x^3 + 1296x^2 + 2592x + 1728$$

ubi est

$$216 = 6^3; 1728 = 12^3, \frac{1296}{3} = 432 = 6^2 \cdot 12; \frac{2592}{3} = 864 = 6 \cdot 12^2;$$

quare æquatio reducta per extractionem radicis cubicæ, est

$$x^3 - 3x + 2 = -(6x + 12)\sqrt[3]{6}$$

26. Eadem æquatio sex dimensionum reducenda proponatur per extractionem radicis quadraticæ. Additio terminorum eam complementum incipere potest vel a  $bx^4$ , vel a  $dx^2$ . Incipiet ab hoc ultimo si quatuor priores termini pertineant ad quadrinomialium aliquod evectum ad secundam potestatem. Assumendum est quadrinomialium, quia radix quadratica ipsius  $x^6$  est  $x^3$ , primus nempe terminus æquationis cubicæ, quæ habet quatuor terminos. Ponatur quadrinomialium illud

$$C = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + Ax + B$$

Est

$$\begin{aligned} &+ 2Ax^4 + 2Bx^3 + aBx^2 \\ (x^3 + \frac{a}{2}x^2 + Ax + B)^2 &= x^6 + 2Ax^5 + \frac{a^2}{4}x^4 + aAx^3 + AAx^2 + 2ABx + B^2 = \\ &n(k^2x^2 + 2klx + l^2) \end{aligned}$$

& quantitas hæc posterior utrinque addenda est.

Quoniam ponimus nihil addi quatuor prioribus terminis, erit

$$b = 2A + \frac{a^2}{4}; \text{ atque } A = \frac{4b - a^2}{8}; \text{ \& } 2B + aA = 2B + \frac{4ab - a^3}{8} = c;$$

unde

$$B = \frac{8c - 4ab + a^3}{16}$$

Hoc autem si accadat, facile determinabitur quantitas addenda; secus ad regulam Auctoris est confugiendum.

Determinabitur autem quantitas addenda, definitis A & B, ut supra; hinc conficietur quadrinomialium, cujus evecti ad secundam potestatem differentia ab æquatione proposita, debet esse multiplex alicujus binomiali quadrati; quod nisi inveniatur, æquatio reduci nequit hoc pacto.

Quantitas autem complens per additionem est jungenda, quando proposita minor est quam assumpta potestas; & tunc radix erit realis; sed per sub-



ductionem quando proposita major est quam assumpta potestas, & tunc radix erit imaginaria.

Sit, ex. gr., æquatio

$$x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 16x - 17 = 0.$$

Hic est

$$a = 2; \frac{a}{2} = 1; b = 5; b - \frac{a^2}{4} = 5 - 1 = 4; A = 2; aA = 4;$$

$$c = 6; c - aA = 6 - 4 = 2; \& B = 1$$

Quare assumendum quadrinomial, evehendum ad secundum potestatem

$$(x^3 - x^2 + 2x - 1)^2 = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Hoc quadratum majus est quam proposita, quantitate

$$2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9) = 2(x + 3)^2$$

Est igitur reducta

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = (x + 3)\sqrt{2}$$

Si vero fuisset

$$x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 19 = 0$$

eadem invenirentur valores ipsarum A, & B; atque idem quadrinomial, cujus secunda potestas minor est quam æquatio proposita, quantitate eadem; nempe  $2(x + 3)^2$ ; tunc reducta fuisset

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = (x + 3)\sqrt{-2}$$

Tandem si fuisset

$$x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 10x - 4 = 0$$

differentia fuisset

$$2x^2 + 6x + 3$$

cujus termini dividi nequeunt per eundem numerum, nec dant quadratum. Quare tunc proposita per hanc methodum reduci non posset.

27. In genere, æquatio ordinis  $n = mr$ , reduci poterit per extractionem radices  $m$ ...mæ, si assumatur polynomium ordinis  $r$ ; si hujus coefficientes ad numerum  $r = 1$  determinari possint per totidem coefficientes æquationis propositæ; & si differentia inter polynomium ordinis  $r$  evectum ad

potestatem  $m$ , & æquationem propositam, sit multiplex alicujus polynomii evecti ad potestatem eandem  $m$ .

28. Determinandi sunt coefficientes ad numerum  $r - 1$ ; nam primus terminus semper est  $x^r$ ; secundi coefficientis semper est  $\frac{a}{m}$ . Sed polynomium ordinis  $r$  habet  $r+1$  terminos; e quo numero si subducatur binarius, (numerus terminorum qui statim inveniuntur,) manet  $r - 1$  numerus determinandorum.

29. Ordinis  $s$  sit polynomium, cujus evecti ad potestatem  $m$  aliquod multiplex addi debet æquationi propositæ, ut ea compleatur; illud habebit terminorum numerum  $s+1$ ; & ejusdem potestas  $m$  numerum terminorum habebit  $ms+1$ .

30. Oportet ut differentia sit multiplex hujus polynomii evecti ad potestatem  $m$ , & quidem per numerum qui non sit eadem potestas, ut inveniat divisio furdus; divisor enim rationalis inventus ponitur alio pacto, si quis adsit.

31. Differentia divisa per communem divisorem, debet esse potestas  $m$ , ut ejus radix extrahi possit, nec incognita habeatur sub signo, unde nihil conficeretur.

32. In hac hypothesis problema est determinatum, quando

$$r = \frac{ms+1}{m-1};$$

plus quam determinatum, quando

$$r \text{ superat } \frac{ms+1}{m-1};$$

& contra indeterminatum, quando

$$r \text{ deficit a } \frac{ms+1}{m-1}.$$

Nam ab exponente altissimi termini  $mr$  ad exponentem  $ms$  sunt termini numero  $mr - ms$ , qui comparantur cum totidem terminis polynomii ordinis  $r$  evecti ad potestatem  $m$ , & determinant totidem coefficientes ipsius polynomii ordinis  $r$ , inter quos nunc recenseo primum & secundum. Hujusmodi coefficientes habet polynomium ordinis  $r$  ad numerum  $r+1$ . Igitur problema erit determinatum si

$$r+1 = mr - ms; \text{ vel } ms+1 = mr - r = r(m-1); \frac{(ms+1)}{m-1} = r.$$

Si vero sit  $r+1$  minor quam  $mr - ms$ , minor erit numerus terminorum de-

determinandorum, quam numerus terminorum determinantium, & problema erit plusquam determinatum. Tunc autem  $r + 1 + ms$  minor quam  $mr$ , &  $ms + 1$  minor quam  $mr - r$ , ac  $\frac{ms + 1}{m - 1}$  minor quam  $r$ ; atque ideo  $r$  ma-

jor quam  $\frac{ms + 1}{m - 1}$ .

Contra si  $r + 1$  major est quam  $mr - ms$ , major erit numerus terminorum determinandorum, quam numerus determinantium, & problema erit indeterminatum. Tunc autem  $r + ms + 1$  major quam  $mr$ ;  $ms + 1$  major quam  $mr - r$ ; &  $\frac{ms + 1}{m - 1}$  major quam  $r$ .

Hinc liquet indeterminata esse problemata, quorum regulas tradit NEWTONUS in hoc Capite; atque ideo quantitates esse determinandas tentando.

33. Hæc tandem intelligi debent, si æquatio proposita nihil offerat quod problema determinet.

34. Hinc aliquando minui potest numerus tentaminum. Ex. gr. Si proponatur æquatio, quam pro tertio exemplo N<sup>i</sup>. III. pag. 146. hujus, affert Auctor, nempe

$$x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 27x + 9 = 0$$

considero ultimum terminum 9 esse quadratum; ut & ultimum terminum assumti trinomii, & quadrati

$$(x^2 - \frac{9x}{2} + A)^2 = x^4 - 9x^3 + 2Ax^2 - 9Ax + A^2 \\ + \frac{81}{4}x^2$$

quare pono  $A = 3$ . Hinc binomii assumti potestas secunda fit

$$x^4 - 9x^3 + \frac{105}{4}x^2 - 27x + 9$$

quæ congruit cum æquatione proposita, in omnibus terminis præter tertium. Est autem

$$\frac{105}{4}x^2 - \frac{60x^2}{4} = \frac{45x^2}{2} = \frac{5 \cdot 9x^2}{4}, \text{ unde } \frac{3x}{2}\sqrt{5}$$

est quantitas utrinque addenda æquationi reductæ, quæ est

$$x^2 - \frac{9x}{2} + 3 = \frac{3x}{2}\sqrt{5}$$

Z 2

Pror.

Prorsus ut invenit noster.

Pariter in exemplo Ni. IV. pag. 147. hujus; ultimus propositæ

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

terminus  $a^4$ , est quadratus; hujus radicem  $a^2$  ponendo pro A in assumto trinomio, invenitur

$$(x^2 - ax + a^2)^2 = x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4$$

Est autem differentia

$$(3a^2 - 2a^2 + c^2)x^2 = (a^2 + c^2)x^2$$

Quare fit reducta

$$x^2 - 2ax + a^2 = x\sqrt{(a^2 + c^2)}$$

35. Assumto polynomio ordinis  $r$ , & eo elevato ad potestatem  $m$ , possit, ejus singulos terminos comparando cum terminis æquationis generalis, determinari valores singularum litterarum græcarum, quas NEWTONUS adhibet. Quo facto quærendi superessent valores Divisorum, & leges quibus adstricti sunt. Sed præstabit rem in genere efficere pro  $m = 2$ ; vel pro reductione per extractionem radicis quadraticæ. Sit ergo æquatio generalis ordinis paris

$$x^{2r} + ax^{2r-1} + bx^{2r-2} + cx^{2r-3} + dx^{2r-4} + ex^{2r-5} + fx^{2r-6} + \&c. = 0,$$

in qua litteræ romanæ minores a; b; c; d; &c; respondent ordine minoribus p; q; r; s; &c. Auctoris; & assumatur polynomium

$$x^r + \frac{a}{2}x^{r-1} + Ax^{r-2} + Bx^{r-3} + Cx^{r-4} + Dx^{r-5} + Ex^{r-6} + \&c.$$

cujus secunda potestas æquare debet propositam ad quadratum completam.

36. Coefficientes singulorum terminorum hujus quadrati, facile determinabuntur considerando exponentes singulorum terminorum polynomii assumti conficere progressionem arithmeticam, atque ideo æquales esse summas binorum æquidistantium, & medii duplum, si eorum numerus sit impar. Quare si quæritur coefficientis termini, qui in quadrato exponentem habet numerum parem  $2r - 2s$ ; coefficientis primi termini, nempe unitas, ducatur in coefficientem termini, qui in binomio assumto exponentem habet  $r - 2s$ ; deinde coefficientis termini secundi in coefficientem termini præcedentis, cujus nempe exponens est  $r - 2s + 1$ ; & sic semper; hæc facta duplicentur, & summa dabit coefficientem quæsitum. Si vero expo-

nens

nens esset par, medius coefficientis quadrandus esset, & non duplicandus.  
Per hanc regulam inveniuntur.

terminorum in quibus est	coefficientes
$x^{2r-1}$ . . . . .	$a$
$x^{2r-2}$ . . . . .	$2A + \frac{a^2}{4}$
$x^{2r-3}$ . . . . .	$2B + aA$
$x^{2r-4}$ . . . . .	$2C + aB + AA$

& sic de reliquis.

37. Nunc si æquales essent æquatio proposita & assumti polynomii quadratum, esset, ad sinistram scribendo symbola nostra & symbola Auctoris ad dextram,

$$b = 2A + \frac{a^2}{4}; \text{ unde } b - \frac{a^2}{4} = 2A = a = q - \frac{p^2}{4};$$

Quare

$$aA = \frac{a\alpha}{2}; \text{ \& } c \pm 2B + a\alpha; c - \frac{a\alpha}{2} = 2B = \beta = r - \frac{1}{2}px.$$

Hinc

$$aB = \frac{a\beta}{2}; AA = \frac{\alpha\alpha}{4}; d = 2C + aB + AA; d - \frac{a\beta}{2} - \frac{\alpha\alpha}{4} = 2C = \gamma = s - \frac{1}{2}p\alpha - \frac{\alpha\alpha}{4}.$$

Hinc sexti termini coefficientis

$$2D + aC + 2AB = 2D + \frac{a\gamma}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} = e; e - \frac{a\gamma}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} = 2D = \delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta;$$

Et coefficientis septimi termini

$$2E + aD + 2AC + B^2 = 2E + \frac{a\delta}{2} + \frac{a\gamma}{2} + \frac{\beta\beta}{4} = f;$$

ac

$$f - \frac{a\delta}{2} - \frac{a\gamma}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = 2E = u = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}a\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta.$$

Pariter coefficientis termini octavi.

Z 3.

2R

$$2F + aE + 2AD + 2BC = 2F + \frac{ae}{2} + \frac{ad}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} = g;$$

&amp;c

$$g - \frac{ae}{2} - \frac{ad}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} = 2F = \zeta = a - \frac{1}{2}pe - \frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}\beta\gamma.$$

Sed coefficienti noni termini

$$2G + aF + 2AE + 2BD + CC = 2G + \frac{a\zeta}{2} + \frac{ae}{2} + \frac{\beta\delta}{2} + \frac{\gamma\gamma}{4} = h;$$

&amp;c

$$h - \frac{a\zeta}{2} - \frac{ae}{2} - \frac{\beta\delta}{2} - \frac{\gamma\gamma}{4} = 2G = \eta.$$

Coefficienti decimi termini

$$2H + aG + 2AF + 2BE + 2CD = 2H + \frac{a\eta}{2} + \frac{a\zeta}{2} + \frac{\beta\epsilon}{2} + \frac{\gamma\delta}{2} = i;$$

&amp;c

$$i - \frac{a\eta}{2} - \frac{a\zeta}{2} - \frac{\beta\epsilon}{2} - \frac{\gamma\delta}{2} = \theta.$$

Coefficienti undecimi termini

$$2I + aH + 2AG + 2BF + 2CE + DD = 2I + \frac{a\theta}{2} + \frac{a\eta}{2} + \frac{\beta\zeta}{2} + \frac{\gamma\epsilon}{2} + \frac{\delta\delta}{4} = k;$$

&amp;c

$$k - \frac{a\theta}{2} - \frac{a\eta}{2} - \frac{\beta\zeta}{2} - \frac{\gamma\epsilon}{2} - \frac{\delta\delta}{4} = 2I = \kappa.$$

Coefficienti termini duodecimi

$$2K + aI + 2AH + 2BG + 2CF + 2DE = 2K + \frac{a\kappa}{2} + \frac{a\theta}{2} + \frac{\beta\eta}{2} + \frac{\gamma\zeta}{2} + \frac{\delta\epsilon}{2} = l;$$

&amp;c

$$l - \frac{a\kappa}{2} - \frac{a\theta}{2} - \frac{\beta\eta}{2} - \frac{\gamma\zeta}{2} - \frac{\delta\epsilon}{2} = 2K = \lambda.$$

Coef-

Coefficiens termini decimi tertii

$$2L + aK + 2AI + 2BH + 2CG + 2DF + EE = 2L +$$

$$\frac{a\lambda}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{\beta\theta}{2} + \frac{\gamma\eta}{2} + \frac{\delta\zeta}{2} + \frac{ee}{4} = m;$$

&

$$m - \frac{a\lambda}{2} - \frac{ax}{2} - \frac{\beta\theta}{2} - \frac{\gamma\eta}{2} - \frac{\delta\zeta}{2} - \frac{ee}{4} = 2L = \mu.$$

& sic semper, Factores

$$\frac{a}{2}; \frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}; \frac{\gamma}{2}; \frac{\delta}{2}; \frac{e}{2}; \text{ \&c.}$$

jungendo ordine cum litteris græcis, quæ propius accedunt ad finem in alphabeto græco. Sic in decimo tertio erat  $\frac{a\lambda}{2}$ ; in decimo quarto erit  $\frac{ax}{2}$ ;

in decimo quinto  $\frac{a\gamma}{2}$ ; &c; & in omnibus terminis denominatis a numero impari jungendo quadratum quartæ partis litteræ eo pertinentis.

38. Nunc videndum quid accadat æquationibus singulis finitis. Et primo quidem sit  $2r = 4$ ; ac  $r = 2$ , polynomium assumtum fiet trinomium

$$x^2 + \frac{a}{2}x + A$$

quare in coefficientibus quadrati evanescent litteræ omnes post A; ut & in valoribus litterarum græcarum. Erit igitur, non mutatis coefficientibus

secundi & tertii termini, coefficiens quarti  $aA = \frac{ax}{2}$ , & manebit

$$c - \frac{ax}{2} = \beta = r - \frac{1}{2}px$$

Et ultimi coefficiens fiet

$$AA = \frac{ax}{4}; \text{ unde } d - \frac{ax}{4} = \gamma = s - \frac{ax}{4} = \zeta$$

Ut NEWTONUS N°. III. pag. 143. hujus.

39. Sit  $2r = 6$ ; ac  $r = 3$ , polynomium assumtum fiet quadrinomium

$x^3$

$$x^3 + \frac{a}{2}x^2 + Ax + B$$

& evanescantibus C; D; &c.; sicut coefficientes determinandi, manentibus duobus primis,

Tertius

$$= d - \frac{a\beta}{2} - \frac{\alpha\alpha}{4} = \gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta$$

Quartus

$$= e - \frac{\alpha\beta}{2} = d = t - \frac{1}{2}\alpha\beta = \eta; \text{ quintus } B = f - \frac{\beta\beta}{4} = \epsilon = v - \frac{1}{4}\beta\beta = \theta$$

qui valores conveniunt cum NEWTONIANIS VII. pag. 149. hujus. Ille quidem ponit ad arbitrium

$$s - \frac{1}{2}p\beta = \gamma; \gamma - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha$$

substituendo pro  $\gamma$  valorem. Addit etiam, alia de causa,

$$\zeta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \lambda$$

40. Sit  $2r = 8$ ; ac  $r = 4$ ; habebitur quinquinomium assumtum

$$x^4 + \frac{a}{2}x^3 + Ax^2 + Bx + C.$$

Evanescant igitur D; E; &c., & sicut coefficientes, manentibus tribus primis,

Quartus

$$e - \frac{a\gamma}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} = d = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta; \text{ quintus } f - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = \epsilon = v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta$$

Sextus

$$g - \beta\gamma = \zeta = w - \frac{1}{2}\beta\gamma; \text{ septimus, } h - \frac{\gamma\gamma}{4} = \eta = x - \frac{1}{4}\gamma\gamma$$

Prorsus ut NEWTONUS N° VIII. pag. 152. hujus.



41. Sit  $2r = 10$ , ac  $r = 5$ , erit sexinomium

$$x^6 + \frac{a}{2}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Evanescent igitur E; F; &c; & manentibus quatuor primis coefficientibus quales erant in N°. præcedente, fiet

Quintus

$$f - \frac{a\delta}{2} - \frac{a\gamma}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = e = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}a\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta$$

sextus

$$g - \frac{a\delta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} = \zeta = a - \frac{1}{2}a\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma; \text{ septimus } h - \frac{\beta\delta}{2} - \frac{\gamma\gamma}{4} = \eta = b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma.$$

octavus

$$i - \frac{\gamma\delta}{2} = \theta = c - \frac{1}{2}\gamma\delta; \text{ nonus } k - \frac{\delta\delta}{4} = \kappa = d - \frac{1}{4}\delta\delta$$

Quos valores reperit Auctor N°. IX. pag. 152. hujus.

42. Sit  $2r = 12$ ; &  $r = 6$ . Assumptum erit septinomium

$$x^7 + \frac{a}{2}x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

& evanescentibus F; G; &c., manebunt quatuor primi coefficientes, quales erant N°. 40., quintus qualis N°. præcedente, & fient

sextus

$$g - \frac{a\epsilon}{2} - \frac{a\delta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} = \zeta = a - \frac{1}{2}p\epsilon - \frac{1}{2}a\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$$

septimus

$$h - \frac{a\epsilon}{2} - \frac{\beta\delta}{2} - \frac{\gamma\gamma}{4} = \eta = b - \frac{1}{2}a\epsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma$$

octavus

$$i - \frac{\beta\epsilon}{2} - \frac{\gamma\delta}{2} = \theta = c - \frac{1}{2}\beta\epsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta; \text{ nonus } k - \frac{\gamma\epsilon}{2} - \frac{\delta\delta}{4} = \kappa = d - \frac{1}{2}\gamma\epsilon - \frac{1}{4}\delta\delta$$

Tom. II.

Aa

Dc.

$$1 - \frac{de}{2} = \lambda = d - \frac{1}{2}de; \text{ undecimus } m - \frac{es}{4} = \mu = e - \frac{e}{4}es.$$

Qui sunt valores inventi ab Auctore N<sup>o</sup>. X. pag. 163. hujus.

Hinc, nisi fallor, constat quomodo facile liceat *progređi in infinitum* (ut recte Newtonus N<sup>o</sup>. XI. pag. 153. hujus;) in inventione harum quantitatum. Nunc quaerenda est ratio determinandi *leges*, quibus obstringuntur & faciliora redduntur tentamina.

43. Aequationis generalis reducendae, atque ideo datae cujusvis, duo priores termini semper respondent duobus prioribus terminis polynomii assumti & quadrati (N<sup>o</sup>. 24. pag. 173. hujus). Ergo primus terminus complendus in aequatione proposita, is est qui exponentem habet  $2r - 2$ ; quandoquidem nunc agimus de reductione per extractionem radicis quadratae. Assumatur ergo polynomium

$$kx^{r-1} + lx^{r-2} + mx^{r-3} + ox^{r-4} + px^{r-5} + qx^{r-6} + sx^{r-7} + \&c.$$

Hic evchendus est ad secundam potestatem; multiplicandus per  $n$ , (numerus non quadratum, ne Divisor fiat rationalis,) in singulos terminos; & hi singuli termini jungendi sunt terminis respondentibus aequationis reducendae, ut ea fiat quadrata & aequalis quadrato polynomii assumti N<sup>o</sup>. 35. pag. 180. hujus. Hinc complebuntur coefficientes inventi N<sup>o</sup>. 36 ... 42. pag. 181...186. hujus.

44. Coefficientes polynomii N<sup>i</sup>. praecedentis, evedti ad secundam potestatem, facile determinantur per N<sup>um</sup> 36. pag. 180. hujus; & terminorum, quorum exponentes sunt

$$2r - 2; 2r - 3; 2r - 4; 2r - 5; 2r - 6; 2r - 7; 2r - 8; \&c.,$$

coefficientes multiplicati per  $n$ , ordine, erunt

$$nk^2; 2nkl; 2nkm + n^2; 2nko + 2nlm; 2nkp + 2nlo + nm^2; \&c.$$

Quare coefficientes completi aequationis reducendae, & vere aequales coefficientibus quadrati polynomii assumti, erunt haec

$$b + nk^2 = 2A + \frac{a^2}{4}; c + 2nkl = 2B + aA; d + 2nkm + n^2 = 2C + aB + AA; \\ e + 2nko + 2nlm = 2D + aC + 2AB; f + 2nkp + 2nlo + nm^2 = 2E + aD + 2AC + B^2; \&c.$$

45. Nunc idem polynomium N<sup>i</sup>. 43., a sine descriptum, sit

$$x + yx + wx^2 + ux^3 + vx^4 + sx^5 + \&c.$$

coefficientes terminorum, in quibus  $x$  exponentes habet

$$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; \&c.$$

erunt, ordine, per  $n$  multiplicandi,

$$x^2; 2xy; 2xw + y^2; 2xv + 2yw; 2xt + 2yu + wv; 2zs + 2yt + 2wv; \&c.$$

46. Polynomium assumptum, cujus secunda potestas æquare debet propositam, postquam completa fuerit, pariter a fine descriptum, sit

$$S + Rx + Qx^2 + Px^3 + Ox^4 + Mx^5 + \&c.$$

& coefficientes terminorum, de quibus igit  $N^{\text{us}}$  præcedens, erunt

$$S^2; 2SR; 2SQ + R^2; 2SP + 2RQ; 2SO + 2RP + Q^2; \\ 2SM + 2RO + 2QP; \&c.$$

47. Tandem æquatio proposita & complenda, pariter a fine descripta, sit

$$u + tx + sx^2 + rx^3 + qx^4 + px^5 + \&c.$$

Erit

$$u + nx^2 = S^2; \text{ atque } S^2 - u = nx^2$$

48. Quare  $n$  est unus e divisoribus ipsius  $S^2 - u$ ; & quidem ita ut quotiens sit quadratus; ut præcipit NEWTONUS, dicens N<sup>o</sup>. III.; pag. 144. hujus, *tenta si n dividat QQ — s, & quoti radix sit rationalis*; & idem præcipiens de  $RR - v$ , N<sup>o</sup>. VII. pag. 159. hujus; & in genere N<sup>o</sup>. X. pag. 153. hujus, *quære numerum quadratum, cui per n multiplicato ultimus æquationis (reducendæ) terminus sub proprio signo adnexus quadratum numerum efficit*. Nam in genere & pro omnibus æquationibus intelligenda sunt hæc verba, ut patet, quoniam in genere est

$$u + nx^2 = S^2.$$

49. Quod autem præcipit Auctor, N<sup>o</sup>. XI. pag. 153. hujus ut, ad inveniendum numerum quadratum, cui per  $n$  multiplicato ultimus æquationis reducendæ terminus sub proprio signo adnexus quadratum numerum efficiat, ipsi ultimo termino reducendæ, ubi  $n$  est par, vel ejusdem quadruplo, ubi  $n$  est impar, successive addantur

$$n; 3n; 5n; 7n; 9n; 11n; 13n; 15n; \&c.,$$

& deinceps, donec summa æqualis fiat alicui numero quadrato, non sic intelligendum est quasi hæc summæ esse debeant, ordine, ubi  $n$  est par, ponendo,

A a 1

do,

do, more nostro, u pro ultimo cujusvis æquationis reducendæ termino,

$$u + n; u + 3n; u + 5n; u + 7n; u + 9n; u + 11n; \&c.$$

sed ut cuique summæ addatur terminus sequens in serie allata; ita ut ex summæ sint, ordine

$$u + n; u + n + 3n = u + 4n; u + 4n + 5n = u + 9n; \&c.$$

Idem facile intelligitur quando  $n$  est impar, ponendo nempe  $4u$ , pro  $u$ .  
50. Constat summam numerum imparium e serie naturali arithmetica desumptorum, conficere semper numerum quadratum. Ergo ex Auctoris præscripto, habetur semper numerus quadratus per  $n$  multiplicatus. Sit enim series

$$1; 3; 6; 7; 11; \dots 1 + 2C$$

quoniam differentia est 2, erit  $C$  numerus differentiarum. Sed, post primum, qui nullam habet differentiam, tot sunt termini, quot differentiæ, erit ergo omnino numerus terminorum  $C + 1$ ; quare summa progressionis erit

$$\frac{(2C + 1 + 1)(C + 1)}{2} = (C + 1)^2$$

51. Consideremus attentius coefficientes descriptos in fine Ni. 44. pag. 186. hujus. Erat primo

$$b + nk^2 = 2A + \frac{a^2}{4}; \& b - \frac{a^2}{4} + nk^2 = 2A = a + nk^2$$

per Num 37. pag. 181. hujus. Hinc

$$a = 2A - nk^2$$

&  $a$  dividi nequit per  $n$ , nec per  $k$ , nisi  $A$  sit per  $n$  vel per  $k$  divisibilis, vel  $A = 0$ .

52. Est autem eadem quantitas

$$2A - b + \frac{a^2}{4} - nk^2$$

coefficientis tertii termini; & quando  $a$  est impar, etiam  $\frac{a^2}{4}$  impar est & fractus; integer autem est

$$b = 2A + \frac{a^2}{4} - nk^2$$

Igitur, aut

$$2A + \frac{a^2}{4} = 0; \text{ aut } \frac{a^2}{4} - nk^2 = 0; \text{ aut vel } 2A + \frac{a^2}{4}; \text{ vel } \frac{a^2}{4} - nk^2$$

dividi poterunt per 4. Sed neque primum, neque secundum, neque tertium fieri potest, si A est quantitas integra; manet ergo ultimum.

Non primum, quia tunc  $\frac{a^2}{4} = -2A$ ; est autem  $\frac{a^2}{4}$  numerus impar, per hypothesim; & 2A est semper par. Efficit igitur numerus impar æqualis pari.

Non secundum, quia tunc  $\frac{a^2}{4} = nk^2$ ; &  $\frac{a^2}{4k^2} = n$ ; & n esset numerus quadratus, contra conditionem secundam.

Non tertium; sit enim, si fieri potest

$$2A + \frac{a^2}{4} = x, \text{ numero integro. Ergo } 8A + a^2 = 4x$$

sed 8A est ut & 4x numerus par: a' impar, & summa vel differentia duorum numerorum, paris & imparis, semper est impar, quæ tamen æquare debet numerum parem 4x.

Hinc aliquando minuitur numerus tentaminum; nam dispiciendum est

$$\text{an } \frac{a^2}{4} - nk^2 \text{ conficiat numerum divisibilem per quaternarium.}$$

§3. Erat secundo.

$$c + 2nkl = 2B + 2A; \text{ vel, } \frac{c + nkl - 2B}{2} = A = \frac{x + nk^2}{2}$$

per Num 37. Unde

$$c - \frac{2x}{2} + 2nkl - \frac{2nk^2}{2} = 2B = 2nkl - \frac{2nk^2}{2} + \beta$$

per eundem Num 37. Quare

$$\beta = 2B + nk\left(\frac{ak}{2} - 2l\right)$$

& neque  $\beta$  dividi poterit per n, neque per k, nisi sit vel B divisibilis per n vel per k, vel B = 0.

§4. Tertio erat

$$d + 2nkm + nl^2 = 2C + aB + AA$$

Aa 3.

&

&amp;

$$d + 2nkm + nl^2 - 2C - aB = AA = \left(\frac{a + nk^2}{2}\right)^2$$

Ideo

$$d - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{ank^2}{2} - \frac{n^2k^4}{4} + \frac{2nkm + nl^2 - 2C}{a} = B = nkl - \frac{ank^2}{4} + \frac{\beta}{2}$$

per Num præcedentem. Hinc

$$d - \frac{a\beta}{2} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{ank^2}{2} - \frac{n^2k^4}{4} + 2nkm + nl^2 + \frac{a^2nk^2}{4} - ankl = 2C =$$

$$\gamma - \frac{n^2k^4}{4} + k^2\left(\frac{a^2n}{4} - \frac{an}{2}\right) + k(2nm - anl) + nl^2$$

per Num 37., vel tandem

$$\gamma = 2C + n\left(\frac{nk^4}{4} + k^2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}\right) + k(2m - al) + l^2\right)$$

&  $\gamma$  dividi non poterit per  $n$ , nisi vel  $C$  dividi possit per  $n$ , vel fit  $C = 0$ .  
Sed  $\gamma$  tunc dividetur per  $k$  quando  $l = 0$  & præterea vel  $C$  divisibilis per  $k$ , vel  $C = 0$ .

§§. Erat quarto

$$c + 2nko + 2mlm = 2D + aC + 2AB$$

Est autem

$$aC = \frac{2\gamma}{2} - \frac{an^2k^4}{8} + k^2\left(\frac{a^3n}{8} - \frac{aan}{4}\right) + k(anm - \frac{a^2ml}{2}) + \frac{2nl^2}{2}$$

&amp;

$$2AB = \frac{a\beta}{2} - \frac{an^2k^4}{4} + n^2k^2l + k^2\left(\frac{\beta n}{2} - \frac{aan}{4}\right) + ankl$$

Erit igitur

$$c + 2nko + 2mlm = 2D + \frac{a\beta}{2} + \frac{a\gamma}{2} - \frac{3an^2k^4}{8} + n^2k^2l + k^2\left(\frac{a^3n}{8} - \frac{aan}{2} + \beta n\right) + k\left(anm - \frac{a^2nl}{2} + anl\right) + \frac{anl^2}{2}$$

Hinc

Hinc

$$2D = \frac{3an^3k^4}{8} - n^3k^3l - k^2 \left( \frac{a^3n}{8} - \frac{aan}{2} + \frac{\beta n}{2} \right) - k(anm - \frac{a^2nl}{2} + anl - 2no) \\ + c + 2nlm + \frac{anl^2}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} \\ \&c$$

$$2D - \frac{3an^3k^4}{8} + n^3k^3l + k^2 \left( \frac{a^3n}{8} - \frac{aan}{2} + \frac{\beta n}{2} \right) + k(anm - \frac{a^2nl}{2} + anl - 2no) \\ + 2nlm + \frac{anl^2}{2} = c - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} = d$$

per Num 40. pag. 184. hujus. Quare neque  $d$  dividi poterit per  $n$ , nisi sit aut  $D$  per  $n$  divisibilis, aut  $D = 0$ ; neque per  $k$ , nisi evanescat  $2nlm + \frac{anl^2}{2}$ , &c præterea vel  $D$  dividatur per  $k$ , vel iterum sit  $D = 0$ .

§6. Quinto erat

$$f + 2nkp + 2nlo + nm^2 = 2E + aD + 2AC + BB$$

Est autem

$$aD = \frac{3a^2n^3k^4}{16} - \frac{a^2k^3l}{2} + k^2 \left( -\frac{a^4n}{16} + \frac{aan}{4} - \frac{a\beta n}{4} \right) + \\ k \left( -\frac{a^2nm}{2} + \frac{a^2nl}{4} - \frac{aanl}{4} + ano \right) + anl m + \frac{a^2nl^2}{4} + \frac{\alpha\delta}{2} \\ \&c$$

$$2AC = -\frac{n^3k^6}{8} + k^4 \left( \frac{a^2n^2 - 2an}{8} \right) + k^3 \left( nm - \frac{n^2al}{2} \right) + k \left( \frac{nan^2}{8} - \frac{na^2}{4} + \frac{n^2l + n\gamma}{2} \right) \\ + k \left( nanm - \frac{aanl}{2} \right) + \frac{anl^2}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2}$$

atque

$$BB = \frac{n^3a^3k^4}{16} - \frac{n^3ak^3l}{2} + k^2 \left( n^2l^2 - \frac{n\alpha\beta}{4} \right) + nkl\beta + \frac{\beta\beta}{4}$$

Quare

$$f + 2nkp + 2nlo + nm^2 = 2E - \frac{n^3k^6}{8} + k^4 \left( \frac{3a^2n^2}{8} - \frac{3an^2}{4} \right) + \\ k^3 \left( nm - \frac{3an^2l}{2} \right) + k^2 \left( \frac{3n^2l^2}{2} + \frac{3a^2an}{8} - \frac{a^2n}{4} - \frac{a^4n}{16} - \frac{3a\beta n}{4} + \frac{n\gamma}{2} \right) +$$

$k(anm)$

$$k(nm - anl - \frac{a^2nm}{2} + \frac{a^2nl}{4} + ano + \beta nl) + \frac{anl^2}{2} +$$

$$anlm + \frac{a^2nl^2}{4} + \frac{\alpha\gamma}{2} + \frac{\alpha\delta}{2} + \frac{\beta^2}{4}.$$

Unde facile deducetur, quod

$$f - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\alpha\delta}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = 0$$

per Num 41. pag. 185. hujus, dividi nequit per  $n$ , nisi vel E dividatur per  $n$ , vel E = 0; neque per  $k$ , nisi

$$\frac{anl^2}{2} + anlm + \frac{a^2nl^2}{4} - 2nlo - nm^2 = 0$$

& præterea vel E dividi possit per  $k$ , vel rursus E = 0.

57. Inspiciendo coefficientes descriptos N°. 44. pag. 186. hujus, constabit tot esse coefficientes, qui dividi nequeunt per  $n$ , nisi præcedentes omnes vel nihilo æquantur vel per  $n$  dividi possint, quot sunt litteræ A; B; C; &c. in polynomio ordinis  $r$ , quod eventum ponitur ad secundam potestatem. Sunt autem in eo hujusmodi litteræ ad numerum  $r-1$ ; quia polynomium illud habet terminos numero  $r+1$ ; quorum primus coefficientem habet unitatem; secundum datum  $a$ . Nunc constat idem accidere litteris græcis  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$ ;  $\delta$ ; &c.

Quare, recte monet Auctor N°. III. pag. 143. hujus,  $n$  non quærendam inter divisores unius  $\alpha$ , quando æquatio reducenda est quatuor dimensionum; tunc enim  $r-1 = 1$ .

Et N°. VII. pag. 149. hujus, non quærendam inter divisores duarum priorum (unam enim ibi addit frustra), quia tunc  $r-1 = 2$ ; æquatio nempe reducenda est sexti ordinis. Item N°. VIII. pag. 152. hujus, non quærendam inter divisores trium priorum. Nam æquatio reducenda est octo dimensionum, &  $r-1 = 3$ . Quod etiam observat in numeris sequentibus.

58. Reducenda ordinis  $2r$  habet  $2r$  coefficientes; pro singulis habentur singulæ substitutiones demto primo. Habebuntur ergo litteræ græcæ  $2r-1$ . Sed assumpta ordinis  $r$  habet coefficientes determinandos  $r-1$ . Erunt ergo  $2r-r+1-1 = r$ ; litteræ græcæ, in quarum valoribus nihilo æquales erunt  $r$  posteriores litteræ in assumpta, nempe

S; R; Q; P; O; &c.

quare hi valores ad numerum  $r$ , habebunt  $n$  pro communi divisore. Hæc optime congruunt cum iis quæ tradit Auctor N°. III. pag. 141. N°. VII. pag.



pag. 149. N°. IX. pag. 152. N°. X. pag. 153. hujus. Patet autem progressus in infinitum, quia si æquatio reducenda sit in genere ordinis  $2r$ , quærendus est numerus  $n$  communis divisorum quantitatum, in genere descriptarum N°. 37. pag. 181. hujus, ad numerum  $r$ .

§9. Jam in omni tentamine, cujusvisque ordinis sit æquatio reducenda, poni debet

$$A = \frac{\alpha + nk^k}{2}, \text{ per Num. §1. pag. 181. hujus.}$$

$$B = \frac{-\alpha nk^k + 2\beta}{4} + nkl, \text{ per Num. §3. pag. 189. hujus.}$$

$$C = \frac{d - AA - aB + nl^2}{2} + nkm, \text{ per Num. §4. pag. 190. hujus.}$$

$$D = \frac{c - aC}{2} - AB + nko + nlm, \text{ per Num. §5. pag. 190. hujus.}$$

$$E = \frac{f - BB - aD - nm^2}{2} - AC + nkp + nlo, \text{ per Num. §6. pag. 191. hujus.}$$

Et sic semper, donec deveniatur ad ultimam litteram S, cujus valor  $V(u + nz')$  inventus est N°. 48. pag. 187. & N°. 49. 50. pag. 187. 188. hujus. Dispicendum igitur est an hi duo valores conveniant, quoniam uterque determinatus est per conjecturam; ultimus quidem via explanata N°. 43. & 50. citatis; primus via explananda dum tradetur quomodo detegendi sint valores ipsarum  $k$ ;  $l$ ;  $m$ ;  $o$ ; &c. Ex his, quæ generalia sunt, facile deducuntur præcepta peculiaria, quæ pro æquatione octo dimensionum tradit noster N°. XI. pag. 154. hujus; observando illum scribere Q ubi nos A; illum R ubi nos B; convenire in ultimo termino S, & in æquatione reducenda me non iisdem uti symbolis, quibus Newtonus.

60. Quod autem addit loco citato, esse debere  $b$  (nos dicimus  $z$ ); numerum ipsi S respondentem, æqualem his tribus

$$\frac{2RS - w}{2nm}; \frac{2QS + RR - v - nm^2}{2nl}; \frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$$

facile deducitur in genere e coefficientibus, quos incipiendo ab ultimo termino, descripsimus N°. 45. & 46. pag. 186. hujus: unde patet esse pro termino secundo ab ultimo

$$2mzy + t = 2SR; \text{ atque } z = \frac{2SR - t}{2ny};$$

pro tertio versus primum  
Bb

$$2nzw + ny^3 + s = 2SQ + R^3, \text{ \& } z = \frac{2SQ + R^3 - s - ny^3}{2nw};$$

pro quarto pariter versus primum

$$2nzv + 2nyw + r = 2SP + RQ; \text{ \& } z = \frac{2SP + 2RQ - r - 2nyw}{2nv}$$

Ex eodem numero facile deducuntur reliqui valores, quorum ultimus ille erit, qui habebit uS, & ut noster pS.

Quoniam autem litteræ majores determinandæ sunt numero  $r - 1$ ; & ultima S ordine jungitur cum præcedentibus, ad numerum  $r - 2$ , & præterea cum a, coefficiente secundi termini in reducenda; erunt ergo hujusmodi valores ad numerum  $r - 1$ . Sic auctor loco citato invenit tres pro æquatione octo dimensionum; quatuor erunt pro decem; quinque pro duodecim; atque ita porro.

61. Quod autem S jungatur cum præcedentibus coefficientibus sui polynomii, nempe cum R; Q; P; &c.

Et quod A; B; C; &c. jungantur cum sequentibus; item quod z jungatur cum y; w; v; &c; quod k; l; m &c. jungantur cum sequentibus, & ad quem numerum facile constat e formatione secundæ potestatis. Nam

Polynomium assumtum

$$x^r + \frac{a}{2}x^{r-1} + Ax^{r-2} + Bx^{r-3} + Cx^{r-4} + Dx^{r-5} + Ex^{r-6} + \&c.,$$

cujus quadratum æquari debet propositæ, postquam ea completa fuerit, habet litteras majores A; B; &c., determinandas ad numerum  $r - 1$ , (Nº. 57. pag. 192. hujus). Harum quævis, in quadrato, per multiplicationem jungitur cum coefficientibus omnium polynomii quadrandi terminorum, primo non excluso; invenietur ergo in  $r + 1$  terminis quadrati. Habet autem quadratum illud terminos numero  $2r + 1$ . Sunt ergo omnino termini numero  $r$ , e quibus abest littera quævis; & demto primo  $x^{2r}$ , qui coefficientem habet unitatem; demto pariter secundo, qui habet coefficientem a determinatum, manent termini numero  $r - 2$ , e quibus abest littera quævis major determinanda.

Est itaque prima A in  $r + 1$  primis terminis quadrati, incipiendo a tertio ejusdem termino; abest ab  $r - 2$  posterioribus. Ultima S invenitur in ultimis terminis  $r + 1$ ; abest ab  $r - 2$  prioribus. Secunda B est in  $r + 1$  primis terminis quadrati incipiendo a quarto; abest a tertio, & ab  $r - 3$  posterioribus. Penultima R invenitur in  $r + 1$  ultimis terminis, quorum primus est quadrati penultimus, abest ab ultimo & ab  $r - 3$  prioribus, &c. semper intelligendo quamvis litteram abesse a duobus primis.

62. Sed aliud assumtum polynomium, quadrandum & postea per  $n$  multiplicandum, nempe

$$kx^{r-1} + lx^{r-2} + mx^{r-3} + ox^{r-4} + px^{r-5} + qx^{r-6} + sx^{r-7} + \&c.$$

terminos habet numero  $r$ , & totidem coefficientes determinandos  $k$ ;  $l$ ;  $m$ , &c. Horum quisque per multiplicationem jungitur cum sequentibus, quorum numerus est  $r - 1$ . Sed & quisque coefficientis quadrandus est, vel (quod idem est) quisque coefficientis jungitur cum omnibus, illo ipso non excluso; inveniatur igitur in terminis numero  $r$ . Illud autem polynomium quadratum terminos habet numero  $2r - 1$ ; quare quilibet coefficientis abest a terminis numero  $r - 1$ .

Sic  $k$  erit in  $r$  prioribus, & abest ab  $r - 1$  posterioribus;  $l$  erit in  $r$  prioribus, incipiendo a secundo, & abest a primo & ab  $r - 2$  posterioribus;  $m$  erit in  $r$  prioribus, incipiendo a tertio, & abest a primo, a secundo, & ab  $r - 3$  posterioribus: &c.

63. Cum per  $N^{um}$  47. pag. 187. hujus, sit

$$u + nz^2 = S^2 = u + n(C+1)^2$$

per  $N^{um}$  50. pag. 188. hujus; erit

$$z = C+1$$

& numerus  $z$  (vel  $h$  apud nostrum N<sup>o</sup>. XI. pag. 153. hujus) definitur ex numero additionum, quæ fiunt ad ultimum propositæ terminum, secundum  $N^{um}$  49. pag. 187. hujus, eoque vel integro vel dimidiato.

Sic in exemplo, quod loco citato affert Auctor, ut fiat  $S^2 = 0$ , duæ sunt faciendæ additiones,

$$\text{prima} - 20 + 5 = -15; \text{secunda} - 15 + 15 = 0$$

& numerus ipsi  $S$  respondens est  $1 = \frac{2}{2}$ , quia nempe  $n$  est impar. Pariter ut inveniatur  $S^2 = 25$ , tres faciendæ sunt additiones, nempe duæ jam descriptæ, & præterea  $0 + 25 = 25$ , &  $\frac{3}{2}$  est numerus tunc ipsi  $S$  respondens.

64. Ex eadem æquatione facile conficitur esse  $S$  quantitatem integram, ubi  $z$  est integra, & vicissim.

Nam æquatio reducenda ponitur a fractionibus libera; ideo est  $u$  quantitas integra; integra pariter ponitur  $n$ ; ergo &c.

65. Nunc dico quod, si  $S$  est quantitas fracta, nullum alium denominatorem habere potest, quam binarium; & quod tunc  $n$  est numerus impar atque unitate superans multiplicem quaternarii. Nam, quia est  $u$  quantitas integra, &

$$u = S^2 - nz^2$$

quantitas integra debet esse  $S^2 - nz^2$ ; quare si fractæ sunt  $S$  &  $z$ , necessario habebunt eundem denominatorem; unius pars alteram destruet, & reliqua conficiet quantitatem integram. Ponatur

$$S = \frac{A}{B}; \text{ \& } z = \frac{A' + C}{B}.$$

Erit

$$S^2 - nz^2 = \frac{A^2 - nA' + 2nAC - nC^2}{B^2} = u.$$

Ut hujus quantitatis pars destruat ipsam  $\frac{A^2}{B^2}$ , oportet ut  $n$  exponatur per numerum aliquem unitate auctum; sit

$$n = D + 1$$

substitutione facta, erit

$$u = \frac{A^2 - DA - A' + 2DAC + 2AC - DC^2 - C^2}{B^2}$$

&, delendo quæ se destruant,

$$u = \frac{DA' + 2DAC + 2AC - DC^2 - C^2}{B^2}$$

quæ debet esse quantitas integra. Statim constat poni non posse

$$n = D + 1; \text{ tunc enim } A' - (D + 1)A' = A' - DA' + A,$$

neque pars partem destrueret. Debet autem reliqua quantitas esse integra. Si  $A$  &  $D$  ponantur divisibiles per  $B$ ; ex. gr.

$$A = BE \text{ \& } D = BF, \text{ manebit } \frac{2AC + DC^2 + C^2}{B} = \frac{2EC + FC^2}{B} + \frac{C^2}{B^2}$$

Præterea erit  $S = \frac{A}{B} = E$ , quantitas integra, & manebit  $u$  quantitas fracta.

Si  $A$  &  $C$  ponantur divisibiles per  $B$ , erunt tum  $S$  tum  $z$  quantitates integre.

Igitur nullo pacto fieri potest ut sit  $B$  divisor ipsius  $A$ . Cum tamen quantitas supra descripta debeat esse integra, ponatur  $D = B'F$ ; habebitur

$$u = \frac{AF^2}{B^2} \mp \frac{ACF}{B^2} \mp \frac{2AC}{B^2} \frac{C^2}{B^2} \mp CF$$

unde vel  $2AC$  &  $C^2$ , vel tum  $C$  tum  $C^2$ , dividuntur per  $B^2$ . Si non  $C$  sed  $2AC$  dividitur per  $B^2$ , erit  $B = 2$  &  $C = 2G$ .

Si tum  $C$  tum  $C^2$  dividuntur per  $B^2$ ; quoniam coefficientis termini penultimi præbere debet quantitatem integram; & ille dat

$$t = 2SR - 2nzy = \frac{2AR}{B} - 2nzy$$

etiam  $R$  dividuntur per  $B$ . Hinc per coefficientem tertii termini, ab ultimo, etiam  $Q$  demonstrabitur divisibilis per  $B$ , & procedendo versus primos terminos, reliquæ litteræ majores, donec perveniatur ad  $A$ ; quæ pariter dividi debet per  $B$ , vel, quod idem est, esse ejus multiplex; non ergo erit  $A$  nec  $2A$  quantitas fracta.

Tunc autem (Nº. 52. pag. 188. 189. hujus),  $\frac{a^2}{4} - nk^2$  dividi debet per 4; ita ut fractio  $\frac{a^2}{4}$  deleatur, & maneat quantitas integra, ponatur ergo

$$k = x \pm \frac{a}{2}, \text{ manente } n = D + 1 = B^2F + 1$$

eritque

$$\frac{a^2}{4} - nk^2 = + \frac{a^2}{4} - B^2Fx^2 \mp B^2Fax \mp ax - \frac{B^2Fa^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

ubi quantitas integra esse debet  $\frac{B^2Fa^2}{4}$ ; nequit autem nisi  $B = 2$ , quod erat unum.

66. Demonstratum autem est esse

$$n = D + 1 = B^2F + 1; \text{ ergo } n = 4F + 1$$

Quod erat alterum.

67. Nunc substituendo 2 pro  $B$ , fiet

$$u = \frac{A^2}{2} \mp 2AC \mp \frac{AC}{2} \mp \frac{C^2}{4} \mp CF$$

& debent integræ esse  $\frac{AC}{2}$  ac  $\frac{C^2}{4}$ ; ergo

Bb 3

C=

$$G = 2G; \text{ crit } z = \frac{A \mp G}{2} = \frac{A}{2} \pm G$$

Quare

$$u + nz^2 = S^2 = u + (4E + 1) \left( \frac{A}{4} \pm AG + G^2 \right)$$

&

$$4S^2 = 4u + (4E + 1) (A^2 \pm 4AF + F^2)$$

Igitur quando valor ipsius  $S$  investigandus est per additionem præscriptam N. XI. pag. 153; hujus, atque ideo per numeros integros, additio imparium ipsius  $n$  multiplosum fieri debet non ad ultimum reducendæ terminum, sed ad ipsius quadruplum; & quadrati sic inventi radix erit  $2S$ , ut monet noster loco citato.

68. Hic, puto, locus est explicandi ratiocinium *Bernoullianum* N°. 12. pag. 169. hujus, quod mihi quidem obscurius videtur. Ibi ponitur  $p$ , symbolis Auctoris, & a nostris, numerus par; impar autem  $r$  vel  $t$ , & demonstratum est esse  $k$  numerum integrum. Demonstratum est esse  $2l$  expressionem fallacem, quæ mentitur numerum parem, cum revera sit impar.

Nam, quia  $p$  est par  $= 2A$ ; integer erit  $\frac{pp}{4} = A$ ; quare  $q - \frac{pp}{4} = q - A = a$ , erit numerus integer; par vel impar nihil refert; ergo tum  $ap$ , tum  $pQ$  erunt pares. Sed  $r$  impar est, per hypothesim; ergo  $pQ - r$  est numerus impar.

Jam, aut  $\frac{ap}{2}$  est par, aut impar; si par, impar erit  $r - \frac{ap}{2} = \beta$ . Sed  $n$  esse debet numerus integer, & divisor ipsius  $\beta$ ; ergo  $n$  impar est.

Si  $\frac{ap}{2}$  impar est, oportet ut impares sint tum  $\frac{p}{2}$  tum  $a$ ; ergo  $\frac{aa}{4}$  est quantitas fracta; quare  $\zeta = s - \frac{aa}{4} = \frac{4s - aa}{4}$ .

Par autem est  $4s$  &  $aa$  impar, ac  $n$  sumitur divisor denominatoris; qui constituit valorem ipsius  $\zeta$  vel  $2\zeta$ ; ergo  $n$  impar est; ut &  $k = \frac{\beta}{n}$ . Quare etiam  $nk$  est impar. Sed

$$2nkl = pQ - r$$

est impar, quia  $pQ - r$  impar est; impar est factor  $nk$ ; igitur &  $2l$  impar est, quamvis speciem præbeat numeri paris. Sit ergo.

$$69. 2l = 2y \pm 1; \text{ crit } l = \frac{2y \pm 1}{2}; \text{ \& } nl^2 = \frac{4ny^2 \pm 4ny + n}{4} = QQ - s$$

&

& est  $s$  quantitas integra; quare  $Q$  est quantitas fracta denominatorem habens 2; atque hujus fractionis numerator est impar. Sit

$$70. Q = \frac{2x \pm 1}{2}, \text{ erit } QQ - s = \frac{4x^2 \pm 4x + 1 - s}{4} = n \left( \frac{4y^2 \pm 4y + 1}{4} \right)$$

Erit

$$n = \frac{1 \pm 4x + 4x^2 - 4s}{1 \pm 4y + 4y^2} = 1 + 4 \left( \frac{4x + x^2 - s - y - y^2}{1 \pm 4y + 4y^2} \right)$$

Debet autem  $n$  esse numerus integer, quare ad integrum revocabitur fractio valoris præcedentis, &  $n$  æquabit quadrupli multiplum auctum unitate.

71. Hæc recte procedunt quando fractio

$$\frac{\pm x + x^2 - s - y - y^2}{1 \pm 4y + 4y^2}$$

(quæ præbere debet numerum integrum, & per 4 multiplicata unitati jungenda est ut inveniatur ipsius  $n$  valor) est positiva. Si vero ea esset negativa, tunc valor ipsius  $n$  esset negativus, & deberet  $n$  unitate minor esse quam aliquis multiplex quaternarii; atque æquatio reduceretur per radicem quadraticam imaginariam. Vclut si, proponeretur æquatio

$$x^4 - 3x^3 + 44x^2 - 123x + 97 = 0.$$

Hic est

$$a = -3; \frac{a}{2} = -\frac{3}{2}; \frac{a^2}{4} = +\frac{9}{4}; b = +44; c = -123; d = +97$$

Ideo

$$b - \frac{aa}{4} = 44 - \frac{9}{4} = \frac{176 - 9}{4} = \frac{167}{4} = \alpha; \frac{aa}{2} = -\frac{501}{8}$$

atque

$$c - \frac{aa}{2} = -123 + \frac{501}{8} = -\frac{984 - 501}{8} = -\frac{483}{8} = \beta$$

Pariter

$$\frac{aa}{4} = +\frac{27889}{16}; d - \frac{aaa}{4} = +97 - \frac{27889}{4} = \frac{1552 - 27889}{16} = -\frac{26337}{16} = \zeta.$$

Divisores ipsius  $\beta$  sunt 3; 7; 23; & ipsius  $\zeta$  sunt 3; & 8779; communis est.

est unus, 3; qui a quaternario deficit unitate; ergo æquatio proposita per extractionem radicis realis reduci nequit. Sumo  $n = -3$ ; & tento an  $k = +\frac{7}{2}$ , (quia nempe a est impar) rem conficere possit.

Est ergo

$$ak = -\frac{21}{4}; \frac{\beta}{n} = -\frac{483}{8 \cdot 3} = +\frac{161}{8}; \frac{\beta}{nk} = +\frac{161}{8 \cdot \frac{7}{2}} = +\frac{23}{4}$$

Quare

$$\frac{ak}{2} - \frac{\beta}{nz} = -\frac{21-23}{4} = -\frac{44}{4} = -11; \text{ \& } l = -\frac{11}{2}.$$

Hinc facile invenitur

$$\frac{a + nk^2}{2} = \frac{147}{8} - \frac{3 \cdot 49}{4} = \frac{167-147}{8} = +\frac{5}{2} = A$$

&

$$AA = \frac{25}{4}; AA-d = \frac{25}{4} - 97 = \frac{25-388}{4} = -\frac{363}{4}$$

Hic numerus divisus per  $n = -3$  dat  $\frac{121}{4}$ , cujus radix est  $\pm \frac{11}{2} = l$ .  
Quapropter æquatio proposita reduci potest, & præbet

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = (\frac{7}{2}x - \frac{11}{2})\sqrt{-3}.$$

72. Si quis vero fumeret

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = (\frac{7}{2}x - \frac{11}{2})\sqrt{-5}$$

vel per aliquem alium numerum imparem unitate superantem numerum quaternarium, & utramque partem quadraret, nunquam conficeret æquationem a fractionibus liberam. Oriretur enim in exemplo nostro

$$x^4 - 3x^2 + 68\frac{1}{2}x^2 - 200x + 157\frac{1}{2} = 0$$

quæ tamen reduci potest multiplicando per 2, & adhibendo primam e duabus



bus methodis, quas BERNOULLIUS tradidit N<sup>o</sup>. 18. pag. 172. hujus.  
Sic enim erit

$$2x^4 - 6x^3 + 137x^2 - 400x + 315 = 0$$

Nunc ponatur  $2x = y$ , atque ideo  $m = 2$ ;  $m^2 = 4$ ;  $m^3 = 8$ . Substituendo  $y$  pro  $x$ , ac multiplicando tertium propositæ coefficientem per 2, quartum per 4, & ultimum per 8, prodibit

$$y^4 - 6y^3 + 274y^2 - 1600y + 2520 = 0.$$

Erit igitur

$$a = -6; \frac{a}{2} = -3; \frac{a^2}{4} = +9; b - \frac{a^2}{4} = 274 - 9 = 265 = \alpha$$

Hinc

$$\frac{2\alpha}{2} = -3 \cdot 265 = -795; \& \frac{\alpha\alpha}{4} = +\frac{70225}{4}.$$

Quare

$$c - \frac{2\alpha}{2} = -1600 + 795 = -805 = \beta,$$

&

$$d - \frac{\alpha\alpha}{4} = 2520 - \frac{70225}{4} = -\frac{60145}{4} = \zeta.$$

Divisores ipsius  $\beta$  sunt 5; 7; 23. Divisores ipsius  $\zeta$  sunt 5; 23; 523. Qua-

re aut  $n = -5$ , aut  $n = -23$ . Sumo  $n = -5$ . Erit  $\frac{\beta}{n} = \frac{-805}{-5} = +161$

&  $k = +7$ ; vel  $k = +23$ . Sit  $k = 7$ ; erit  $\frac{\beta}{nk} = 23$ ; &  $\frac{ak}{2} = -3 \cdot 7 = -21$ .

Quare  $\frac{ak}{2} - \frac{\beta}{nk} = -21 - 23 = -44 = 2l$ ; &  $l = -22$ .

Jam

$$\frac{\alpha + nk^k}{2} = \frac{265 - 5 \cdot 49}{2} = 10 = A; \& AA = 100$$

ac

$$AA - d = 100 - 2520 = -2420; \& \frac{AA - d}{n} = \frac{-2420}{-5} = 484 = (-22)^2 = l^2$$

Tem. II.

Cc

Est

Est ergo æquatio reducta

$$y^2 - 3y + 10 = (7y - 21)\sqrt{-5}$$

& restituendo  $4x^2$  pro  $y^2$ ; ac  $2x$  pro  $y$ , & terminos omnes dividendo per 4

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = (\frac{7}{2}x - \frac{11}{2})\sqrt{-5}$$

Si vero posuisssem  $n = +5$  reductio fieri non potuisset.

Quæ supra N<sup>o</sup> 65. pag. 195. 196. & 66 pag. 197. hujus, demonstrata sunt, sic in genere possunt ostendi.

73. In polynomio ordinis  $r$ , quod quadrandum assumitur, est

a coefficientis termini, cujus exponents est  $r - 1$   
 A coefficientis termini, cujus exponents est  $r - 2$   
 B, coefficientis termini, cujus exponents est  $r - 3$   
 &c.

Sed & aliud assumitur polynomium quadrandum ordinis  $r - 1$ , cujus singuli termini multiplicandi sunt per  $n$ . In hoc est

k coefficientis primi termini, cujus exponents est  $r - 1$   
 l coefficientis termini, cujus exponents est  $r - 2$   
 m coefficientis termini, cujus exponents est  $r - 3$   
 &c.

Quare sibi respondent

a & k; A & l; B & m; C & o; D & p; E & q; &c.

74. Coefficientes completi, descripti N<sup>o</sup> 44. pag. 186. hujus, ita sunt comparati, ut simul adsint vel absint quadrata litterarum respondentium.

Ergo si qua littera major sit quantitas fracta, etiam ei respondens minor, debet esse fracta, ita ut utraque habeat eundem denominatorem, (ut præcipit Auctor N<sup>o</sup> XI. pag. 153. hujus, de S & h; R & m; Q & l; p & k;) & ita quidem ut minoris quadratæ & ductæ in  $n$  pars vel destruat quadratum fractum majoris, vel cum eo conficiat quantitatem integram.

75. Sed prima determinandarum littera A, primum est in tertio sui quadrati termino, cujus exponents est  $2r - 2$ ; littera l ei respondens primum est in secundo sui quadrati termino, cujus exponents est  $2r - 3$  (N<sup>o</sup> 61 & 62. pag. 194. hujus), & sic de reliquis. Igitur semper primus termini illius coefficientis completus in quo est littera aliqua major M, caret littera minori, quæ ei responderet, & quæ indicabitur per t. Igitur si M sit quantitas fracta, coefficientis ille manebit fractus, contra hypothesim; nec fieri poterit integer quin tota æquatio multiplicetur per ejus denominatorem; atque ideo ejus primus terminus, quod rursus est contra hypothesim; nam

tacite ponit NEWTONUS primum reducendæ terminum coefficientem habere unitatem, & integram esse æquationem reducendam.

76. Atqui littera illa, in primo termino in quo est, ducitur in 2; igitur ille terminus poterit esse integer si M sit quantitas fracta denominatorem habens binarium.

Si quis hoc ratiocinium exemplis illustratum cupiat, inspiciat coefficientes completos descriptos N°. 44. pag. 186. hujus; & videbit coefficientem tertii termini in quadrato esse

$$b + nk^2 = 2A + \frac{a^2}{4}$$

in quo primum est A, & in quo non est l, quæ ei respondet. Igitur, negligendo quadrata postea consideranda, si est A quantitas fracta, vel denominatorem habebit 2, vel aderit fractio in coefficiente, quod esse nequit, quia ponitur b coefficientis propositæ, quantitas integra, & est

$$b = 2A + \frac{a^2}{4} - nk^2$$

Pariter coefficientis quarti termini in quadrato, est

$$c + 2nkl = 2B + 2A$$

in quo non est m, littera respondens ipsi B; unde & hic sponte redit ratiocinium præcedens, & sic de reliquis.

77. Si vero primus propositæ terminus alium haberet coefficientem, præter unitatem, proposita esset transformanda in aliam, cujus primus terminus coefficientem haberet unitatem, & transformata esset reducendæ, atque in ea vim suam haberet ratiocinium præcedens.

Quare vere nosse N°. XI. pag. 153. hujus, addit posse S & k; R & m; &c., esse fractos, *denominatorem habentes binarium*. Ponit enim altissimi termini coefficientem in reducenda esse unitatem, quod jam monuimus.

78. His positis, reliqua facile demonstrantur in genere.

Sint, ut supra N°. 74. pag. 202. hujus, quantitates fractæ & respondentis M & t. Quoniam utraque est fracta & denominatorem habet binarium, utraque est impar. Sit ergo

$$M = \frac{2N+1}{2} \text{ \& } t = \frac{2y+1}{2}$$

Erat in eodem coefficiente

$$M^2 - nt^2 = \frac{4N^2 + 4N + 1 - 4ny^2 - 4ny - n}{4}$$

C c z

q

si  $n$  est numerus positivus. Tunc autem est

$$\frac{4N^2 + 4N - 4ny^2 - 4ny}{4} = N^2 + N - ny^2 - ny$$

quantitas integra; sed manet fracta

$$\frac{1-n}{4}$$

quæ fractio deleri nequit nisi  $n$  constet ex unitate & ex quaternarii multiplo. Si vero ponatur

$$n = 4x + 1, \text{ tunc } \frac{1-n}{4} = \frac{1-4x-1}{4} = -x$$

Tunc ergo debet  $n$  esse numerus impar, qui per quaternarium divisus relinquit unitatem, ut noster pluribus locis.

79. Sed si  $n$  est numerus negativus, fiet

$$M^2 - nt^2 = N^2 + N + ny^2 + ny + \frac{1+n}{4}$$

& delebitur fractio si  $n$  constet ex multiplo binarii unitate minuto. Nam si ponatur

$$n = 2x - 1, \text{ erit } \frac{1+n}{4} = \frac{1+2x-1}{4} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

quæ erit quantitas integra si  $x = 2x$ ; atque ideo

$$n = 4x - 1.$$

Hinc, si  $n$  est numerus negativus impar, unitate deficere debet a multiplo quaternarii, ut jam observavimus N<sup>o</sup>. 71. pag. 199. hujus.

80. Si quis in proposita & reducenda *coefficientens termini secundi, vel quarti, vel sexti, vel alicujus denominati a numero pari, sit impar, debet esse n numerus impar.*

Hæc regula generalis facile deducitur e N<sup>o</sup>. X. pag. 153. hujus, & e præcedentibus; ad eam in genere demonstrandam utiles erunt sequentes observationes.

81. Exponentes terminorum denominatorum a numero pari, sunt impares in quovis binomio evecta ad secundam potestatem. Quare horum terminorum coefficientes in utroque polynomio assumto & quadrato, consistunt ex binis rectangulis, sine ullo quadrato (N<sup>o</sup>. 36. pag. 180. hujus.). Ergo, si binomium assumtum constat e quantitativis integris, hi coefficientes sunt paræ.

Ex.

Ex. gr. assumatur quadrandum polynomium

$$x^r + ax^{r-1} + Ax^{r-2} + Bx^{r-3} + Cx^{r-4} + Dx^{r-5} + Ex^{r-6} + \&c.,$$

hoc quadratum habebit

termini secundi	coefficientem .. 2a
quarti	2B + 2aA
sexti	2D + 2aC + 2AB
octavi	2F + 2aE + 2AD + 2BC;
&c.	&c.

Pariter aliud polynomium assumtum, quadrandum, & postea per  $n$  multiplicandum,

$$kx^{r-1} + lx^{r-2} + mx^{r-3} + ox^{r-4} + pz^{r-5} + qx^{r-6} + \&c.$$

habebit terminorum suorum, secundi, quarti, sexti, octavi, &c; coefficientes per  $n$  multiplicatos, ordine

$$2nkl, 2nko + 2nlm; 2nkq + 2nlp + 2nmo; 2nks + 2nlr + 2nmq + 2nop; \&c.$$

82. Differentia duorum coefficientium, qui in utroque binomio pertinent ad eundem terminum, conficit coefficientem ejusdem termini in reducenda; & differentia duorum numerorum parium est numerus par. Nullus ergo coefficientis propositæ denominatus a numero pari potest esse impar, nisi oriatur a fracto reductæ coefficiente. Sed, in aliquo e coefficientibus, qui sequuntur in quadrato, adest hujus coefficientis fracti quadratum quod etiam dividi debet per quaternarium. Totus coefficientis reducendus est ad eundem denominatorem, ergo omnes termini erunt pares præter quadratum illud, quod est impar. Orietur ergo numerator impar fractionis, cujus divisor esse debet  $n$  atque ideo erit  $n$  numerus impar; & si positivus est, per quaternarium divisus relinquet unitatem.

Sit, ad majorem illustrationem, numerus impar

$$c = 2D + 2aC + 2AB - 2nko - 2nlm.$$

oportet ut aliqua littera, ex. gr. D, sit numerus fractus. Ponatur  $D = \frac{D}{2}$ ; eritque  $D$  numerus impar. Erit autem in coefficiente termini undecimi

$$k - 2I - 2aH - 2AG - 2BF - 2CE - \frac{DD}{4}$$

& multiplicando per 4, conficietur numerator impar

$$4k - 8I - 8aH - 8AG - 8BF - 8CE - DD$$

C c 3

quem

quem si dividere debet  $n$ , profecto erit impar; si hunc dividere non debet, exponetur hic numerus impar per aliquam litteram græcam, (vide *N<sup>um</sup>* 37. pag. 184. hujus) & hujus litteræ quadratum divisum per quaternarium erit in aliqua e sequentibus quantitatibus, quæ per  $n$  dividi debent, reductæ nempe ad eundem denominatorem. Unde redibit præcedens ratiocinium.

83. Si quis vero reductæ coëfficiens sit numerus impar, impar esse poterit in reducenda proposita coëfficiens termini in quo est quadratum numeri imparis.

Sic proposita

$$x^6 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

cujus reducta est

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = (x^2 - x + 1) \sqrt{3}$$

pares sunt coëfficientes terminorum secundi, quarti, & sexti, reliqui omnes impares, quia  $n = 3$ ; &  $m = 1$ , est impar.

84. Cum autem sit ostensum aliquem reductæ terminum esse fractum, si quis coëfficiens alicujus termini denominati a numero pari, sit impar (*N<sup>o</sup>*. 80. pag. 204. hujus & seq.): fractionis denominatore esse binarium, si altissimus propositæ & reducendæ terminus coëfficientem habeat unitatem, (*N<sup>o</sup>*. 75. pag. 202. hujus): tunc esse  $n$  numerum imparem, & eum unitate necessario superare aliquem quaternarii multiplicem, si est numerus positivus, (*N<sup>o</sup>*. 78. pag. 203. hujus): sed si est numerus negativus, esse debere unitate minorem quam aliquis quaternarii multiplex (*N<sup>o</sup>*. 79. pag. 204. hujus); in genere demonstratæ sunt præcipuæ NEWTONI regulæ.

85. Regulam, quam tradit Auctor *N<sup>o</sup>*. XV. & XVI. pag. 158... 160. hujus, dicunt *Regulam* CARDANI. Historiam vide in libro cui titulus, *Histoire des Mathematiques* par MONTUCLAS, Tom. I. Part. III. lib. IV. *N<sup>o</sup>*. V. Theorema ita dilucide exposuit noster, ut quid addere possim, non videam; præter formulæ generalis applicationem ad peculiare.

Theorematis investigationem tradiderunt COLSONUS (Vide *Additamentum* in fine hujus, pag. 19;) & EULERUS in *Commentariis Petropolitani* Tom. VI. pag. 216. & seq.

86. Æquationes cubicæ secundo termino carentes omnino revocantur ad has quatuor formulas.

$$1^{\circ}. x^3 + qx + r = 0; \quad 2^{\circ}. x^3 + qx - r = 0$$

&

$$3^{\circ}. x^3 - qx + r = 0; \quad 4^{\circ}. x^3 - qx - r = 0.$$

87. Quoniam hæ formulæ carent secundo termino, vel una radix positiva æqualis est summæ duarum negativarum, vel una negativa æqualis summæ

summæ duarum positivarum. Semper est saltem una radix positiva,

88. Ponendo  $x = a + b$ , fit

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Eft autem

$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a + b) = 3abx$$

quapropter formulæ evadent

$$1^\circ. a^3 + b^3 + \frac{3abx}{+qx} + r = 0; \quad 2^\circ. a^3 + b^3 + \frac{3abx}{+qx} - r = 0$$

&

$$3^\circ. a^3 + b^3 - \frac{3abx}{-qx} + r = 0; \quad 4^\circ. a^3 + b^3 - \frac{3abx}{-qx} - r = 0$$

89. Ponamus in prima & secunda formula

$$3abx + qx = 0; \text{ unde } b = -\frac{q}{3a}; \text{ \& } b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$$

& in tertia ac quarta

$$3abx - qx = 0; \text{ unde } b = \frac{q}{3a} \text{ \& } b^3 = \frac{q^3}{27a^3}$$

90. Quorum valorum substitutione, formulæ, deletis  $3abx..qx$  se destruentibus, manebunt

$$1^\circ. a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0; \quad 2^\circ. a^3 - \frac{q^3}{27a^3} - r = 0$$

&

$$3^\circ. a^3 + \frac{q^3}{27a^3} + r = 0; \quad 4^\circ. a^3 + \frac{q^3}{27a^3} - r = 0$$

Prima dat

$$a^6 - \frac{q^3}{27} + a^3r = 0, \text{ vel } a^6 = -a^3r + \frac{q^3}{27}$$

atque ideo

$$a^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}; \text{ \& } a = \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}$$

Sed

Sed

$$b = \frac{-q}{3a} = \frac{-q}{3\sqrt[3]{(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27})}}}$$

Secunda dat

$$a^6 - \frac{q^3}{27} - a^3r = 0, \text{ vel } a^6 = +a^3r + \frac{q^3}{27}$$

id est

$$a^3 = +\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27})}; \text{ \& } a = \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27})});}$$

Sed

$$b = \frac{-q}{3a} = \frac{-q}{3\sqrt[3]{(\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27})}}}$$

Tertia

$$a^6 + \frac{q^3}{27} + a^3r = 0, \text{ vel } a^6 = -a^3r - \frac{q^3}{27}$$

&amp;

$$a^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})}; \text{ \& } a = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})});}$$

Sed

$$b = \frac{q}{3a} = \frac{q}{3\sqrt[3]{(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})}}}$$

Quarta tandem

$$a^6 + \frac{q^3}{27} - a^3r = 0, \text{ vel } a^6 = +a^3r - \frac{q^3}{27}$$

&amp;

$$a^3 = +\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})}; \text{ \& } a = \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})});}$$

Sed



Sed

$$b = \frac{q}{3a} = \frac{q}{3\sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}}}.$$

91. Unde erit in prima formula

$$x = a + b = \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)} + \frac{-q}{3\sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}};$$

in secunda formula

$$x = a + b = \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)} + \frac{-q}{3\sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}};$$

in tertia formula

$$x = a + b = \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right)} + \frac{q}{3\sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right)}};$$

in quarta tandem

$$x = a + b = \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right)} + \frac{q}{3\sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right)}}.$$

92. Sed æque dici poterat. Est in prima formula, ob ipsius  $b$  valorem negativum (Nº. 89. pag. 207. hujus).

$$a^3 - b^3 + r = 0$$

Erat

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}.$$

Ergo

$$-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} - b^3 + r = 0 = +\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} - b^3$$

&amp;

Tem. II.

D d

 $b =$

$$b = \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}.$$

Quapropter

$$x = a - b = \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}.$$

Vel

$$x = a - b = -\sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}.$$

In prima expressione major quantitas  $\sqrt[3]{\left(\frac{r}{4} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}$  est negativa, & negativus est valor ipsius  $x$ , quod etiam patet e secunda expressione.

93. Sed hic occupanda est difficultas, quæ fortasse nonnullos turbare posset. Cum enim fit

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}, \text{ vel } = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$$

prima hypothesis

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$$

dat

$$b^3 = r + a^3 = +\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$$

At altera hypothesis

$$a^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$$

dat

$$b^3 = r + a^3 = +\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}.$$

Duo valores ipsius  $a^3$  quatuor modis jungi possunt per subtractionem cum duobus valoribus ipsius  $b^3$ ; conficiuntur ergo quatuor  $r$  dices æquationis cubicæ, quæ tamen tres tantum habere possent. Erunt autem quatuor valores incognitæ  $x$  sic inventi

Primus

$$x = a - b = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}} - \sqrt[3]{+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}}.$$

Secundus

$$x = a - b = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}} - \sqrt[3]{+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}}.$$

Tertius

$$x = a - b = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}} - \sqrt[3]{+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}}.$$

Quartus tandem

$$x = a - b = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}} - \sqrt[3]{+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}}.$$

Sed horum quatuor valorum primus & quartus coincidunt, &, cum specie differant, reipsa iidem sunt. Secundus & tertius pertinent ad aliam hypotheseum, nostræ quidem affinem, at tamen diversam. Nam

Primus valor ipsius  $b^3$ , nempe

$$\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$$

& posterior valor ipsius  $a^3$ , id est

$$-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$$

sunt reciproci, scilicet oppositi &amp; æquales, cum sit

$$-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} = -1 \left( +\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} \right).$$

Pariter posterior ipsius  $b^3$  valor

$$+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$$

& primus valor ipsius  $a^3$ 

$$-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} = -1 \left( +\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)} \right)$$

D d 2

sunt

sunt reciproci. Quare

$$+ \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}} - \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)} = \\ - \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)}$$

id est incognitæ  $x$  valor primus idem est ac quartus. Item

$$- \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)} = + \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)}.$$

Quare secundus valor incognitæ  $x$  fit

$$+ 2\sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)} = 2a$$

Tandem

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)} = - \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}\right)} = -2b.$$

Qui duo valores sunt rejiciendi, primo quia eorum summa  $2a - 2b$  æqualis non est tertio valori  $a - b$ , quod oportebat, quia æquatio resolventa caret secundo termino; secundo quia alter ponit  $x = 2a$ , alter  $x = -2b$ , & nostra hypothæsis ponit  $x = a - b$ .

Secunda formula, ob valorem ipsius  $b$  pariter negativum, mutata fuit in.

$$a' - b' - r = 0 = + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} - r - b'$$

atque ideo

$$b' = - \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)},$$

ubi reciproci sunt

$$a' = + \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \text{ \& } b' = - \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}$$

&

$$a' = + \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)} \text{ ac } b' = - \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^2}{27}\right)}.$$

Quia

Quare unicus valor incognitæ  $x$ , recipiendus, erit

$$x = a - b = \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^1}{27}\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^1}{27}\right)}\right)}$$

vel

$$x = a - b = \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^1}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^1}{27}\right)}\right)}$$

ubi major quantitas  $\sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^1}{27}\right)}\right)}$  est positiva, & positivus valor ipsius  $x$ .

Tertia formula facta erat, propter  $b$  positivum,

$$a' + b' + r = 0 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)} + b' + r$$

atque ideo

$$b' = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)},$$

in qua iidem prorsus sunt

$$a' = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)} \text{ \& } b' = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}$$

item,

$$a' = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)} \text{ \& } b' = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}$$

Ergo unicus incognitæ  $x$  valor est.

$$\begin{aligned} x = a + b &= \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)} \\ &= -\sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)} - \sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)}. \end{aligned}$$

In prima expressione utraque quantitas  $\sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)}$  est negativa, & negativus est valor incognitæ  $x$ . In altera idem facile intelligitur.

Demum quarta formula facta erat

$$a' + b' - r = 0 = + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)} + b' - r$$

Unde

$$b' = + \frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}$$

ubi iidem sunt valores

$$a' = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)} \text{ \& } b' = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}$$

item

$$a' = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)} \text{ \& } b' = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}.$$

Quare unicus habentur valor ipsius  $x$ , nempe

$$x = a + b = \sqrt[3]{\left(+ \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(+ \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)}$$

in quo valore utraque quantitas  $\sqrt[3]{\left(+ \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}\right)}$  est positiva, & positivus manet valor ipsius  $x$ .

24. Duæ priores formulæ semper sunt possibiles, quia semper possibilis est  $\sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^1}{27}\right)}$ ; & habent duas radices imaginarias, (Nº. 72. pag. 25. hujus).

25. Duæ formulæ posteriores tunc sunt impossibiles, cum impossibilis est  $\sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^1}{27}\right)}$ ; idest cum  $\frac{q^1}{27}$  negativus est & major quam  $\frac{rr}{4}$ .

Hujusmodi sunt formulæ tertia & quarta, quæ sic exprimi simul possunt

$$x^3 - qx \pm r = 0.$$

26. Interim tamen hujusmodi formula, quæ dicitur *irreducibilis*, confici potest ex radicibus realibus, & confici nequit ex radicibus imaginariis.

Quod confici possit ex radicibus realibus, constat ex Nº. 71. pag. 25. hujus. Sed & sic ostendi potest. Sumantur æquationes simplices

$$x + a + b = 0$$

$$x + a - b = 0$$

$$x - 2a = 0$$

Ex harum multiplicatione nascetur æquatio cubica

$$x^3 - \frac{3aa}{bb} x - \frac{2a'}{2abb} = 0$$

in qua est  $q = -\frac{3aa}{bb}$ ; &  $r = -\frac{2a'}{2abb}$ . Sed  $3aa + bb$  major est quam  $3aa$ ; &  $(3aa + bb)^3$  major quam  $(3aa)^3 = 27a^6$ ; ergo  $\frac{q^3}{27} = \frac{q^3}{27}$  major quam  $a^6$ .

Iterum  $2a'$  major est quam  $2a' - 2abb$ ; &  $(2a')^2 = 4a^6$  major quam  $(2a' - 2abb)^2 = r^2$ ; ergo  $a^6$  major quam  $\frac{rr}{4}$ : erat  $\frac{q^3}{27}$  major quam  $a^6$ , ergo fortius  $\frac{q^3}{27}$  major quam  $\frac{rr}{4}$ ; & æquatio constans ex meris rationalibus est irreductibilis.

Exemplo sit æquatio

$$x^3 - 79x - 210 = 0$$

in qua  $q = 79$ ;  $q^3 = 493039$ ;  $\frac{r}{2} = 105$ ;  $\frac{rr}{4} = 11025$ ;  $\frac{rr}{4} \cdot 27 = 297675$ , & minor quam  $q^3$ . Hujus autem radices sunt  $x + 7 = 0$ ;  $x + 3 = 0$ ;  $x - 10 = 0$ .

Si sumtæ fuissent æquationes simplices.

$$\begin{aligned} x - a + b &= 0 \\ x - a - b &= 0 \\ x + 2a &= 0 \end{aligned}$$

æquatio hinc oriunda, foret

$$x^3 - \frac{3aa}{bb} x + \frac{2a'}{2abb} = 0$$

in qua facile ostenditur, ut supra,  $\frac{q^3}{27}$  major quam  $\frac{rr}{4}$ .

Hujusmodi est æquatio

$$x^3 - 37x + 84 = 0$$

cujus radices sunt  $x + 7 = 0$ ;  $x - 3 = 0$ ;  $x - 4 = 0$ , & in qua  $q = 37$ ;  $q^3 = 50653$ ;  $r = 84$ ;  $\frac{r}{2} = 42$ ;  $\frac{rr}{4} = 1764$ ;  $\frac{rr}{4} \cdot 27 = 47628$ .

96. Effe potest  $b$  major quam  $a$ ; tunc enim coefficientis tertii termini  $3aa - bb$ , semper manet negativus. Ultimus quidem terminus signum mutat; quandoquidem si  $b$  major quam  $a$ , erit  $bb$  major quam  $aa$ , &  $2abb$  major quam  $2a'$ . Ideo in prima æquatione ultimus terminus  $2a' + 2abb$  fiet positivus; & in altera ultimus terminus  $2a' - 2abb$  fiet negativus. Sed hæc signi mutatio nihil ad rem facit.

97. Potest esse  $b$  quantitas surda  $= \sqrt{cd}$ ; nam tunc  $+ \sqrt{cd}$  in  $-\sqrt{cd}$ , dat  $-cd$ ; & æquatio fiet

$$x' - \frac{3aa}{cd} x - \frac{2a'}{2acd} = 0$$

aut

$$x' - \frac{3aa}{cd} x + \frac{2a'}{2acd} = 0$$

Hujusmodi sunt æquationes

$$x' - 77x - 230 = 0$$

cujus radices sunt  $x + 5 - \sqrt{2} = 0$ ;  $x + 5 + \sqrt{2} = 0$ ;  $x - 10 = 0$ ;

&c

$$x' - 17x + 4 = 0$$

cujus radices sunt  $x + 2 - \sqrt{5} = 0$ ;  $x + 2 + \sqrt{5} = 0$ ;  $x - 4 = 0$ .

98. Sed si ponatur  $b = \sqrt{-cd}$ , quæ est quantitas imaginaria; tunc  $+b$  in  $-b$ ; idest  $+ \sqrt{-cd}$  in  $-\sqrt{-cd}$ , dat  $+cd$ ; quapropter æquatio fiet, vel

$$x' - \frac{3aa}{cd} x - \frac{2a'}{2acd} = 0$$

vel

$$x' - \frac{3aa}{cd} x + \frac{2a'}{2acd} = 0$$

sumendo  $x + a + \sqrt{-cd} = 0$ ;  $x + a - \sqrt{-cd} = 0$ ; &  $x - 2a = 0$ ;  
vel  $x - a + \sqrt{-cd} = 0$ ;  $x - a - \sqrt{-cd} = 0$ ; &  $x + 2a = 0$ .

Item, si  $3aa + cd$  est quantitas positiva, statim æquatio non est irreducibilis. Si vero eadem quantitas negativa est, ejus opposita  $3aa - cd$ , est positiva. Sed  $3aa - cd$  minor est quam  $3aa$ , &  $(3aa - cd)' = q'$ , minor quam  $(3aa)' = 27a^6$ , aut  $\frac{q^3}{27}$  minor quam  $a^6$ ; &  $a^6$  minor quam  $(a^3)^2$ .



$(a^3 + 2acd)^2$ , id est quam  $\frac{rr}{4}$ . Igitur nullo pacto confici potest æquatio cubica irreductibilis ex duabus radicibus imaginariis & tertia commensurabili.

Sed nulla æquatio trium dimensionum confici potest ex tribus radicibus quadraticis (Nº. 44. pag. 19, & Nº. 47. pag. 21. hujus,) atque ideo neque ex tribus imaginariis (Nº. 47. eadem pag. 21.) Superest igitur ut æquatio irreductibilis habeat tres radices reales; quod esse posse jam ostendimus.

99. Unde ergo radices impossibiles æquationis, quæ omnes radices reales habet? Rationem reddiderunt Viri duo Clarissimi; KOENIGIUS, mihi, dum viveret, amicissimus, in Commentariis Regiæ scientiarum & humaniorum litterarum Academiæ Berolinensis, pro anno 1749. pag. 180. & sequentibus; & ALEMBERTUS, quem nomen laudat, in Diction. Encyclop. littera C. verbo *Cas irreductibile*.

Sic fere ratiocinatur Cl. KOENIGIUS. Quoniam hic deest secundus terminus, summa duarum radicum tertiæ æqualis est & opposita; aut ergo minima & media positivæ sunt, & maxima negativa; aut maxima & minima sunt positivæ, & media negativa; tunc  $r$  est quantitas positiva; aut minima & media negativæ sunt, & maxima positiva; aut maxima & minima negativæ sunt & media positiva; tunc  $r$  est quantitas negativa.

Æquatio limitum propositæ dat  $x = \pm \sqrt{\frac{q}{3}}$ . Si nunc ponatur  $x = 0$ ,

manebit  $\pm r$ . Si  $x = \pm \sqrt{\frac{q}{3}}$ , manebit in primo casu

$$-\frac{2q}{3} \sqrt{\frac{q}{3}} + r, \text{ \& in secundo } \frac{+2q}{3} \sqrt{\frac{q}{3}} - r.$$

Sed quia ponitur

$$\frac{r^2}{4} \text{ minor quam } \frac{q^2}{27}, \text{ est } \frac{r}{2} \text{ minor quam } \frac{q}{3}, \text{ \& } r \text{ minor quam } \frac{2q}{3}$$

Ergo semper valor mutatus est, quapropter est  $\sqrt{\frac{q}{3}}$  major quam minima æquationis radix. (Nº. 86. pag. 108. hujus).

Si ponatur  $x = \pm \sqrt{q}$ , manebit  $\pm r$ , & est  $\pm \sqrt{q}$  major quam media æquationis radix.

Si ponatur  $x = \pm 2\sqrt{\frac{q}{3}}$ , manebit iterum

$$-\frac{2q}{3} \sqrt{\frac{q}{3}} + r \text{ in primo casu, \& } \frac{+2q}{3} \sqrt{\frac{q}{3}} - r \text{ in altero, \& erit } \pm 2\sqrt{\frac{q}{3}}$$

major quam maxima radix æquationis.

Tem. II.

Ec

Sed

Sed in hac hypothesi radix æquationis solvendæ, est

$$a+b = a + \frac{q}{3a} = \gamma;$$

debet ergo  $\gamma$  esse minor quam  $2\sqrt{\frac{q}{3}}$ , ac  $\frac{\gamma^2}{4}$  minor quam  $\frac{q}{3}$ . Sed, quia ponitur

$$a + \frac{q}{3a} = \gamma, \text{ est } a^2 + \frac{q}{3} = a\gamma; \text{ \& } a = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{q}{3}\right)}.$$

Est ergo imaginarius valor ipsius  $a$ ; & quidem quia posuimus  $a + \frac{q}{3a}$  exponere propositæ radicem. Ergo hæc hypothesis falsa est; neque mirum si ex falsa hypothesi deducatur falsa conclusio, quod nempe radices imaginarias habeat proposita, quæ omnes habet reales.

Si vero proposita haberet duas radices æquales, ea fieret

$$x^3 - 3a^2x \pm 2a^3 = 0$$

$$\text{\& statim } q = 3a^3, \text{ ac } a = \sqrt[3]{\frac{q}{3}}; \text{ \& } a+b = a + \frac{q}{3a} = 2a$$

quæ esset maxima radix; & hypothesis vera duceret ad veram conclusionem; tunc enim

$$\frac{r^2}{4} = a^6 = \frac{q^2}{27}$$

ac evanesceret quantitas imaginaria.

100. Ita difficultatem solvit vir acutissimus, ex eo quod ponat regula  $a + \frac{q}{3a}$  indicare posse quancumque quantitatem, quod non semper potest. Celebrerrimus ALEMBERTUS, loco citato, planiorem init viam, & observat fingi quidem posse

$$x = a+b; \text{ hinc vere } x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \text{ \& } qx = qa + qb;$$

atque ideo

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + qa + qb + r = 0 = a^3 + b^3 + 3abx + qx + r.$$

Sed hinc nullo pacto confici posse quod

$$3abx + qx = 0.$$

Hanc

Hanc esse novam hypothesim ad arbitrium introductam; quæ quidem non pugnat cum natura ipsarum  $a$  &  $b$ ; (nam hæ quantitates sunt indeterminatæ, & ita possunt assumi, ut earum factum æquet datam quantitatem;) sed quæ efficit ut illæ duæ quantitates sint, non reales, quales esse deberent, sed imaginariæ.

101. Culpant nonnulli hoc loco NEWTONUM, quasi malam hujus rei rationem reddiderit; ego vero puto cum defendi posse. Nam regula quæ necessario præbet aliquid diversum ab eo quod est, necessario ducit ad absurdum; quoniam ex rei natura est unum, & ex regula est aliud; vel aliquid simul est & non est id quod est. Sed tota CARDANI regula consistit in extractione radices cubicæ; & omnis quantitas habet tres radices cubicæ, unam realem duas imaginarias: æquatio autem solvenda tres habet radices reales: igitur habet tres reales per rei naturam, & simul unam realem, & duas imaginarias per regulam; id est simul est & non est æquatio habens tres radices reales. Ergo recte noster, pag. 159. hujus, *omnes tres lege præfata exprimere impossibile est.*

102. Idem eadem de causa accidit in æquationibus biquadraticis, ubi hæ habent quatuor radices reales, & solvuntur via, quam describit noster N°. XVII. pag. 160. 162. hujus. Tunc enim res recidit in extractionem quartæ radicis. Reponantur enim pro

$$e \text{ \& } f \text{ valores } \sqrt{y} \text{ \& } \frac{q+y-\frac{r}{\sqrt{y}}}{2} \text{ in } x = -\frac{e}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e^2}{4} - f\right)}$$

fiet

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{y} \pm \sqrt{\left(-\frac{y}{4} - \frac{q}{2} + \frac{r}{2\sqrt{y}}\right)}$$

ubi quarta radix extrahenda est e termino  $\frac{r}{2\sqrt{y}}$ , cujus radix quadratica debet extrahi; quandoquidem est

$$\sqrt{\frac{r}{2\sqrt{y}}} = \sqrt{\frac{r}{4y}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{4y}}$$

& omnis quarta potestas duas habet radices reales ac duas imaginarias.

103. Quod autem triplex inveniatur radix cubica, quadruplex biquadratica, &c., ostensum est de unitate sub N°. 86. pag. 81. hujus; atque ideo de omni quantitate, quæ semper multiplicatur per unitatem, & quantitatis radix per radicem unitatis. Ubi & hoc observandum, quod in genere est

$$\begin{aligned}
 x^{2n} - 1 &= (x-1)(x^{2n-1} + x^{2n-2} + x^{2n-3} + \&c.) \\
 &= (x+1)(x^{2n-1} - x^{2n-2} + x^{2n-3} - x^{2n-4} + \&c.)
 \end{aligned}$$

atque ideo semper potestas par unitatis habet duas radices reales  $+1$  &  $-1$ . Reliquas omnes esse imaginarias facile patebit per regulam quæ extat in Additamento pag. 108 ad calcem hujus. Nam, per eam, numerici coefficientes binomii evekti ad potestatem  $2n-1$ , unitate minuti, dividi debent singuli per eundem coefficientem, non unitate minutum, & duplicatum. Hinc oriuntur fractiones propriæ, quæ singulæ supra medios æquationis terminos ponendæ sunt, & quadratum cujusque termini per suam fractionem est multiplicandum; deinde rectangula conficienda e terminis utrinque adjacentibus & hæc positiva & negativa sunt alterne sumenda.

Jam termini omnes æquationis denominati a numero pari, velut secundus, quartus, sextus, &c., habent hinc inde imparem terminorum numerum; omnia illa rectangula sunt æqualia, quia omnes æquationis termini coefficientem habent unitatem; manebit ergo unitas, qua minor est quævis fractio. Quare omnes termini denominati a numero pari, habebunt subscriptum signum  $-$ .

Sed omnes termini denominati a numero impari, velut tertius, quintus, septimus, &c.; habent hinc inde parem terminorum numerum, qui bini dant parem rectangulorum numerum; hæc ergo se destruent, & manebit nihil, quo major est fractio quævis. Quare omnes termini denominati a numero impari subscriptum habebunt signum  $+$ .

Idem signum  $+$  ponendum est sub primo termino & sub ultimo: ultimus denominatur a numero pari, quoniam æquatio est ordinis imparis; igitur duo termini, ultimus & penultimus, habebunt duo signa similia; bini reliqui continui signa contraria, atque æquatio radices omnes impossibiles, præter unam.

104. Auctorem vero ea sensisse, quæ puto, & recte quidem cogitasse, sed non satis aperte sententiam dixisse, patebit consideranti Num XVIII. pag. 162. hujus. Recte eum cogitasse dico, nempe si me mens non fallit, quod non videtur, cum superius ratiocinium (Nº. 101 pag. 219 hujus,) ita breve sit & planum, ut non videam ubi latere possit error. Non in propositione, quæ certa est, & omnibus Logices ac Metaphysices principiis consentanea.

Non in assumptione, omnis radix cubica triplex est, quæ demonstrata est, & quam agnoscat omnes Algebristæ. Videatur Additam. pag. 15. & 20. ad hujus libri calcem.

105. Quod autem addit vir acutissimus in fine pag. 21. Additam. ad hujus calcem, quod hæc tres radices debite connexæ, & more vulgari in se invicem continuo ductæ, æquationem

$$x^3 = 395 + 2x$$

*restituunt*, ex opinione dictum videtur, neque res verbis respondet. Sumantur enim binomia tria

$$x-1=0; x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}=0; x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=0$$

Ex horum multiplicatione continua statim conficietur  $x^3$ ; secundus terminus evanescet, quoniam summa radicum est nihilo æqualis. Sed & tertius terminus evanescet, quia pariter nihilo æqualis est summa factorum ex binis

$$\begin{aligned} -1\left(+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)-1\left(+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)= \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{-3}-\frac{1}{4}\sqrt{-3}-\frac{1}{4}=-3= \\ -1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=-1+1. \end{aligned}$$

Hinc ergo conficietur æquatio non affecta, & nunquam restituetur proposita, ne quidem si sumantur binomia quævis; nam quantitas, ex. gr.

$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ , quæ sumitur, multiplicanda est per tres illas unitatis radices cubicas, ut conficiantur, ex hac regula, radices tres æquationis cubicæ affectæ.

106. Quapropter formula CARDANI non dat veras radices æquationis cubicæ, eas nempe, quæ inter se multiplicatæ restituant æquationem propositam; ne quidem quando proposita habet unam radicem realem & duas imaginarias. Quid ergo? Viam aperit, satis quidem difficilem, ad excudendas veras radices. Nam si sit

$$\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2-q^3}}=m+\sqrt[n]{n}; \& \sqrt[3]{r-\sqrt{r^2-q^3}}=m-\sqrt[n]{n}$$

id est si radix cubica possit extrahi e quantitate, quam præbet hæc formula, tunc habebuntur veræ radices; nam binomia

$$x-2m=0; x+m-\sqrt[n]{n}=3n=0; \& x+m+\sqrt[n]{n}=3n=0$$

dabunt

$$x^3+3x(n-m^2)-2m(3n+m^2)=0$$

& binomia

$$x+2m=0; x-m-\sqrt[n]{n}=3n=0; \& x-m+\sqrt[n]{n}=3n=0$$

dabunt

Ec 3

23

$$x^3 + 3x(n - m^2) + 2m(3n + m^2) = 0$$

107. Sed hæ æquationes necessario habebunt unam radicem commensurabilem, consentientibus, ut videtur, COLSONO in additamento ad hujus calcem pag. 21., Colin MAC-LAURIN in Algebra sua anglice scripta, Parte II. Cap. 8. N<sup>o</sup>. 79; & Algebrae scriptoribus, quos viderim, omnibus.

108. Tunc autem radix commensurabilis invenitur per Newtoniam Divisorum methodum. Quod si hoc pacto nequeat inveniri radix commensurabilis, cum tamen constet in cubicis æquationibus saltem unam esse realem, fatendum puto esse æquationes ita comparatas, ut habeant quidem radices reales; hæ geometricæ possint determinari; sed nullo pacto exprimi algebraice vel numericè per datos æquationis coefficientes: tunc radices esse quærendas per approximationem; id est investigandam esse æquationem quæ quam minime fieri potest a proposita differat, & cujus radices possint arithmetice vel algebraice exponi.

109. Ceterum Newtonianæ divisoris inveniendi methodus facile adhibetur in æquationibus cubicis, nam plerumque sufficit pro incognita substituere numeros 1; 0; — 1. Quin & non raro ex resolvuntur tentando divisionem per incognitam & aliquem e divisoribus ultimi termini. Sæpe minimum ejusque potestates ponendo in æquatione proposita pro incognita ejusque potestatibus, æquationis terminos se comperi destruentes, atque ideo radicem æquationis extudi. Sed redeamus ad inventas radices expressiones.

110. E duabus CARDANI formulis prima hoc habet commodi, quod secunda pars radices invenitur dividendo  $q$  per primam radices partem. Eadem secunda pars inveniendæ est per extractionem radices cubicæ in secunda expressione. Est autem divisio facilior quam extractio radices cubicæ.

Altera vero semper præfert  $\sqrt[3]{\frac{rr}{4} \pm \frac{q^3}{27}}$  diversis signis affectam. Quapropter si radices cubicæ consistent ex rationali & ex irrationali parte, partes irrationales se mutuo destruent.

111. Utraque nullius est usus in problematis geometricis, quæ geometricè construuntur, ut infra docebit Auctor. In problematis mere algebraicis nulla est methodus inveniendæ radices cubicæ pro binomio algebraico constante ex duabus partibus, altera rationali, altera irrationali, nisi ponatur aut resolutio æquationis cubicæ, quod esset quærere idem per idem, aut inventio divisoris unius dimensionis pro æquatione cubica, quod ego faciendum contendo.

Sit enim hujusmodi binomium  $A \pm \sqrt{B}$ , & sit  $A$  pars rationalis;  $\sqrt{B}$  pars irrationalis. Ponatur hujus binomii radix cubica  $m \pm \sqrt{n}$ . Erit

$$(m \pm \sqrt{n})^3 = m^3 \pm 3m^2\sqrt{n} + 3mn \pm n\sqrt{n}$$

Quantitas irrationalis erit

$$\pm 3m^2\sqrt{n} \pm n\sqrt{n} = \sqrt{n} (\pm 3m^2 \pm n) = \sqrt{B}$$

mane-

manebit

$$m(m^2 + 3n^2) = A.$$

Hinc exterminari deberet alterutra incognitarum  $m$ ;  $Vn$ ; quod fieri posset methodo tradita Tom. I. Cap. VII. pag. 106. Sed facilius sic.

Est ex hypothesi  $A + VB = (m + Vn)^3$ ; &  $A - VB = (m - Vn)^3$  quare  $(A + VB)(A - VB) = AA - B = (m + Vn)^3(m - Vn)^3 = (mm - n^3)^3$ .

Ergo  $\sqrt[3]{(AA - B)} = mm - n$ , aut  $n = mm - \sqrt[3]{(AA - B)}$ . Ergo,

substituendo,  $m(m^2 + 3n) = 4m^3 - 3m\sqrt[3]{(AA - B)} = A$ .

Aut igitur resolvenda est hæc æquatio cubica per regulas hic explicatas, aut per divisorum inventionem; qua quin utimur statim in æquatione propo-

posita? Diu postquam hæc scripseram, incidi in Algebram SAUNDERSONI, in cujus fine legitur epistola Celeberrimi MOIVRÆI, qui hoc idem observat, extractionem nempe radices cubicæ ex binomio æque difficilem esse ac solutionem æquationis trium dimensionum; & pro imaginariis rem deducit ad anguli trisectionem; id est docet quomodo nota solutio unius æquationis cubicæ aptetur ad solutionem aliarum similium.

Postea in Transactionibus philosophicis Regiæ Societatis Londinensis, vol. 40. pro annis 1747; 1748. N°. 451. Artic. X. pag. 463. & sequen-

tibus, ostendit quomodo quodvis binomium formæ  $\sqrt[n]{a + vb}$  sit per extractionem radices ad simpliciores terminos reducendum, etiam quando  $vb$  est imaginaria; atque hinc quomodo per multisectionem anguli solvi possint æquationes omnium generum, sed certæ formæ. Sic autem breviter ejus doctrina tradi potest, mutata demonstratione, ut adhiberi possint theorematum in hoc libro explicata.

112. Extrahenda sit radix  $n$  e binomio

$$a + vb. \text{ Fiat } (x + Vy)^n = a + vb; \text{ eritque } x + Vy = \sqrt[n]{a + vb}$$

determinandi sunt per  $a$  &  $b$  valores ipsarum  $x$  &  $y$ .

Jam, evehendo binomium  $x + Vy$  ad potestatem cujus exponens est  $n$ ; termini primus, tertius, quintus, alique denominati a numero impari, erant rationales, (N°. 40. pag. 18. hujus); nam in primo termino deest  $Vy$ ; in tertio, quinto, septimo &c; ea quantitas evecta est ad secundam, quartam, sextam, &c. potestatem.

Termini secundus, quartus, sextus, alique denominati a numero pari, erunt irrationales (N°. 41. eadem pag. 18. hujus); continent enim ipsam  $Vy$ ; ejusque tertiam, quintam &c. potestatem.

113. Summa omnium terminorum, tum rationalium, tum irrationalium, æquat ipsum binomium  $a + vb$ . Quare summa terminorum rationalium æquat partem rationalem  $a$ , & summa terminorum irrationalium æquat partem irrationalem  $vb$ . (N°. 35. pag. 17. 18. hujus).

114. Igitur si e summa terminorum rationalium quadrata, deducatur summa irrationalium, pariter quadrata, & e prioris valore  $aa$  valor posterioris  $b$ , fiet

$$(xx - y)^n = aa - b = (x + \sqrt{y})^n (x - \sqrt{y})^n$$

(N<sup>o</sup>. 226. pag. 88. primi tomi hujus.)

115. Sed ex ipsa summa rationalium terminorum subducendo ipsam summam terminorum irrationalium; & e prioris valore  $a$  subducendo  $\sqrt{b}$ , valorem posterioris, manet

$$(x - \sqrt{y})^n = a - \sqrt{b},$$

quod facile constat e formula binomiali. Dantur ergo

$$x + \sqrt{y} = \sqrt[n]{a + \sqrt{b}}; x - \sqrt{y} = \sqrt[n]{a - \sqrt{b}}; (x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y}) = \sqrt[n]{a^2 - b};$$

& quærendus superest utriusque valor. Est

$$(x + \sqrt{y})^n = a + \sqrt{b}; \text{ \& } (x - \sqrt{y})^n = a - \sqrt{b}. \text{ Ergo}$$

$$(x + \sqrt{y})^n + (x - \sqrt{y})^n = 2a = u + z$$

ponendo  $u = (x + \sqrt{y})^n$ , &  $z = (x - \sqrt{y})^n$ . Hinc

$$u = 2a - z; \text{ ac } uz = (x + \sqrt{y})^n (x - \sqrt{y})^n = a^2 - b = 2az - zz$$

Quare

$$z^2 = 2az - a^2 + b; \text{ \& } z = a \pm \sqrt{b}; \text{ ac } u = a \mp \sqrt{b}$$

Sed

$$u = (x + \sqrt{y})^n = a + \sqrt{b}; \text{ \& } z = (x - \sqrt{y})^n = a - \sqrt{b}$$

Igitur

$$x + \sqrt{y} = \sqrt[n]{a + \sqrt{b}}; x - \sqrt{y} = \sqrt[n]{a - \sqrt{b}} \text{ \& } 2x = \sqrt[n]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{b}}$$

116. Statim ergo, proposito binomio reducendo, pars rationalis dici debet  $a$ ; irrationalis autem  $\sqrt{b}$ ; tum quia

$$\sqrt[n]{aa - b} = (x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y}) = xx - y$$

quæ



quæ quantitas est rationalis, videndum an ipsius  $aa - b$  radix  $n$  possit extrahi. Si nequit, binomium reduci non potest. Si reperitur  $\sqrt[n]{(aa - b)}$ , cadatur  $= m$ ; eritque

$$m = xx - y; \text{ ac } y = xx - m.$$

Supereft igitur determinanda quantitas  $x$ , quod sic fiet.

17. Tentandum an summa binomiorum

$$\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt[n]{b}}$$

conficiat numerum integrum quam proxime; sumendus numerus integer invento quam proximus, & hujus dimidiata pars ponenda pro  $x$ . Ex hujus quadrato subducendus numerus  $m$  jam inventus, & residuus ponendus pro  $y$ . Quo facto dispiciendum an binomium sic inventum per elevationem ad datam potestatem restituat propositum.

Ex. gr. reducendum proponatur binomium

$$\sqrt[5]{(54 + \sqrt[5]{980})}. \text{ Est } n = 2; a = 54; b = 980; \sqrt[5]{(aa - b)} = \sqrt[5]{(2916 - 980)} \\ = \sqrt[5]{1936} = 44 = m$$

Unde spes est binomium resolveri posse. Nunc

$$\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{980} = 31,3049, \text{ proxime; } a + \sqrt[5]{b} = 81,3049; a - \sqrt[5]{b} = 22,6951.$$

Et

$$\sqrt[5]{(a + \sqrt[5]{b})} = 9,236 \text{ fere; } \sqrt[5]{(a - \sqrt[5]{b})} = 4,763; \sqrt[5]{(a + \sqrt[5]{b})} + \sqrt[5]{(a - \sqrt[5]{b})} \\ = 13,999 = 14$$

fere. Unde

$$x = 7; xx - m = 49 - 44 = 5 = y; \text{ \& } \sqrt[5]{(54 + \sqrt[5]{980})} = 7 + \sqrt[5]{5} \\ = \sqrt[5]{(49 + 14\sqrt[5]{5} + 5)}$$

Pariter, reducendum sit binomium

$$\sqrt[3]{(15 + \sqrt[3]{217})}. \text{ Est } n = 3; a = 15; b = 217; \sqrt[3]{(aa - b)} = \sqrt[3]{(225 - 217)} = \sqrt[3]{8}$$

$$= 2 = m; \sqrt[3]{b} = 14,599 \text{ fere; } \sqrt[3]{(a + \sqrt[3]{b})} = 3,1; \sqrt[3]{(a - \sqrt[3]{b})} = 0,07;$$

$$\text{summa } 3,17; \text{ vel } 3; \text{ quare } x = \frac{3}{2}; x^2 - m = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} = y$$

&  $x + \sqrt{y} = \frac{3+i}{2}$ ; non igitur reduci potest binomium propositum.

Tertio reducendum fit binomium

$$\sqrt[3]{45 + \sqrt{1682}}; \text{ est } n = 3; a = 45; b = 1682; \sqrt[3]{aa - b} = \sqrt[3]{2025 - 1682} \\ = \sqrt[3]{343} = 7 = m$$

Sed

$$\sqrt{b} = 41, 01219 \text{ fere}; \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \sqrt[3]{86, 01219} = 4, 4142; \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \\ = \sqrt[3]{3, 89781} = 1, 5857; \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = 5, 9999 = 6 \text{ fere}; x = 3; \\ xx - m = 9 - 7 = 2 = y$$

&

$$\sqrt[3]{45 + \sqrt{1682}} = 3 + \sqrt{2} = \sqrt[3]{27 + 3 \cdot 9 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2\sqrt{2}}$$

Tandem reducendum fit binomium

$$\sqrt[5]{41 - 29\sqrt{2}}; \text{ est } n = 5; a = 41; \sqrt{b} = 29\sqrt{2} = 41, 01219$$

fere; hinc

$$a + \sqrt{b} = 82, 01219; \text{ \& } a - \sqrt{b} = -0, 01219.$$

Est autem

$\sqrt[5]{82, 01219}$  major quam 2, quia  $2^5 = 32$ ; & minor quam 3, quia  $3^5 = 243$ . Sed  $\sqrt[5]{-0, 01219}$  est paulo major quam 0; 2. Ergo

$$\sqrt[5]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[5]{a - \sqrt{b}} = 2 \text{ quam proxime, \& } x = 1$$

Jam

$$\sqrt[5]{aa - b} = \sqrt[5]{1681 - 1682} = -1 = m; xx - m = 2 = y$$

Ergo

$$\sqrt[5]{41 - 29\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} = \sqrt[5]{(1 - 5\sqrt{2} + 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2\sqrt{2} + 5 \cdot 4 - 4\sqrt{2})}$$

118. Hæc regula facile transfertur ad imaginarias; ponendo;

$aa + b$  pro  $aa - b$ , ob  $(a + \sqrt{-b})(a - \sqrt{-b}) = aa + b$ .

Sed quia quaeri debet in numeris proximis

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}}$$

& radix imaginaria nequit haberi, confugiendum est ad tabulas sinuum & ad multifectionem angulorum; hoc pacto.

$$119. \text{ Sit } x = \sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}} = u + z$$

ubi  $\sqrt{-b}$  repræsentare potest imaginariam, &

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} = u; \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}} = z; \sqrt[n]{aa \pm b} = uz = m$$

eritque

$$a^n = (u + z)^n$$

Ubi statim primus terminus erit

$$u^n = a + \sqrt{-b}; \text{ \& ultimus } z^n = a - \sqrt{-b}; \text{ ac } u^n + z^n = 2a.$$

120. Ceterorum omnium coefficients complectentur  $n$ ; & termini factum  $uz$ , ut constat e formula binomiali. Sic igitur exprimi poterunt

$$nzu(z^{n-2} + \frac{n-1}{2} z^{n-3} u + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} z^{n-4} u^2 + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} z^{n-5} u^3 \dots + u^{n-2})$$

ubi pro  $nzu$  poni potest  $nm$ .

121. In altero Factore

$$z^{n-2} + \frac{n-1}{2} z^{n-3} u + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} z^{n-4} u^2 + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} z^{n-5} u^3 \dots + \frac{n-1}{2} z u^{n-3} + u^{n-2}$$

si ponatur in genere  $n - r$  exponents ipsius  $z$ ; erit in genere ejusdem termini coefficients

$$\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \dots n-(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots r-2 \cdot r-1}$$

Ff 2

Sed

Sed coefficientis termini respondentis in  $(x + u)^{n-2}$ , est

$$\frac{n-2.n-3.n-4.n-5.n-6 \dots n-(r-2).n-(r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots r-3 \cdot r-2}$$

122. Dico nunc secundum coefficientem esse primo majorem numero.

$$\frac{(n-2.n-3.n-4.n-5 \dots n-r+2)(n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r-3 \cdot r-1}$$

in cujus denominatore semper deest  $r-2$  & in numeratore  $n-r+1$ . Nam utriusque denominator habet omnes Factores communes præter  $r-1$ , qui est in primi denominatore, & abest a secundo. Quare secundus numerator revocatus ad primi denominationem, fiet.

$$(n-2.n-3.n-4.n-5.n-6 \dots n-(r-2).n-(r-1))(r-1).$$

Jam numeratores in eo differunt quod primus habet Factorem  $n-1$ , quocaret secundus, qui vicissim habet Factorem  $(n-(r-1))(r-1)$  quo caret primus. Est

$$(n-(r-1))(r-1) = (n-r+1)(r-1) = nr - rr + 2r - n - 1$$

Quapropter excessus secundi supra primum erit.

$$\frac{(n-2.n-3.n-4.n-5 \dots n-(r-2))(nr - rr + 2r - n - 1 - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r-3 \cdot r-2 \cdot r-1}$$

Sed.

$$\frac{nr - rr + 2r - n - 1 - n + 1}{r-2} = \frac{nr - 2n - rr + 2r}{r-2} = n-r. \text{ Ergo \&c.}$$

123. In  $x^{n-3}u$ , secundo termino Factoris descripti N<sup>o</sup>. 121. hujus,  $r=3$ ; ejus termini coefficientis  $\frac{n-1}{2}$ ; & coefficientis secundi termini in

$$(x+u)^{n-2}, \text{ est } n-2; \text{ atque horum differentia est } \frac{n-3}{2}.$$

In  $x^{n-4}u^2$ , tertio ejus termino, est  $r=4$ ; ejus coefficientis  $\frac{n-1.n-2}{2.3}$ ; coefficientis tertii termini in  $(x+u)^{n-2}$  est  $\frac{n-2.n-3}{3}$ ; horum differentia  $\frac{n-2.n-4}{3}$ .

In  $z^{n-5}u^3$ , quarto ejus termino, est  $r = 5$  & coefficientis est

$$\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \text{ coefficientis quarti termini in } (z+u)^{n-2} \text{ est}$$

$$\frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{3 \cdot 4}; \text{ differentia } \frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-5}{2 \cdot 4}.$$

In  $z^{n-6}u^4$  est coefficientis  $\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ ; coefficientis

$$\text{quinti termini in } (z+u)^{n-2}, \text{ est } \frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \text{ differentia}$$

$$\frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-6}{2 \cdot 3 \cdot 5}. \text{ Et sic de reliquis.}$$

¶ 24. Cum autem sit  $(z+u)^{n-2} = x^{n-2}$ ; habebitur ex N<sup>o</sup> 120. & sequentibus

$$x^n = 2a + nm x^{n-2} - nm \left( \frac{n-3}{2} z^{n-3} u + \frac{n-2 \cdot n-4}{3} z^{n-4} u^2 + \dots \frac{n-3}{2} z^{n-3} u \right)$$

cujus pars negativa, dividendo Factorem compositum per  $zu$ , pro  $zu$  ponendo  $m$ , &  $m$  addendo Factori incomplexo, fiet

$$-m \left( \frac{n-3}{2} z^{n-4} + \frac{n-2 \cdot n-4}{3} z^{n-5} u + \frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-5}{2 \cdot 4} z^{n-6} u^2 + \dots \frac{n-3}{2} z^{n-4} \right)$$

vel

$$-\frac{n \cdot n-3}{2} m^2 (z^{n-4} + \frac{2 \cdot n-2 \cdot n-4}{3 \cdot n-3} z^{n-5} u + \frac{n-2 \cdot n-5}{4} z^{n-6} u^2 + \frac{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6}{3 \cdot 5} z^{n-7} u^3 + \dots u^{n-4}).$$

Est autem :

$$z^{n-4} + \frac{2 \cdot n-2 \cdot n-4}{3 \cdot n-3} z^{n-5} u + \frac{n-2 \cdot n-5}{4} z^{n-6} u^2 + \frac{n-2 \cdot n-4 \cdot n-6}{3 \cdot 5} z^{n-7} u^3 + \&c)$$

$$= z^{n-4} + \frac{n-4}{n-4} z^{n-5} u + \frac{n-4 \cdot n-5}{2} z^{n-6} u^2 + \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{2 \cdot 3} z^{n-7} u^3 + \&c)$$

$$= \frac{n-4 \cdot n-5}{3 \cdot n-3} z^{n-5} u + \frac{n-5 \cdot n-6}{4} z^{n-6} u^2 + \frac{n-4 \cdot n-6 \cdot n-7}{2 \cdot 5} z^{n-7} u^3 + \&c)$$

$$= \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-7 \cdot n-8}{2 \cdot 3 \cdot 6} z^{n-8} u^4 + \&c.$$

¶ f 3

At

Atque hujus pars positiva est  $(x+u)^{n-4} = x^{n-4}$ . Fit ergo

$$\begin{aligned} x^n = & 2a + nm x^{n-2} - \frac{n \cdot n-3}{2} m^2 x^{n-4} + \frac{n \cdot n-3}{2} m^3 \left( \frac{n-4 \cdot n-5}{3 \cdot n-3} x^{n-5} u + \right. \\ & \frac{n-5 \cdot n-6}{4} x^{n-6} u^2 + \frac{n-4 \cdot n-6 \cdot n-7}{2 \cdot 5} x^{n-7} u^3 + \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-7 \cdot n-8}{2 \cdot 3 \cdot 5} x^{n-8} u^4 + \\ & \left. \dots \frac{n-5 \cdot n-6}{4} x u^{n-6} + \frac{n-4 \cdot n-5}{3 \cdot n-3} x u^{n-7} \right) \end{aligned}$$

Factor compositus dividatur per  $\frac{n-4 \cdot n-5}{3} x u$ , & divisor hic addatur Factori simplici, scribendo  $m$  pro  $x u$ , habebitur

$$\begin{aligned} + \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5}{2 \cdot 3} m^3 (x^{n-6} + \frac{3 \cdot n-3 \cdot n-6}{4 \cdot n-4} x^{n-7} u + \frac{3 \cdot n-3 \cdot n-6 \cdot n-7}{2 \cdot 5 \cdot n-5} x^{n-8} u^2 + \\ \frac{n-3 \cdot n-7 \cdot n-8}{4 \cdot 6} x^{n-9} u^3 + \dots \frac{3 \cdot n-3 \cdot n-6}{4 \cdot n-4} x u^{n-7} + u^{n-6}). \end{aligned}$$

Atque hic Factor compositus discernetur in

$$\begin{aligned} (x+u)^{n-6} - \left( \frac{n-6 \cdot n-7}{4 \cdot n-4} x^{n-7} u + \frac{n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{5 \cdot n-5} x^{n-8} u^2 + \right. \\ \left. \frac{n-7 \cdot n-8 \cdot n-9}{2 \cdot 6} x^{n-9} u^3 + \dots \frac{n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{5 \cdot n-5} x^2 u^{n-8} + \frac{n-6 \cdot n-7}{4 \cdot n-4} x u^{n-7} \right) \end{aligned}$$

&  $x$ , ponendo  $x^{n-6}$  pro  $(x+u)^{n-6}$ , fiet

$$\begin{aligned} x^n = & 2a + nm x^{n-2} - \frac{n \cdot n-3}{3} m^2 x^{n-4} + \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5}{2 \cdot 3} m^3 x^{n-6} - \\ & m^3 \left( \frac{n \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-7} u + \frac{n \cdot n-4 \cdot n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} x^{n-8} u^2 + \right. \\ & \frac{n \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot n-7 \cdot n-8 \cdot n-9}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} x^{n-9} u^3 + \dots \frac{n \cdot n-4 \cdot n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} x^2 u^{n-8} + \\ & \left. \frac{n \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{2 \cdot 3 \cdot 4} x u^{n-7} \right). \end{aligned}$$

Atque

Atque hoc factum negativum dividendo per  $\frac{n \cdot n - 5 \cdot n - 6 \cdot n - 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} u z$  (vel  $m$ ), & per hunc multiplicando Factorem simplicem  $m^3$ ; quotientem discerpando in duas partes quarum una sit  $(x + u)^{n-8} = x^8$ , & altera excessus illius quotientis supra hunc potestatem, & sic pergendo, ac tandem transponendo, invenietur

$$x^n - n m x^{n-2} + \frac{n \cdot n - 3}{2} m^2 x^{n-4} - \frac{n \cdot n - 4 \cdot n - 5}{2 \cdot 3} m^3 x^{n-6} + \frac{n \cdot n - 5 \cdot n - 6 \cdot n - 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} m^4 x^{n-8} - \frac{n \cdot n - 6 \cdot n - 7 \cdot n - 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} m^5 x^{n-10} + \&c. = 2a$$

Hinc nullo negotio eruuntur æquationes peculiæres

$$x^2 - 2mx = 2a, \text{ si } n = 2; x^3 - 3mx = 2a, \text{ si } n = 3;$$

$$x^4 - 4mx^2 + 2m^2 = 2a, \text{ si } n = 4; x^5 - 5mx^3 + 5m^2x = 2a, \text{ si } n = 5. \&c.$$

quæ sunt æquationes ipsæ, quas invenit NEWTONUS pro anguli multisectione, problemate geometricorum XXIX; pag. 236. Tomi primi.

125. Comparando nostras cum Newtonianis, inveniemus

$$m = rr; \sqrt{m} = r \& q = \frac{2a}{r^{n-1}}$$

ubi  $n$  indicat numerus partium, in quas dividendus est arcus, cujus complementum ad duos rectos subtensam habet  $= q$ ; & diametrum  $= 2r = 2\sqrt{m}$ ; ita ut  $n - 1$  sit 1 pro bisectione, 2, pro trisectione &c.

126. Et hæc quidem pro diametro & subtensis; sed cum habeamus tabulas pro sinubus & cosinubus, non pro subtensis, æquationes ad anguli multisectionem ita mutandæ sunt, ut fiat  $q$  cosinus anguli dividendi; hoc

facile fiet in iis ponendo radium pro diametro, id est  $r$  pro  $2r$ ; &  $\frac{r}{2}$  pro  $r$ . Quo facto, post ablatas fractiones habebitur

$$2xx - rr = qr; 4x^3 - 3r^2x = qr^3; 8x^5 - 8r^3x^2 + r^4 = qr^5$$

$$16x^7 - 20r^4x^4 + 5r^6x = qr^7 \&c.$$

127. Ut analogæ fiat mutatio in æquatione generali ad binomii surdi potestates, pro  $x$  & ejus potestatibus, poni debent  $2x$  atque hujus potestates. Æquatio hinc oriunda dividi poterit per 2, & fiet

$$x^{n-1} \cdot x^n - 2^{n-3} \cdot mm \cdot x^{n-2} + 2^{n-5} \cdot \frac{n \cdot n - 3}{2} m^2 x^{n-4} - \&c. = a$$

128 Jam est  $q$  cosinus anguli multipli; sit  $p$  ejusdem sinus; quicumque sit ille angulus, est

$$r = \sqrt{(qq + pp)} = (\sqrt{(q + p\sqrt{-1})} (\sqrt{(q - p\sqrt{-1})})) = \sqrt{m}$$

Quapropter in hac hypothefi, erit

$$m = (\sqrt[n]{(a + \sqrt{b})} (\sqrt[n]{(a - \sqrt{b})}) = (\sqrt[n]{(q + p\sqrt{-1})} (\sqrt[n]{(q - p\sqrt{-1})}))$$

vel designabit factum e Factoribus imaginariis. Unde facile transferentur ad reductionem binomiorum imaginariorum regula tradita N<sup>o</sup>. 116. pag. 224. & seq. hujus. Nempe

129. Proposito binomio imaginario  $\sqrt[n]{(a + \sqrt{b})}$ , quære  $\sqrt[n]{(aa + b)}$ ; hanc dic  $m$ ; substitue in æquatione ordinis  $n$  valorem ejusque potestates pro  $m$  ejusque potestatibus. Hinc invenies æquationem determinatam, quam comparando cum respondente æquatione ad  $n$ . sectionem anguli, determinabis hujus cosinum  $q$ . Cosinus ex tabulis dabit arcum, cujus facile sumes  $n$ . partem, atque hujus cosinus erit valor ipsius  $x$ .

Erat autem, in hypothefi binomii imaginarii,  $y = m - xx$ . Hinc invenies partem imaginariam.

Ex. gr. Extrahenda sit radix cubica e binomio

$$81 + \sqrt{-2700}. \text{ Est } a = 81; a^2 = 6561; b = 2700; aa + b = 9261 = 21^3.$$

Ergo

$$m = 21; 4x^3 - 3mx = a = 4x^3 - 63x = 81 = 4x^3 - 3r^2x = qr^2$$

Igitur

$$r^2 = 21; r = \sqrt{21}; qr^2 = q \cdot 21 = 81; \& q = \frac{81}{21} = \frac{27}{7}$$

Fac

$$21. \text{ ad } \frac{27 \cdot 27}{7 \cdot 7} \text{ sic } (100000)^2 \text{ ad } \frac{(100000)^2 \cdot 27 \cdot 27}{7 \cdot 7 \cdot 21} = \frac{(100000)^3 \cdot 9 \cdot 27}{7^3}$$

habebis quadratum cosinus tabularis, qui ideo erit

$$\frac{100000 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{7 \sqrt{7}} = \frac{900000 \cdot 17320}{7 \cdot 26457} = 84120$$

qui numerus fere est cosinus tabularis pro arcu  $32^\circ . 45'$ ; hujus tertia pars est



est  $10^\circ. 53'$ , & hujus cosinus 98201, revocandus ad radium  $\sqrt{21} = 4,5825$ ; fere. Sume 5; habebis

$$\frac{5 \cdot 98201}{100000} = 4,91005 = \frac{9}{2} \text{ proxime} = x; \text{ hinc } m = 21 - \frac{81}{4} =$$

$$\frac{84 - 81}{4} = \frac{3}{4} = y; \text{ ac } \sqrt{\quad} y = \frac{1}{2} \sqrt{\quad} 3;$$

& radix quaesita

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\quad} 3, \text{ una; } \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\quad} 3 \right) \left( \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\quad} 3 \right), \text{ altera;}$$

$$\left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\quad} 3 \right) \left( \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\quad} 3 \right), \text{ tertia.}$$

Extrahenda sit radix quarta e binomio

$$-7 + \sqrt{\quad} 576; \text{ est } a = -7; a^2 = +49; b = 576; aa + b = 625 = 5^2.$$

Ergo

$$m = 5; 8x^4 - 8mx^2 + m^2 = a = 8x^4 - 40x^2 + 25 = -7 = 8x^4 - 8r^2x^2 + r^4 = r^4q.$$

Igitur

$$r^2 = 5; r = \sqrt{5}; qr^2 = -7; q = -\frac{7}{5\sqrt{5}}; \text{ atque est } 5 \text{ ad } (100000)^2 \text{ ut } \frac{49}{125} \text{ ad}$$

quadratum cosinus tabularis; qui cosinus erit  $\frac{700000}{25} = 28000$ . Hic au-

tem numerus est cosinus pertinens ad arcum  $73^\circ. 44'$ . Hujus quarta pars est arcus  $18^\circ. 26'$ , cujus cosinus 94869. Jam  $(100000)^2$  ad  $(94869)^2$  ut 5 ad 4,5000635805 cujus radix quadrata est 2,1213 circiter; est ergo

$$x = 2; y = xx - m = 4 - 5 = -1; \text{ \& radix } 2 + \sqrt{\quad} 1.$$

Ceterum, notum est cosinum negativum indicare arcum quadrante majorem; & contra.

130. Observavit NEWTONUS N°. II. pag. 2. hujus, eandem æquationem, quæ determinat quintam partem dati arcus, determinare etiam quintam partem quinque arcuum a dato diversorum; & a multis ostensum est, quod si arcus A sit in n partes dividendus, & sit C tota circumferentia, quæstionem solvent cosinus arcuum

$$\frac{A}{n}; \frac{C-A}{n}; \frac{C+A}{n}; \frac{2C-A}{n}; \frac{2C+A}{n}; \frac{3C-A}{n}; \frac{3C+A}{n}; \text{ \&c.}$$

Tom. II.

G g

do-

donec eorum numerus sit  $n$ . Si hi cosinus singuli ponantur pro  $x$ , habebuntur omnes radices binomii propositi. Sic in primo exemplo, præter cosinum arcus  $10^\circ.53'$ ; etiam cosinus arcuum

$$109^\circ.5' = \frac{360^\circ - 32^\circ.45'}{3} \quad \& \quad 130^\circ.53' = \frac{360^\circ + 32^\circ.45'}{3}$$

revocati ad radium  $\sqrt{21}$ , quæstionem solvent; eruntque hi cosinus

$$-\frac{3}{2} = x; \quad \& \quad -3 = x; \quad \text{unde } y = 21 - \frac{9}{4} = \frac{75}{4}; \quad \& \quad y = 21 - 9 = 12$$

quare tres radices binomii propositi erunt

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}; \quad -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}; \quad -3 + 2\sqrt{-3}$$

$$\text{quarum secunda est } \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)$$

$$\text{Tertia autem est } \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right).$$

At in ultimo exemplo, præter cosinum arcus  $18^\circ.26'$ , solvunt quæstionem cosinus arcuum

$$71^\circ.34' = \frac{360^\circ - 73^\circ.44'}{4}; \quad 108^\circ.26' = \frac{360^\circ + 73^\circ.44'}{4};$$

$$\& \quad 161^\circ.34' = \frac{720^\circ - 73^\circ.44'}{4}$$

Horum primus revocatus ad radium  $\sqrt{5}$ , est  $0,71126$ , cui proximus est numerus  $+1 = x$ ; ergo  $y = xx - m = 1 - 5 = -4$ ; & radix  $+1 + 2\sqrt{-1}$ , cujus quarta potestas restituit binomium propositum. Hujus primi arcus complementum ad duos rectos est secundus, quare  $x$  sumi debet negative, & radix tertia erit  $-1 + 2\sqrt{-1}$ . Tertius autem est complementum illius qui primo inventus fuerat nempe  $18^\circ.26'$ ; ac quarta radix erit  $-2 - \sqrt{-1}$ .

Quod etiam optime congruit cum illis, quæ inveneramus N°. 87. pag. 82. hujus; quod quarta potestas unitatis radices habeat

$$+1; \quad -1; \quad +\sqrt{-1}; \quad -\sqrt{-1}.$$

Nam prima radix polynomii propositi est

1 (2+√-1); secunda (2+√-1) (-√-1); tertia (2+√-1) (+√-1);  
quarta (2+√-1) (-1.)

131. Tandem ope hujus theorematism solvuntur æquationes omnes quæ formam habent descriptam N°. 127. pag. 231. hujus. Æquatio generalis ejus numeri habet coefficientem secundi termini, si considerentur termini qui adsunt, vel tertii, si ratio habeatur evanescentis

$2^{n-3}.nm$ , & si radices sunt reales, est  $m = \sqrt[n]{(aa-b)}$  (N°. 114. pag. 221. hujus) tunc ergo  $m^n$  est minor quam  $aa$ . Sed quando radices sunt imaginariæ, est  $m = \sqrt[n]{(aa+b)}$  (N°. 118. pag. 227. hujus); &  $m^n$  major quam  $aa$ .

Sed data æquatione datur coefficientis secundi termini existentis; datur etiam exponens altissimi termini, vel  $n$ ; atque ideo  $2^{n-3}.n$ ; per hunc numerum dividatur coefficientis termini secundi, quotiens erit  $m$ ; hic quotiens evehatur ad potestatem  $n$ ; si est  $m^n$  minor quam quadratum ultimi termini omnino cogniti, æquatio solvetur per methodum traditam N°. 117. pag. 225. hujus, si modo solvi potest, & describetur ejus radix per

$$x = \frac{1}{2} \sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{(a-\sqrt{b})}.$$

Sed hæc radix per se & directe non solvit æquationem propositam; nam eam non restituit, nisi pro  $\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} + \sqrt[n]{(a-\sqrt{b})}$  & ejus potestativis subinde resituantur  $x$  & ejus potestates. Constat e superioribus.

Si vero sit  $m^n$  major quam quadratum ultimi termini, confugiendum ad anguli multifectionem, & solvetur æquatio methodo exposita N°. 129. pag. 231. hujus.

132. Quomocunque reperiatu valor incognitæ in æquationibus cubicis, nempe

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{-b})} = x + \sqrt{-\beta}; \text{ \& } \sqrt[3]{(a-\sqrt{-b})} = x - \sqrt{-\beta};$$

realis erit harum summa, &  $x = 2x$ .

Aliæ duæ radices erunt

$$(x+\sqrt{-\beta}) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3}\right) + (x-\sqrt{-\beta}) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3}\right) = -x + \sqrt{3}\beta$$

&c

$$(x+\sqrt{-\beta}) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-3}\right) + (x-\sqrt{-\beta}) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-3}\right) = -x - \sqrt{3}\beta$$

G G 2

Et

Et tres radices reales erunt, rem ostendente KÆSTNERO in peculiari dissertatione quam ideo conscripsit. Si nempe binomii imaginarii radix cubica possit inveniri sine solutione æquationis cubicæ. Hinc autem orietur æquatio ejus formæ, quæ dicitur irreductibilis, nempe,

$$x^3 - 3(\alpha + \beta)x - 2(\alpha^3 - 3\alpha\beta) = 0.$$

quæ tantum differt ab æquatione N<sup>i</sup>. 106. pag. 221. hujus, duobus illis, quæ hanc reddunt irreductibilem.

133. Hæc aperte quidem ostendunt quomodo radix æquationis irreductibilis sub forma imaginaria complecti possit tres radices reales, si modo binomii imaginarii tertia radix extrahi possit; sed non ostendunt cur per CARDANI regulam radix habeatur sub forma imaginaria; ideo non destruunt difficultatem, de qua (N<sup>ii</sup> 99.. 107. pag. 217 ... 222. hujus).

134. Monstratum jam fuit N<sup>ii</sup> 95..97. pag. 214..216. hujus, æquationem irreductibilem oriri posse e tribus radicibus realibus, quarum una saltem, est commensurabilis. Nunc dico in ipsa æquatione inventa N<sup>o</sup>. 132. hujus, esse  $\alpha$  quantitatem commensurabilem aut rationalem, si ipsa æquatio est rationalis; etiam si forte minus necessarium sit id ostendere post ea quæ jam observavimus.

Sit enim, si fieri potest,  $\alpha = \sqrt[n]{\gamma^r}$ ; erit  $\alpha^2 = \sqrt[n]{\gamma^{2r}}$ , quæ quantitas debet esse rationalis, ut æquatio rationalis exfurgat. Ergo  $\frac{2r}{n}$  est numerus integer; & aut

$$n = 2; \text{ \& } \sqrt[n]{\gamma^r} = \sqrt{\gamma^r}; \text{ aut } r = ns; \text{ \& } \sqrt[n]{\gamma^r} = \sqrt{\gamma^{ns}} = \gamma^s.$$

In ultima hypothefi statim  $\sqrt[n]{\gamma^r}$ , atque ideo  $\alpha$ , est rationalis. In altera, crit

$$\sqrt[n]{\gamma^r} = \sqrt{\gamma^r}; \text{ hinc } \alpha^3 = \gamma^r \sqrt{\gamma^r}$$

quæ quantitas pariter debet esse rationalis, ne irrationalem habeat ultimi termini partem æquatio proposita. Igitur  $\frac{r}{2}$  est numerus integer &  $\sqrt{\gamma^r}$ , vel  $\alpha$ , est iterum quantitas rationalis.

# A P P E N D I X Æ Q U A T I O N U M

## *Constructio linearis.*

I. **H**ætenus æquationum proprietates, transmutationes, limites, & omnis generis reductiones, docui. Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi visæ sunt, & nonnunquam absque nimis ambagibus tradi non possent. Restat jam tantum ut æquationum, postquam ad formam commodissimam reductæ sunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodissime per æquationis constructionem aliquam seu geometricam sive mechanicam conficitur. Qua de causa non pigebit. hujusmodi constructiones aliquas subjungere.

II. Veteres, ut ex PAPPO discimus, trisectionem anguli, & inventionem duarum medie proportionalium, sub initio per rectam lineam & circumulum, frustra aggressi sunt. Postea considerare cœperunt alias permultas lineas, ut conchoidem, cissoidem, & conicas sectiones, & per harum aliquas solverunt problemata. Tandem re penitus examinata, & conicis sectionibus in Geometria receptis, problemata distinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas, a plano originem derivantes, rectam nempe & circumulum solvi possint; *Solida* quæ per lineas ortum a solidi, id est conici, consideratione derivantes solvebantur; & *Lineria* ad quorum solutionem requirebantur lineæ magis compositæ. Et juxta hanc distinctionem, problemata solida per alias lineas quam conicas sectionesolvere a Geometria alienum est; præsertim si nullæ aliæ lineæ præter rectam, circumulum, & conicas sectiones in Geometriam recipiantur. At recentiores longius progressi receperunt lineas omnes in Geometriam quæ per æquationes exprimi possunt, & pro dimensionibus æquationum distinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt non licere problema per lineam superioris generis construere quod construi potest per lineam inferioris.

III. In lineis contemplandis, & eruedis earum proprietatibus, distinctionem earum in genera juxta dimensiones æquationum per quas definiuntur, laudo. At æquatio non est, sed descriptio quæ curvam geometricam efficit. Circulus linea geometrica est, non quod per æquationem exprimi potest; sed quod descriptio ejus postulat. Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones problematum prius admittendam esse indicat. Nam æquatio ad parabolam simplicior est quam æquatio ad circumulum; & tamen circulus ob simplicioris descriptionem prius admittitur. Circulus & conici sectiones, si æquationum dimensionem

siones spectentur, ejusdem sunt ordinis; & tamen circulus in constructione problematum non connumeratur cum his, sed ob simplicem descriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum construere quod per rectas construi potest, non sit illicitum; per conicas vero sectiones construere quod per circulum construi potest vitio vertatur. Aut igitur legem a dimensionibus æquationum in circulo observandam esse statue, & sic distinctionem inter problemata plana & solida, ut vitiosam, tolle; aut concede legem illam in lineis superiorum generum non ita observandam esse, quin aliquæ ob simpliciorum descriptionem præferantur aliis ejusdem ordinis, & in constructione problematum cum lineis inferiorum ordinem connumerentur. In constructionibus quæ sunt æque geometricæ, præferendæ semper sunt simpliciores. Hæc lex omni exceptione major est. Ad simplicitatem vero constructionis expressiones algebraicæ nil conferunt. Solæ descriptiones linearum hic in censum veniunt. Has solas considerabant Geometræ qui circulum conjungebant cum recta. Prout hæc sunt faciles vel difficiles, constructio facilis vel difficilis redditur. Adeoque a rei natura alienum est leges constructionibus aliunde præscribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum, & forte conicas sectiones, e Geometria cum veteribus excludamus, aut admittamus omnes secundum descriptionis simplicitatem. Si trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in data ratione secare. Numquid ergo reprehenderes si quis hac lineæ ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes hanc lineam per æquationem non definiri, lineas vero quæ per æquationes definiuntur, adhibendas esse? Igitur si angulus e. g. in 10001 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam æquatione plusquam centum dimensionum definitam in medium asserre, quam tamen nemo mortalium describere, nedum intelligere, valeret; & hanc antepone-re trochoidi quæ lineæ notissima est, & per motum rotæ vel circuli facillime describitur. Quod quam absurdum sit quis non videt? Aut igitur trochoides in Geometriam non est admittenda, aut in constructione problematum curvis omnibus difficilioris descriptionis anteferenda. Et eadem est ratio de reliquis curvis. Quo nomine trisectiones anguli per conchoideum quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus posuere, præ aliorum hæc de re inventis omnibus, laudamus; siquidem lineas præter rectam & circulum e Geometria excludere debeamus, aut secundum descriptionis simplicitatem admittere, & conchoides simplicitate descriptionis nulli curvæ præter circulum cedit. Æquationes sunt expressiones computi arithmetici, & in Geometria locum proprie non habent, nisi quatenus quantitates vere geometricæ (id est lineæ, superficies, solida, & proportionales) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Divisiones, & ejusmodi computa in Geometriam recens introducta sunt; idque inconsulto, & contra primum institutum scientiæ hujus. Nam qui constructiones problematum per rectam & circulum a primis Geometris adinventas considerabit, facile sentiet Geometriam excoitatam esse ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæc duæ scientiæ confundi non debent. Veteres tam sedulo distinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam ter-

minos aritmeticos nunquam introduxerint. Et recentes utramque confundendo amiserunt simplicitatem in qua Geometriæ elegantia omnis consistit.

IV. Est itaque *arithmetice* quidem simplicius quod per simpliciores æquationes determinatur: at *geometrice* simplicius est quod per simpliciorum ductum linearum colligitur; & in Geometria prius & præstantius esse debet quod est ratione geometrica simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit si cum Mathematicorum Principe, *Archimede*, aliisque veteribus, conchoidem ad solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen si quis aliter senserit, sciat me hic de constructione non geometrica sed qualicunque, sollicitum esse, qua radices æquationum in numeris proxime assequar. Cujus rei gratia præmitto hoc problema lemmaticum.

*Inter datas duas lineas AB, AC rectam datæ longitudinis BC ponere quæ producta transeat per datum punctum P.*

V. Si circa polum P gyret linea BC, simul terminus ejus C incedat su-  
per recta AC, ejus alter terminus B describet conchoidem veterum. Tab. IX.  
Fig. I.  
cet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea BC duci potest ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur.

VI. Sicuti constructio hæcce per conchoidem minus placeat, potest alia per conicam sectionem ejus vice substitui.

A puncto P ad rectas AD; AE; age PD; PE; constituentes parallelogrammum EADP, & a punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendiculara CF; DG; ut & a puncto E ad rectam AC versus A productam perpendicularum EH, & dictis

$$AD = a, PD = b; BC = c; AG = d; AB = x; \& AC = y.$$

$$\text{Erit AD ad AG ut AC ad AF, adeoque } AF = \frac{dy}{a}.$$

Erit & AB ad AC ut PD ad CD, seu  $x$  ad  $y$  ut  $b$  ad  $a - y$ . Ergo  $by = ax - yx$ ,  
quæ æquatio est ad hyperbolam. Rursus per 13. II. *Elem.* erit

$$BCq = ACq + ABq - 2FAB, \text{ id est } cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}.$$

Prioris æquationis partes ductas in  $\frac{2d}{a}$  aufer de partibus hujus, & restabit

$$cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx,$$

æquatio ad circulum, ubi  $x$  &  $y$  ad rectos sunt angulos. Quare si hæc duas  
li-

lineas, hyperbolam & circulum, ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis  $x$  &  $y$ , seu AB & AC, quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Tab. IX. VII. Duc rectas duas qualvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD, Fig. 2. continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & asymptotis LN, MN per punctum K describe hyperbolam IKX.

VIII. In KM versus K producta, cape KP æqualem AG; & KQ æqualem BC. Et in in KL producta versus K, cape KR æqualem AH; & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T, intervallo TS, describe circulum. Secet hic hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendicularum XY, & erit XY æqualis AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ, AC & AB, vel una earum, cum puncto P determinant positionem quæsitam rectæ BC Cui constructioni demonstrandæ, & ejus casibus secundum casus problematis determinandis non immoror.

IX. Hac, inquam, constructione solvi potest problema, sicuti ita visum sit. Sed hæc solutio magis composita est quam ut usibus ullis inservire possit. Nuda speculatio est, & speculationes geometricæ tantum habent elegantiae quantum simplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis secum afferunt. Ea de causa constructionem per conchoidem præfero ut multo simplicior, & non minus geometricam, & quæ resolutioni æquationum a nobis propositæ optime conducit. Præmissis igitur præcedente Lemmate, construimus geometricè problemata cubica, & quadrato-quadratica (ut pote quæ ad cubica reduci possunt) ut sequitur.

X. Proponatur æquatio cubica

$$x^3 + qx + r = 0,$$

cujus terminus secundus deest, tertius vero sub signo suo designatur per  $+q$  & quartus per  $+r$ .

Tab. IX. Duc quamlibet KA, quam dic  $n$ . In KA utrinque producta, cape KB =  $\frac{q}{n}$  Fig. 3.4.5. ad easdem partes cum KA si habeatur  $+q$ , aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K, radio KC, fac circulum CX, cui inscribe rectam CX æqualem  $\frac{r}{nn}$ , & produc eam utrinque. Dein junge AX, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis cum CA, quæque producta transeat per punctum K, & XY erit erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadent ad partes X versus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, si habeatur  $+r$ , & contra si habeatur  $-r$ .

Demonstratio.

Ad demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM-



## LEMMA I.

XI. *Est YX ad AK ut CX ad KE.* Etenim age KF parallelam CX, & ob similia triangula ACX; AKF, & EYX; EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF, & YX ad YE (seu AC) ut KF ad KE; adeoque ex æquo perturbate, YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

## LEMMA II.

XII. *Est YX ad AK ut CY ad AK + KE.* Nam componendo est YX ad AK ut YX + CX, id est CY ad AK + KE. Q. E. D.

## LEMMA III.

XIII. *Est KE — BK ad YX ut YX ad AK.*  
Nam per 13. II. Elem. est

$$YKq - CKq = CYq - CY \cdot CX = CY \cdot YX,$$

hoc est, si theorema resolvatur in proportionem,

$$CY \text{ ad } YK - CK \text{ ut } YK + CK \text{ ad } YX.$$

Sed est

$$YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK.$$

Et

$$YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK.$$

Adcoque est

$$CY \text{ ad } KE - BK \text{ ut } KE + AK \text{ ad } YX.$$

Sed per *Lemma secundum* erat

$$CY \text{ ad } KE + AK \text{ ut } YX \text{ ad } AK.$$

Ergo ex æquo est YX ad KE — BK ut AK ad YX. Seu KE — BK ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

XIV. His præmissis demonstrabitur theorema ut sequitur.

In primo Lemmate erat YX ad AK ut CX ad KE, seu KE · YX = AK · CX.

In tertio erat KE — BK ad YX ut YX ad AK.

Unde si prioris rationis termini ducantur in YX fiet

$$KE \cdot YX - BK \cdot YX \text{ ad } YXq \text{ ut } YX \text{ ad } AK,$$

id est

Hh

AK.CX—BK.YX ad YX<sub>q</sub> ut YX ad AK,

& ductis extremis & mediis in se

$$AKq.CX—AK.BK.YX = YX^{cub.}$$

Denique pro YX; AK; BK; & CX; reſtitutis  $x$ ;  $n$ ;  $\frac{q}{n}$ ; &  $\frac{r}{nn}$  orietur  
 $r—qx = x^3$ . Q. E. D.

XV. Quod vero ad ad ſignorum variationes attinet, iſtis ſecundum caſus problematum determinandis non immoror.

XVI. Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deſeſt

$$x^3 + pxx + r = 0.$$

Et ad ejus conſtructionem aſſumpto quolibet  $u$ , cape in recta aliqua longitudines duas  $KA = \frac{r}{nn}$ ; &  $KB = p$ , idque ad eaſdem partes ſi  $r$  &  $p$  habeant eadem ſigna, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K, radio KC, deſcribe circulum cui inſcribe CX æqualem  $u$ , & produc eam utrinque. Item junge AX, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejusdem longitudinis cum CA, ita ut ea, ſi producatur, tranſeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ ſunt ubi punctum Y cadit a parte puncti X verſus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X ſi modo habeatur  $+r$ , & contra ſi habeatur  $-r$ .

Ad hujus Propositionis demonſtrationem ſchemata & lemmata de prioris propoſitione mutuo ſumantur, & demonſtratio erit ut ſequitur.

XVII. Per Lemma 1, erat

$$YX \text{ ad } AK \text{ ut } CX \text{ ad } KE, \text{ ſeu } YX.KE = AK.CX,$$

$$\text{ \& per Lemma 3, } KE—KB \text{ ad } YX \text{ ut } YX \text{ ad } AK,$$

aut (ſumpto KB ad contrarias partes)

$$KE+KB \text{ ad } YX \text{ ut } YX \text{ ad } AK,$$

adeoque

$$(KE+KB) \text{ in } KE \text{ ad } YX.KE, \text{ ſeu } AK.CX \text{ ut } YX \text{ ad } AK, \text{ ſeu } CX \text{ ad } KE.$$

Quare ductis extremis & mediis in ſe, eſt

$$KE^{cub.} + KB.KEq = AK.CXq,$$

& ipſarum KE; KB; AK; & CX, reſtitutis valoribus ſupra assignatis,  
 $x^3 + pxx = r$ .

XVIII.

## XVIII. Proponimus jam æquationem trium dimensionum

$$x^3 + pxx + qx + r = 0,$$

nullo termino carentem, & cujus tres radices non sunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ.

Et primo si terminus  $q$  negativus est, in recta aliqua KB capiantur longi-  
tudines duæ  $KA = \frac{r}{q}$ ; &  $KB = p$ , idque ad easdem partes puncti K si

Tab. IX:  
Fig. 6.

$p$ ; &  $\frac{r}{q}$  habent signa diversa; aliter ad contrarias. Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini  $q$ . Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY, quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis, quæ quidem affirmativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E, negativa vero si punctum E cadat ad partes puncti X versus A.

XIX. Quod si terminus  $q$  affirmativus est, in recta KB capiantur longi-  
tudines illæ duæ  $KA = \sqrt{\frac{-r}{p}}$ , &  $KB = \frac{q}{KA}$ , idque ad easdem partes

puncti K, si  $\sqrt{\frac{-r}{p}}$  &  $\frac{q}{KA}$  habent signa diversa; aliter ad contrarias. Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino  $p$ ; & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY, quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E, affirmativa vero si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

*Demonstratio casus prioris.*

XX. Per Lemma primum erat

KE ad CX ut AK ad YX,

& ita (componendo) est

KE + AK, id est KY + KC, ad CX + YX, id est, CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YCq æquale YKq - KCq, id æquale (KY + KC) (KY - KC), & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY + KC ad CY ut CY ad KY - KC, seu KE + AK ad CY ut CY ad EK - KB. Quare cum in hac proportionem fuerit KE ad CX, duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE + AK ad KE - KB; & ductis extremis & mediis in se KE cub. - KB . KEq = CXq . KE + CXq . AK. Et restitutis valoribus supra assignatis  $x^3 - pxx = qx + r$ .

## Demonstratio casus secundi.

XXI. Per Lemma primum est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se, fit KE . YX = CX . AK. Scribe ergo in superioribus KE . YX pro CX . AK, & fiet KE cub. — KB . KEq = CXq . KE + CX . KE . YX. Et applicatis omnibus ad KE, erit, KEq — KB . KE = CXq + CX . YX: ductisque omnibus in AK habebitur AK . KEq — AK . KB . KE = AK . CXq + AK . CX . YX. Ac rursus scripto KE . YX pro CX . AK, fiet AK . KEq — AK . KB . KE = KE . YX . CX + KE . YXq: & applicatis omnibus ad KE, orietur AK . KE — AK . KB = YX . CX . CX + YXq: ductisque omnibus in YX, emerget AK . KE . YX — AK . KB . YX = YXq . CX + YX cub. & pro KE . YX scriptis in primo termino CX . AK, fiet CX . AKq — AK . KB . YX = CX . YXq + YX cub.; seu, quod perinde est, YX cub. + CX . YXq + AK . KB . YX — CX . AKq = 0. Atque pro YX; CX; AK; & KB; sub-

stitutis valoribus supra assignatis  $x$ ;  $p$ ;  $\sqrt{\frac{r}{p}}$ ;  $q\sqrt{\frac{p}{r}}$ ; emerget tandem  $x^3 + pxx + qx + r = 0$ , æquatio construenda.

XXII. Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circumulum & aliam rectam positione datos, ea lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.

Proponatur enim æquatio cubica  $x^3 + qx + r = 0$ , cujus terminus secundus deest.

Tab. IX.  
Fig. 7.

Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic  $n$ . In KA utrinque producta cape KB =  $\frac{q}{n}$ , idque ad easdem partes puncti K cum linea KA si modo habeatur —  $q$ , aliter ad diversas. Biseca BA in C, & centro A, intervallo AC, describe circumulum CX. Ad hunc apta lineam rectam CX =  $\frac{r}{nn}$ , & per puncta K, C, & X describe circumulum KCXG. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circumulum ultimo descriptum KCXG, in puncto G. Denique inter hunc ultimo descriptum circumulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KEC si habeatur —  $r$ ; & contra si habeatur +  $r$ , affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperiuntur.

Ad hujus vero constructionis demonstrationem præmittimus lemmata sequentia.

## L E M M A I.

XXIII. Positis quæ in constructione superiore, est CE ad KA ut CE + CX ad AY, & CX ad KT;

Nam

Nam, recta KG ducta, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulum ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC, juxta hypothesin, æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbate quod fit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE + CX ad CX ut KA + KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE + CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q. E. D.

## L E M M A I I.

XXIV. Demisso ad lineam GT perpendicularo CH, fiet rectangulum 2HEY æquale rectangulo CE . CX.

Nam, demisso etiam ad lineam AY perpendicularo GL, triangula KGL; ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, a puncto A ad lineam KG demisso perpendicularo AM, ob æquales AK, AG bisecabitur KG in M, & triangula KAM, KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos, fient similia & inde est AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut est AK ad KM ita est 2AK ad 2KM, seu KG, & ita (ob similia triangula AKG, ACX) est 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita est 2EY ad CX. Ergo est 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo EC . CX. Q. E. D.

XXV. Assumpsimus hic lineas AK; AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK, XAG (per Corol. Prop. Prop. 36. lib. III. Elem.) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK. Sed CA, XA æquales sunt per hypothesin; ergo & AG; AK.

## L E M M A I I I.

XXVI. Constructis omnibus ut supra, tres lineæ BY; CE; KA; sunt continue proportionales.

Nam, (per Prop. 12. lib. II. Elem.), est  $CYq = EYq + CEq + 2EX$ . EH. Et ablato utrinque  $EYq$  fit  $CYq - EYq = CEq + 2EY . EH$ . Sed 2EY . EH (per Lem. 2.) æquale est rectangulo CE . CX, & addito utrinque  $CEq$  fit  $CEq + 2EY . EH = CEq + CE . CX$ . Ergo  $CYq - EYq$  æquale est  $CEq + CE . CX$ , id est  $(CY + EY) . (CY - EY)$  æquale est  $CEq + CE . CX$ . Et resolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit CE + CX ad CY + EY ut CY - EY ad CE. Sunt autem tres lineæ EY; CA; CB: æquales & inde  $CY + EY = CY + CA = AY$ , &  $CY - EY = CY - CB = BY$ . Scribantur itaque AY pro CY + EY, & BY pro CY - EY, & fiet CE + CX ad AY ut BY ad CE. Sed

Hh 3

(per

(per Lem. 1.) est CE ad KA ut CE + CX ad AY, ergo est CE ad KA ut BY ad CE, hoc est lineæ tres BY, CE, KA, sunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio superioris problematis sic demonstratur.

XXVII. Per Lemma 1. est CE ad KA ut CX ad KY, adeoque KA.CX = KY . CE, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit  $\frac{KA \cdot CX}{CE} = KY$ . His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt BK +  $\frac{KA \cdot CX}{CE}$  & BY. Unde per Lemma tertium est BK +  $\frac{KA \cdot CX}{CE}$  ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in, se provenit CEq æquale BK . KA +  $\frac{KAq \cdot CX}{CE}$ , & omnibus præterea ductis in CE fit, CE cub. æquale BK . KA . CE + KAq . CX.

CE erat radix æquationis dicta  $x$ ; KA erat  $n$ ; KB  $\frac{q}{n}$ ; & CX  $\frac{r}{m}$ . His pro CE; KA; KB; & CX substitutis oritur  $x^3 = qx + r$ , seu  $x^3 - qx - r = 0$ , æquatio construenda; ubi  $q$  &  $r$  negativa prodeunt sumptis KA & KB ad eandem partes puncti K, & radice affirmativa in majori segmento CGK existente. Hic unus casus est constructionis demonstrandæ.

Ducatur KB ad partes contrarias, id est, mutetur signum ejus, seu signum ipsius  $\frac{q}{n}$ , vel quod perinde est, signum termini  $q$ , & habebitur constructio æquationis  $x^3 + qx - r = 0$ : qui casus est alter.

In his casibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad eandem partes lineæ AK.

XXIX. Cadant CX & radix negativa ad eandem mutato signo ipsius CX, seu  $\frac{r}{m}$  vel (quod perinde est) signo ipsius  $r$ , & habebitur casus tertius  $x^3 + qx + r = 0$ , ubi radices omnes sunt negativæ.

XXX. Et mutato rursus signo ipsius KB, seu  $\frac{q}{n}$ , vel solius  $q$ , incidetur in casum quartum  $x^3 - qx + r = 0$ . Quorum omnium casuum constructiones percurrere licebit, & sigillatim demonstrare ad modum casus primi. Nōs uno casu demonstrato ceteros leviter attingere satis esse putavimus. Hi verbis iisdem mutato solum linearum situ demonstrantur.

XXXI. Construenda jam sit æquatio cubica  $x^3 + pxx + r = 0$ , cujus tertius terminus deest.

In figura superiore assumpta longitudine quavis  $n$ , capias in recta quavis infinita AY; KA; & KB; quarum KA valeat  $\frac{r}{n}$ ; & KB valeat  $p$ . Hasc ape ad eandem partes puncti K, si modo signa terminorum  $p$  &  $r$  sint eadem, secus ad contrarias. Biseca BA in C, & centro A, intervallo AC, de-

describere circulum CX. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini assumptæ  $n$ . Junge AX, & produc junctam ad G, ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncti K; C; X; G; describe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam, inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ea lege, ut hæc inscripta transeat per punctum G, si modo ipsa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K versus punctum A si modo habeatur  $+r$ ; sin habeatur  $-r$ , affirmativæ sunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et si affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ sunt quæ jacent ex altera.

Demonstratur autem hæc constructio ope lemmatum trium novissimorum in hunc modum.

XXXII. Per *Lemma tertium* BY; CE; KA; continue proportionales; & per *Lemma primum* ut est CE ad KA ita est CX ad KY. Ergo BY est ad CE ut CX ad KY. Sed BY idem est quod KY — KB. Ergo KY — KB est ad CE ut CX ad KY. Sed ut est KY — KB ad CE ita est KY — KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop. 1. lib. VI. Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY est CE in KY æquale KA in CX. Ergo (KY — KB) KY est ad KA in CX (ut KY — KB ad CE, hoc est) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in se invicem, fit (KY — KB) KYq æquale KA in CXq; id est KY cub. — KB . KY quad. æquale KA . CX quad. Erat autem in constructione, KY radix æquationis dicta  $x$ ; KB æqualis  $p$ ; KA æqualis  $\frac{r}{m}$ ; & CX æqualis  $n$ . Scribantur igitur  $x$ ;  $p$ ;  $\frac{r}{m}$ ; &  $n$ ; pro KY; KB; KA; & CX; respective, & fiet

$$x^3 - pxx = r, \text{ seu } x^3 - pxx - r = 0.$$

XXXIII. Resolvi potest constructio demonstranda in hæc quatuor æquationum casus,

$$x^3 - pxx - r = 0, \quad x^3 - pxx + r = 0,$$

$$x^3 + pxx - r = 0, \quad \& \quad x^3 + pxx + r = 0.$$

Casus primum jam demonstratum dedi, ceteri tres iisdem verbis, mutato tantum linearum situ, demonstrantur. Nimirum, uti sumendo KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodijt KY cub. — KB . KYq = KA . CXq, & inde  $x^3 - pxx - r = 0$ : sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu, KY cub. + KB . KYq = KA . CXq, & inde

$$x^3 + pxx - r = 0.$$

Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY cub. + KB . KYq = — KA . CXq, seu

 $x^3$

$x^3 + pxx + r = 0$ , & KY cub. — KB . KYq = — KA . CXq, seu  
 $x^3 - pxx + r = 0$ . Qui omnes casus erant demonstrandi.

XXXIV. Pronatur jam æquatio cubica

$$x^3 + pxx + qx + r = 0,$$

nullo (nisi forte tertio) termino carens. Ea construetur ad hunc modum.

Tab. IX. Cape ad arbitrium longitudinem  $n$ . Ejus dimidio æqualem duc rectam  
 Fig. 8.

quamvis GC, & ad punctum G erige perpendicularum GD æquale  $\sqrt{\frac{r}{p}}$ .

Deinde si termini  $p$  &  $r$  habent contraria signa, contro C, intervallo CD,  
 Tab. X. describe circulum PBE. Sin eadem sunt eorum signa, centro D, intervallo  
 Fig. 1. GC, describe circulum occultum secantem rectam GA in H; dein centro C,

intervallo GH, describe circulum PBE. Tum fac  $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ ;

eamque duc in linea GC ad partes puncti G versus C si modo quantitas

$-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$  (signis terminorum  $p$ ;  $q$ ;  $r$ ; in æquatione construenda pro-

be observatis) affirmativa obvenierit: secus age GA ad alteras partes puncti  
 G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE  
 superius descriptum inscribe lineam EY æqualem termino  $p$ , ea lege ut hæc  
 inscripta convergat ad punctum G. Quo facto & producta illa EY ad G,  
 erit linea EG una ex radicibus æquationis construendæ. Quæ quidem radi-  
 ces affirmativæ sunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ  
 ubi E cadit extra, si modo habeatur  $+p$ ; & contra si  $-p$ .

Demonstrationi hujus constructionis præmittimus lemmata sequentia.

### LEMMA I.

XXXV. Demisso ad AG perpendiculo EF, & acta recta EC, est  $EGq + GCq$   
 $= ECq + 2CGF$ .

Nam, per Prop. 12. lib. II. Elem., est  $EGq = ECq + GCq + 2CGF$ .  
 Addatur utrinque  $GCq$  & fiet  $EGq + GCq = ECq + 2GCq + 2CGF$ .  
 Sed  $2GCq + 2CGF$  est  $2GC$  in  $GC + CF$  id est  $2CGF$ . Ergo  $EGq$   
 $+ GCq = ECq + 2CGF$ . Q. E. D.

### LEMMA II.

Tab. IX. XXXVI. In constructionis casu primo, ubi circulus PBE transit per punctum  
 Fig. 8. D, est  $EGq - GDq = 2CGF$ .

Nam per Lemma primum, est  $EGq + GCq = ECq + 2CGF$ , & ablato  
 utrinque  $GCq$ , fit  $EGq = ECq - GCq + 2CGF$ . Sed  $ECq - GCq$   
 idem est quod  $CDq - GCq$ , hoc est idem quod  $GDq$ . Ergo  $EGq = GDq$   
 $+ 2CGF$ , & subducto utrobique  $GDq$ , fit  $EGq - GDq = 2CGF$ .  
 Q. E. D.

LEM-



## LEMMA III.

XXXVII. In constructionis casu secundo, ubi circulus PBE non transit per Tab. X.  
 punctum D, est  $EGq + GDq = 2CGF$ . Fig. 1.

Namque in Lemmate primo erat  $EGq + GCq = ECq + 2CGF$ . Aufer  
 utrinque  $ECq$  & fiet  $EGq + GCq - ECq = 2CGF$ . Sed  $GC = DH$   
 &  $EC = CP = GH$ : ergo  $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$ ,  
 atque adeo  $EGq + GDq = 2CGF$ . Q. E. D.

## LEMMA IV.

XXXVIII. Est  $2CGF$  in  $GY = 2CG$  in  $AGE$ .

Namque, ob similia triangula  $GEF$ ,  $GYA$ , est  $GF$  ad  $GE$  ut  $AG$  ad  
 $GY$ ; hoc est (per Prop. 1. lib. VI. Elem.) ut  $2CG$ .  $AG$  ad  $2CG$ .  $GY$ .  
 Ducantur extrema & media in se, & fiet  $2CG$ .  $GY$ .  $GF = 2CG$ .  $AG$ .  $GE$ .  
 Q. E. D.

XXXIX. Tandem ope horum Lemmatum constructio Problematis sic demonstra-  
 tur.

In casu primo est (per Lem. 2.)  $EGq - GDq = 2CGF$ , & ductis om. Tab. IX.  
 nibus in  $GY$  fit  $EGq$ .  $GY - GDq$ .  $GY = 2CGF$ .  $GY$  (hoc est per Fig. 8.  
 Lem. 4.)  $= 2CG$ .  $AGE$ . Pro  $GY$  scribe  $EG + EY$ , & fiet  
 $EG$  cub.  $+ EY$ .  $EGq - GDq$ .  $EG - GDq$ .  $EY = 2CGA$ .  $EG$ , seu  
 $EG$  cub.  $+ EY$ .  $EGq - GDq$ .  $EG - GDq$ .  $EY = 0$ .

XL. In casu secundo est (per Lem. 3.)  $EGq + GDq = 2CGF$ , & ductis Tab. X.  
 omnibus in  $GY$  fit  $EGq$ .  $GY + GDq$ .  $GY = 2CGF$ .  $GY$  (hoc est per Fig. 1.  
 Lem. 4.)  $= 2CG$ .  $AGE$ . Pro  $GY$  scribe  $EG + EY$ , & fiet  
 $EG$  cub.  $+ EY$ .  $EGq + GDq$ .  $EG + GDq$ .  $EY = 2CGA$ .  $EG$ , seu  
 $EG$  cub.  $+ EY$ .  $EGq + GDq$ .  $EG + GDq$ .  $EY = 0$ .

Jam vero erat  $EG$  radix æquationis constructæ dicta  $x$ ; item  $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$ ;

$EY = p$ ;  $2CG = n$ ; &  $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ ; id est in casu primo ubi  
 terminorum  $p$  &  $r$  diversa sunt signa: at in casu secundo ubi alterutrius  $p$   
 vel  $r$  mutatur signum fiet,  $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$ . Scribantur igitur pro  $EG$ ;  
 $GD$ ;  $EY$ ;  $2CG$ ; &  $GA$ ; quantitates  $x$ ;  $\sqrt{\frac{r}{p}}$ ;  $p$ ;  $n$ ; &  $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$ ; &  
 casu primo fiet

$$x^3 + px^2 - \frac{r}{p}x - r = 0, \text{ id est, } x^3 + pxx + qx - r = 0;$$

$$+ q + \frac{r}{p}$$

Tom. II.

casu autem secundo  
 ii

x<sup>3</sup>

$$x^3 + px^2 + \frac{r}{p}x + r = 0, \text{ id est, } x^3 + pxx + qx + r = 0.$$

$$+ q - \frac{r}{p}$$

Est igitur in utroque casu EG vera longitudo radicis  $x$ . Q. E. D.

XLI. Subdistinguitur autem casus uterque in casus plures particulares: Nimirum prior in hosce

$$x^3 + px^2 + qx - r = 0, x^3 + pxx - qx - r = 0,$$

$$x^3 - pxx + qx + r = 0,$$

$$x^3 - pxx - qx + r = 0,$$

$$x^3 + px^2 - r = 0, \text{ \& } x^3 - pxx + r = 0;$$

posterior in hosce

$$x^3 + pxx + qx + r = 0, x^3 + pxx - qx + r = 0,$$

$$x^3 - pxx + qx - r = 0, x^3 - pxx - qx - r = 0,$$

$$x^3 + pxx + r = 0, \text{ \& } x^3 - pxx - r = 0.$$

Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum linearum situ, compinguntur.

Hæ sunt problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum & rectam lineam positione datam, ea lege ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscritbitur autem talis recta ducendo *conchoidem* veterum, cujus polus sit punctum illud ad quod recta inscribenda debet convergere, regula seu asymptotus recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc conchoides circulum præfatum in puncto E, per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum & alteram positione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

XLII. In hisce autem constructionibus notandum est quod quantitas  $n$ , ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur, id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exemplum in inventione duarum mediarum proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

XLIII. *Inveniendæ sint inter a & b duæ medię proportionales x & y.* Quoniam sunt  $a.x.y.b$  continue proportionales, erit  $aa$  ad  $xx$  ut  $x$  ad  $b$ , adeoque  $x^3 = aab$ , seu  $x^3 - aab = 0$ . Hic desunt æquationis termini  $p$  &  $q$ , & loco termini  $r$  habetur —  $aab$ . Igitur in constructionum formula pri-

Tab. X.  
Fig. 2.

ma, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inseritur inter alias duas positione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis  $\frac{r}{n}$ ,  
id

id est, æqualis  $\frac{aab}{nn}$ , assumo  $n$  æqualem  $a$ , & sic fit  $CX$  æqualis  $b$ .

Unde talis emergit constructio.

Duco quamvis  $KA$  æqualem  $a$ , eamque biseco in  $C$ , centroque  $K$ , in intervallo  $KC$ , describo circulum  $CX$ , ad quem apto rectam  $CX$  æqualem  $b$ , & inter rectas  $AX$ ,  $CX$  infinite productas pono  $EY$  æqualem  $CA$ , & convergentem ad punctum  $K$ . Sic erunt  $KA$ ,  $XY$ ,  $KE$ ,  $CX$ , continue proportionales, id est  $XY$  &  $KE$  duæ medie proportionales inter  $a$  &  $b$ . Constructio nota est.

In altera autem constructionum formula ubi recta  $EY$  ad datum punctum  $G$  convergens ponitur inter circulum  $GECX$  & rectam  $AK$ , estque

Tab. IX.  
Fig. 7.

$CX = \frac{r}{nn}$  id est (in hoc problemate)  $= \frac{aab}{nn}$ , pono ut prius  $n = a$ ,

& sic fit  $CX = b$ , ceteraque peraguntur ut sequitur.

Duco rectam quamvis  $KA$  æqualem  $a$ , eamque biseco in  $C$ , & centro  $A$ , Tab. X.  
intervallo  $AK$ , describo circulum  $KG$  ad quem apto rectam  $KG$  æqualem  $b$ , Fig. 3.

$2b$ , constituendo triangulum æquicrurum  $AKG$ . Deinde per puncta  $C$ ,  $K$ ,  $G$ , circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam  $AK$  inscribo rectam  $EY$  æqualem  $KC$ , & convergentem ad punctum  $G$ . Quo facto continue proportionales erunt  $AK$ ,  $EC$ ,  $KY$ ,  $\frac{1}{2}KG$ ;

id est  $EC$  &  $KY$  duæ medie proportionales erunt inter datas  $a$  &  $b$ .

XLIV. *Secundus jam sit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secundus  $ACB$ , partes ejus inveniendæ  $ACD$ ,  $DCE$ ,  $ECB$ .* Tab. X.  
Fig. 4.

Centro  $C$ , intervallo  $CA$ , describatur circulus  $ADEB$  secans rectas  $CA$ ,  $CD$ ,  $CE$ ,  $CB$ ; in  $A$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $B$ . Jungantur  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$ ; ut &  $AB$  secans rectas  $CD$ ,  $CE$ , in  $F$ , &  $H$ ; & ipsi  $CE$  parallela agatur  $DG$  occurrens  $AB$  in  $G$ . Ob similia triangula  $CAD$ ,  $ADF$ ,  $DFG$ ; continue proportionales sunt  $CA$ ,  $AD$ ,  $DF$ ,  $FG$ . Ergo si dicatur  $AC = a$ ; &

$AD = x$ ; fiet  $DF = \frac{xx}{a}$ ; &  $FG = \frac{x^3}{aa}$ . Est autem  $AB = BH + HG$

+  $FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{aa}$ . Dic  $AB = b$ ; & fiet

$$b = 3x - \frac{x^3}{aa}, \text{ seu, } x^3 - 3aax + aab = 0.$$

Hic deest æquationis terminus secundus  $p$ , & loco  $q$  &  $r$  habentur  $-3aa$  &  $aab$ . Ergo in constructionum formula prima ubi erat  $p = 0$ ;  $KA = n$ ;

$KB = \frac{q}{n}$ ; &  $CX = \frac{r}{nn}$ ; id est in problemate jam construendo,  $KB =$

$-\frac{3aa}{n}$ ; &  $CX = \frac{aab}{nn}$ ; ut hæc quantitates evadant quam simplicissimæ,

pono  $n = a$ , & sic fit  $KB = -3a$ ; &  $CX = b$ . Unde talis emergit Problematis constructio.

Tab. X.  
Fig. 5.

Ago quamvis  $KA = a$ , & ad contrarias partes  $KB = 3a$ . Bifeco BA in C, centroque K, intervallo KC, describo circulum, cui inscribo rectam  $CX = b$ . Et astra recta AX, inter ipsam infinite productam & rectam CX, pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit  $XY = x$ . Quinetiam ob æquales circulos ADEB; CXA; & æquales subtensas AB; CX; nec non æquales subtensarum partes BH; XY; æquales erunt anguli ACB; CKX; ut & anguli BCH; XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujusvis anguli CKX pars tertia XKY inveniatur, ponendo inter chordas CX; AX infinite productas rectam EY æqualem diametro AC; & convergentem ad circuli centrum K.

Fig. 4.  
& 5.

Hinc si a circuli centro K ad subtensam CX demittas perpendicularum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut si detur quilibet angulus HKX, inveniri possit ejus pars tertia HKY, demittendo a quolibet lateris utriusvis KX puncto X ad latus alterum KH perpendicularum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipsius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE.

Tab. X.  
Fig. 6.

*Vel sic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum AX erigatur perpendicularum XH, & a lateris alterius XK puncto quovis K agatur recta KE ejus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendicularo XH, sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendicularo EZ, & astra KF cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud Pappum, lib. 4. Prop. 32.

Tab. IX.  
Fig. 7.

XLV. Quod si angulum per alteram constructionum formulam, ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris: Hic etiam erunt  $KB = \frac{q}{n}$ , &  $CX = \frac{r}{m}$ , id est, in problemate de quo nunc agi-

mus,  $KB = \frac{3aa}{n}$ ; &  $CX = \frac{aab}{m}$ ; adeoque ponendo  $x = a$ ; fiet

$KB = 3a$ , &  $CX = b$ . Et inde talis emerget constructio.

Tab. X.  
Fig. 7.

A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ  $KA = a$ ; &  $KB = 3a$ . Bifeca AB in C, centroque A, intervallo AC, describe circulum. In eo pone rectam  $CX = b$ . Junge AX, & junctam produc, donec ea iterum secet circulum jam descriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam, pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & astra recta EC erit longitudo quæ sita x, qua tertia pars anguli dati subtenditur.

Fig. 4.  
& 7.

Talis constructio consequitur formulam superius allatam, quæ tamen sic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB; & KXG, & æquales subtensas CX & AB, æquales sunt anguli CAX, sive KAG; & ACB, adeoque CE subtensa est tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinite productum rectam EY æqualem circuli semidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit Archimedes angulum

Lemma  
Archim. 8.

tri.

trifariam secare. Eadem constructiones facilius explicari possent quam hic factum est; sed in his volui ostendere quomodo ex generalibus problematum constructionibus superius expositis, constructiones simplicissimas particularium problematum derivare liceat.

XLVI. Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quamplurimas. *Ut si inter a & b inveniendæ essent due medie proportionales.* Age quamvis  $AK = b$ ; & huic perpendicularem  $AB = a$ . Bifeca  $AK$  in  $I$ , & in eadem  $AK$ , subtenfæ  $BI$  æqualem pone  $AH$ ; ut & in linea  $AB$  producta subtenfæ  $BH$  æqualem  $AC$ . Tum in linea  $AK$  ad alteras partes puncti  $A$  cape  $AD$  cujusvis longitudinis, & huic æqualem  $DE$ , centrisque  $D$  &  $E$ , intervallis  $DB$ ;  $EC$ ; describe circulos duos  $BF$ ,  $CG$ , & inter eos pone rectam  $FG$  æqualem rectæ  $AI$ , & convergentem ad punctum  $A$ , & erit  $AF$  prima duarum medie proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualementem nemo, quod scio, apposuit. Sit  $AG$  diameter &  $F$  centrum circuli ad quem *cissois* pertinet. Ad punctum  $F$  erigatur normalis  $ED$ , eaque producatur in infinitum. Et producat  $FG$  ad  $P$ , ut  $FP$  æqualis sit circuli diametro. Moveatur norma rectangula  $PED$  ea lege ut crus ejus  $EP$  perpetuo transeat per punctum  $P$ , & crus alterum  $ED$  circuli diametro  $AG$  seu  $FP$  æquale, termino suo  $D$  tangat semper lineam  $FD$ , & cruris hujus medium punctum  $C$  describet *cissoidem* desideratam  $GCK$  ut supra exposui. Quare si inter duas qualvis  $a$  &  $b$  inveniendæ sint due medie proportionales, cape  $AM = a$ , erige perpendiculum  $MN = b$ . Junge  $AN$ ; & lege præfata moveatur norma  $PED$ , usque dum punctum ejus  $C$  incidat in rectam  $AN$ . Tum demisso ad  $AP$  perpendiculo  $CB$ , cape  $t$  ad  $BH$ , &  $u$  ad  $BG$ , ut est  $MN$  ad  $BC$ , & ob continue proportionales  $AB$ ,  $BH$ ,  $BG$ ,  $BC$  erunt etiam continue proportionales  $a$ ,  $t$ ,  $v$ ,  $b$ .

XLVII. Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia problemata solida. Verbi gratia proponatur æquatio cubica

$$x^3 \pm pxx + qx - r = 0:$$

ubi  $q$  semper affirmativum sit,  $r$  negativum, &  $p$  signi utriusvis. Fac

$AG = \frac{r}{q}$ , eamque bifeca in  $F$ , & cape  $FR$  &  $GL = \frac{1}{2}p$ , idque versus

$A$  si habeatur  $+p$ , aliter versus  $P$ . Erige insuper normalem  $FD$ , inque ea cape  $FQ = \sqrt{q}$ , huic etiam erige normalem  $QC$ . In normæ autem crure  $ED$ , cape  $ED$  &  $EC$  ipsis  $AG$  &  $AR$  æquales respective, & applicetur deinceps norma ad schema, sic ut punctum ejus  $D$  tangat rectam  $FD$ , & punctum  $C$  rectam  $QC$ , tum si compleatur parallelogrammum  $BQ$ ; erit  $LB$  æquationis radix quæsitæ  $x$ .

XLVIII. Hactenus constructionem solidorum problematum per operationes, quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita, exponere visum fuit. Sic Veteres postquam confessionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constru-

ctiones ob difficile conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per conchoidem, cissoïdem, extensionem filorum & figurarum adaptationes quasunque mechanicas: prælata mechanica utilitate inutiles speculationi geometricæ, ut ex Pappo discimus, Sic magnus ille Archimedes trisectionem anguli per conic sectiones a superioribus geometricis expositam neglexit, & in Lemmatis suis angulum modo a nobis superius exposito trifariam secare docuit. Si Veteres problemata per figuras ea tempestate in Geometriam non receptas construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ conic sectiones a plerisque receptæ.

XLIX. Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hæc omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem problematum eo ordine, quo æquationes, quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus hac lege cum conic sectionibus jungendus esset, quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes analyticas in Geometriam. In Geometriam planam, meo quidem iudicio, lineæ nullæ, præter rectam & circulum, admitti debent; nisi forte linearum distinctio aliqua prius excogitetur, qua linea circularis conjungatur cum recta, & a reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum. Nam, figuræ omnes sunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometræ possunt in plano describere. Et problema omne planum est, quod per figuras planas construere potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conic sectionibus, aliisque magis compositis figuris, problemata omnia solida & plus quam solida, quæ per has figuras construere possunt, evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta analyticè simplicior est quam circulus; hoc non obstante, problemata ejusdem sunt ordinis quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis ellipsis, quæ minus differt a circulo quam circulus a recta, postulando consimiliter descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis speculando ellipsin, incideret in problema aliquod solidum, & ipsum beneficio ejusdem ellipseos & circuli construeret; hoc problema jam pro plano habendum esset, eo quod ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis, quæ superest, absolvitur per circuli solius descriptionem. Eadem de causâ problemata quævis plana per datam ellipsin construere licitum est. Verbi gratia si datæ ellipseos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB; CD ellipsi occurrentes in A; B; C; D; aliasque duas EF; GH ellipsi occurrentes in E; F; G; H. Has bisecarem in I; K; L; M; & junctas IK; LM; producerem usque ad concursum suum in O. Legitima est hæc constructio plani problematis per ellipsin. Nil refert quod ellipsis analyticè definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod ellipsis geometricè

Tab. XI.  
Fig. 1.

ge-

generetur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida per ipsam constructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipsam legitime construantur. Et eadem est ratio postulati. Quod vi postulatorum fieri potest, ut jam factum & datum assumere concessum est. Postuletur igitur ellipsis in plano describere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per ellipsin construi possunt, planaque omnia per ellipsin licebit construere.

L. Necessè est igitur aut problemata plana & solida inter se confundi, aut lineas omnes rejici e Geometria plana, præter rectam & circulum, & siqua forsân alia detur aliquando in statu construendi alicujus problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiserit. Rejiciantur igitur e Geometria plana sectiones conicæ, aliæque figuræ omnes, præter rectam & circulum, & quas contigerit in statu problematum dari. Aliæ sunt igitur a Geometria descriptiones illæ omnes conicarum sectionum in plano, quibus hodierni Geometræ tantopere indulgent. Nec tamén ideo conicæ sectiones e Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non describuntur geometricæ, generantur vero in solidi geometrici superficie plana. Conus constituitur geometricæ, & plano geometrico secatur. Tale conicæ segmentum figura geometrica est, eundemque habet locum in Geometria solida, ac segmentum circuli in plana; & hac ratione basis ejus, quam conicæ sectionem vocant, figura geometrica est. Locum igitur habet conicæ sectionis in Geometria, quatenus ea superficies est solidi geometrici. Alia autem nulla ratione geometricæ, quam solidi sectione generatur, & ideo non nisi in Geometriam solidam antiquitus admittitur. Talis autem conicarum sectionum generatio difficilis est, & in rebus practicis, quibus Geometria potissimum inservire debet, prorsus inutilis. Ideo Veteres se ad varias figurarum in plano descriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar constructiones præcedentes concinnavimus. Sunt constructiones illæ mechanicæ: sic & constructiones per conicæ sectiones in plano (ut jam moris est) descriptas mechanicæ sunt. Sunt constructiones per datas conicæ sectiones geometricæ: sic & constructiones per alias quasunque figuras datas geometricæ sunt, & ejusdem ordinis cum constructionibus planorum problematum. Nulla ratione præferendæ sunt in Geometria sectiones conicæ figuris aliis, nisi quatenus illæ a sectione conicæ, praxi ad solutionem problematum prorsus inutili, derivantur. Verum tamen ne constructiones per conicæ sectiones omnino præteream, visum fuit aliqua de his subjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommode consulatur.

LI. Conicarum sectionum simplicissima est ellipsis. Hæc notior est, & circulo magis affinis, & praxi manuali facilius describitur in plano. Parabola præferunt plerique ob simplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione parabola ipso etiam circulo præferenda esset, contra quam fit. Falsa est igitur argumentatio a simplicitate æquationum. Æquationum speculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum simplicitas est considerandis analyticæ. Nos in compositione versamur, & compositioni leges dandæ non sunt ex analysi. Manuducit analysis ad com-

positionem: sed compositio non prius vere conficitur quam liberatur ab omni analysi. Insit compositioni vel minimum analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est & a mixtura speculationum analyticarum abhorret. Pendet figurarum simplicitas a simplicitate geneseos & idearum, & æquatio non est sed descriptio (sive geometrica sive mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipsam construere licet.

### LII. Proponatur æquatio quævis cubica

$$x^3 = pxx + qx + r,$$

ubi  $p$ ;  $q$ ; &  $r$  datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis + & — significant, & alteruter terminorum  $p$  &  $q$ , vel etiam uterque deesse potest. Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones una illa operatione quæ sequitur, exhibebimus.

Tab. XI.  
Fig. 2.

A puncto B in recta quavis data cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem BD. Et BC dicta  $n$ , cape etiam in eadem recta BA =  $\frac{q}{n}$ , idque versus punctum C si habeatur —  $q$ , aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem  $p$ , FG æqualem AF; FI æqualem  $\frac{r}{nn}$ ; & FH in ratione ad FI ut est BC ad BE. FH vero & FI capiendæ sunt ad partes puncti F versus G si termini  $p$  &  $r$  habent eadem signa, aliter ad partes versus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG describatur circulus. Tum in linea HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ sit ad HL ut BD ad BE. Agatur GR secans EL in S, & moveatur linea GRS puncto ejus R super linea HL, & puncto S super linea EL incedente, donec tertium ejus punctum G describendo ellipsin, occurrat circulo, quemadmodum videre est in positione *yes*. Nam dimidium perpendiculi  $\gamma X$  ab occursum illius puncto  $\gamma$  in rectam AE demissi erit radix æquationis. Potest autem regulæ GRS vel *yes* terminus G vel  $\gamma$ , circulo in tot punctis occurrere quot sunt possibiles radices. Et e radicibus hæc sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur a puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, si modo habeatur +  $r$ : & contra si habeatur —  $r$ .

*Demonstratur* autem hæc constructio subsidio *Lemmatum* sequentium.

### LEMMA I.

LIII. *Positis quæ in superiore constructione, est*  $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI. \gamma X + 2AG. FI$ .

Namque ex natura circuli est  $K\gamma q - CXq$ , æquale quadrato ex  $\gamma X - AI$ . Sed est  $K\gamma q$  æquale  $GIq + ACq$ , &  $CXq$  æquale quadrato ex  $AX - AC$ ,  
hoc



hoc est æquale  $AXq - 2CAX + ACq$ , atque adeo horum differentia  $GIq + 2CAX - AXq$ , æquatur quadrato ex  $\gamma X - AI$ , id est ipsi  $\gamma Xq - 2AI \cdot \gamma X + AIq$ . Auferatur utrinque  $GIq$ , & manebunt æqualia  $2CAX - AXq$ , &  $\gamma Xq - 2AI \cdot \gamma X + AIq - GIq$ . Verum  $AIq$  (per Prop. 4. lib. II. Elem.) æquale est  $AGq + 2AGI + GIq$ , atque adeo  $AIq - GIq$  æquale est  $AGq + 2AGI$ , hoc est æquale  $2AG$  in  $\frac{1}{2} AG + GI$ , seu æquale  $2AG \cdot FI$ , & proinde  $2CAX - AXq$ , æquale est  $\gamma Xq - 2AI \cdot \gamma X + 2AG \cdot FI$ . Q. E. D.

## L E M M A I I.

LIV. Positis quæ in superiore constructione, est  $2EAX - AXq$  æquale  $\frac{FI}{FH}$ .

$$X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \cdot X\gamma + 2AG \cdot FI.$$

Notum est enim quod punctum  $\gamma$  motu regulæ  $\gamma\epsilon$  superius assignato describit ellipsin, cujus centrum est  $L$ , & axes duo cum rectis  $LE$  &  $LH$  coincidunt, quorum qui in  $LE$  æquatur  $2\gamma\epsilon$  sive  $2GR$ , & alter in  $LH$  æquatur  $2\gamma\sigma$  sive  $2GS$ . Et horum ratio ad invicem ea est quæ lineæ  $HR$  ad lineam  $HL$ , sive lineæ  $BD$  ad lineam  $BE$ . Unde latus transversum est ad latus rectum principale ut  $BE$  ad  $BC$ , sive ut  $FI$  ad  $FH$ . Quare cum  $\gamma T$  ordinatim applicetur ad  $HL$ , erit ex natura ellipsos  $GSq - LTq$

æquale  $\frac{FI}{FH} T\gamma q$ . Est autem  $LT$  æquale  $AE - AX$ , &  $T\gamma$  æquale  $X\gamma - AH$ . Scribantur horum quadrata pro  $LTq$  &  $T\gamma q$ , & fiet  $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$  in  $X\gamma q - 2AH \cdot X\gamma + AHq$ . Est

autem  $GSq - AEq$  æquale quadrato ex  $GH + LS$ , propterea quod  $GS$  hypotenusæ est trianguli rectanguli cujus latera sunt ipsis  $AE$  &  $GH + LS$  æqualia. Est & (ob similia triangula  $RGH$ ;  $RSL$ )  $LS$  ad  $GH$  ut  $LR$  ad  $HR$ , & componendo  $GH + LS$  ad  $GH$  ut  $HL$  ad  $HR$ , & duplicando rationes, quadratum ex  $GH + LS$ , est ad  $GHq$  ut  $HLq$  ad  $HRq$ , hoc est (per constructionem) ut  $BEq$  ad  $BDq$ , id est ut  $BE$  ad  $BC$ , seu  $FI$  ad  $FH$ , adeoque quadratum ex  $GH + LS$  æquale est  $\frac{FI}{FH} GHq$ . Est itaque

$GSq - AEq$  æquale  $\frac{FI}{FH} GHq$ , atque adeo  $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$  in  $X\gamma q - 2AH \cdot X\gamma + AHq$ . Auferatur utrinque  $\frac{FI}{FH} GHq$ , & re-

stabit  $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$  in  $X\gamma q - 2AH \cdot X\gamma + AHq - GHq$ .

Est autem  $AH = AG + GH$ , adeoque  $AHq = AGq + 2AGH + GHq$  & subducto utrinque  $GHq$ , restat  $AHq - GHq = AGq + 2AGH$ , hoc est

est  $= 2AG$  in  $\frac{1}{2}AG + GH$ , seu  $= 2AG \cdot FH$ , atque adeo est  $2EAX$

$- AXq = \frac{FI}{FH}$  in  $X\gamma q - 2AH \cdot X\gamma + 2AG \cdot FH$ , id est,  $= \frac{FI}{FH} X\gamma q$

$- \frac{2FI}{FH} AH \cdot X\gamma + 2AG \cdot FI$ . Q. E. D.

### LEMMA III.

LV. *Isdem positis est AX ad X $\gamma$  — AG ut X $\gamma$  ad 2BC.*

Nam si de æqualibus in *Lemmate secundo* subducantur æqualia in *Lemmate primo*, restabunt æqualia  $2CE \cdot AX$  &  $\frac{HI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \cdot X\gamma + 2AF \cdot X\gamma$ . Ducatur pars utraque in FH, & fiet  $2FH \cdot CE \cdot AX$  æquale  $HI \cdot X\gamma q - 2FI \cdot AH \cdot X\gamma + 2AI \cdot FH \cdot X\gamma$ . Est autem  $AI = AH + HI$ , adeoque  $2FI \cdot AH - 2FH \cdot AI = 2FI \cdot AH - 2FHA - 2FHI$ . Sed  $2FI \cdot AH - 2FHA = 2AHI$ , &  $2AHI - 2FHI = 2HI \cdot AF$ . Ergo  $2FI \cdot AH - 2FH \cdot AI = 2HI \cdot AF$ , adeoque  $2FH \cdot CE \cdot AX = HI \cdot X\gamma q - 2HI \cdot AF \cdot X\gamma$ . Et inde HI ad FH ut  $2CE \cdot AX$  ad  $X\gamma q - 2AF \cdot X\gamma$ . Sed, per constructionem, HI est ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut  $2CE \cdot AX$  ad  $2BC \cdot AX$ ; & proinde  $2BC \cdot AX$  &  $X\gamma q - 2AF \cdot X\gamma$  (per *Prop. 9. lib. V. Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera, AX ad  $X\gamma - 2AF$ , id est ad  $X\gamma - AG$  ut  $X\gamma$  ad  $2BC$ . Q. E. D.

### LEMMA IV.

LVI. *Isdem positis, est 2FI ad AX — 2AB ut X $\gamma$  ad 2BC.*

Nam de æqualibus in *Lemmate tertio*, nimirum  $IBC \cdot AX = X\gamma q - 2AF \cdot X\gamma$ , subducantur æqualia in *Lemmate primo*, & restabunt æqualia  $- 2AB \cdot AX + AXq = 2FI \cdot X\gamma - 2AG \cdot FI$ , hoc est AX in  $AX - 2AB = 2FI$  in  $X\gamma - AG$ . Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera,  $2FI$  ad  $AX - 2AB$  ut  $AX$  ad  $X\gamma - AG$ , hoc est (per *Lemmate tertium*) ut  $X\gamma$  ad  $2BC$ . Q. E. D.

LVII. *Præstatis his Lemmatibus, constructio problematis sic tandem demonstratur.*

Per *Lemmate quartum* est  $X\gamma$  ad  $2BC$  ut  $2FI$  ad  $AX - 2AB$ , hoc est (per *Prop. 1. lib. VI. Elem.*) ut  $2BC \cdot 2FI$  ad  $2BC \cdot (AX - 2AB)$ , seu ad  $2BC \cdot AX - 2BC \cdot 2AB$ . Sed per *Lemmate tertium* est AX ad  $X\gamma - 2AF$  ut  $X\gamma$  ad  $2BC$ , seu  $2BC \cdot AX = X\gamma q - 2AF \cdot X\gamma$ , adeoque  $X\gamma$  est ad  $2BC$  ut  $2BC \cdot 2FI$  ad  $X\gamma q - 2AF \cdot X\gamma - 2BC \cdot 2AB$ . Et, ductis extremis & mediis in se, fit  $X\gamma \text{ cub.} - 2AF \cdot X\gamma q - 4BC \cdot AB \cdot X\gamma = 8BCq \cdot FI$ . Addantur utrinque  $2AF \cdot X\gamma q + 4BC \cdot AB \cdot X\gamma$ , & fiet  $X\gamma \text{ cub.} = 2AF \cdot X\gamma q + 4BC \cdot AB \cdot X\gamma + 8BCq \cdot FI$ . Erat autem in constructione de-

demonstranda,  $\frac{1}{2} X\gamma$  radix æquationis dicta  $x$ ; nec non  $AF = p$ ;  $BC = n$ ;

$AB = \frac{q}{n}$ ; &  $FI = \frac{r}{m}$ ; adeoque  $BC \cdot AB = q$ . Et  $BCq \cdot FI = r$ .

Quibus substitutis fiet  $x^3 = px^2 + qx + r$ . Q. E. D.

## COROLLARIUM.

LVIII. Hinc si  $AF$  &  $AB$  ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum, fiet  $2FI$  ad  $AX$  ut  $AX$  ad  $X\gamma$  &  $X\gamma$  ad  $2BC$ . Unde constat inventio duarum medie proportionalium inter datas quaslibet  $FI$  &  $BC$ .

## SCHOLIUM.

LIX. Hactenus æquationis cubicæ constructionem per ellipsin solummodo exposui: sed regula sua natura generalior est, sese ad omnes conic sectiones indifferenter extendens. Nam si loco ellipticos velis hyperbolam adhiberi, cape lineas  $BC$ ,  $BE$  ad contrarias partes puncti  $B$ , dein puncta  $A$ ;  $F$ ;  $G$ ;  $I$ ;  $H$ ;  $K$ ;  $L$ ; &  $R$ ; determinentur ut ante, excepto tantum quod  $FH$  debet sumi ad partes ipsius  $F$  contra  $I$ , & quod  $HR$  non in linea  $HL$ , sed in linea  $AI$  ad utramque partem puncti  $H$  capi debet, & vice rectæ  $GRS$  duæ aliæ rectæ a puncto  $L$  ad puncta duo  $R$ ; &  $R$  hinc inde duci pro asymptotis hyperbolæ. Cum istis itaque asymptotis  $LR$ ;  $LR$  describere hyperbolam per punctum  $G$ , ut & circulum centro  $K$ , intervallo  $KG$ ; & dimidia perpendicularum ab eorum intersectionibus ad rectam  $AE$  demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & — probe mutatis, demonstrantur ut prius.

LX. Quod si parabolam velis adhiberi, abibit punctum  $E$  in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit. & punctum  $H$  cum puncto  $F$  coincidet; eritque parabola circa axem  $HL$  cum latere recto principali  $BC$  per puncta  $G$  &  $A$  describenda, sito vertice ad partes puncti  $F$  ad quas punctum  $B$  situm est respectu puncti  $C$ .

LXI. Si sunt constructiones per parabolam, si simpliciter analyticam spectes, simplicissimæ omnium, & per hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per ellipsin absolvuntur. Quod si praxeos manualis in describendis figuris spectetur simplicitas, mutandus est ordo.

LXII. In hisce autem constructionibus observandum venit quod proportionem lateris recti principalis ad latus transversum determinatur species ellipticos & hyperbolæ, & proportio illa eadem est quæ linearum  $BC$  &  $BE$ , atque atque adeo assumi potest. Parabolæ vero species est unica, quam artificem ponendo  $BE$  infinite longam assequitur. Sic igitur penes artificem est æquationem quæcumque cubicam per conicam sectionem imperatæ speciei construere. A figuris autem specie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figuræ specie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas per data

tam quamvis conicam sectionem construere licebit. Id quod sic plenius explico.

LXIII. Proponatur æquationem quæcunque cubicam

$$x^3 = pxx. qx. r,$$

ope datæ cujuscunque sectionis conicæ construere.

Tab. XI. A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quascunque Fig. 3. 4. longitudines BC; BE ad easdem partes si data coni sectio sit ellipsis, ad contrarias si ea sit hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ sectionis latus rectum principale ad latus transversum, & BC nominata  $n$ . Cape BA

$= \frac{q}{n}$ , idque versus C si habeatur  $q$ , aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem  $p$ , & FG æqualem AF; item FI æqualem  $\frac{r}{nn}$ . Capiatur vero FI versus G si termi-

ni  $p$  &  $r$  habent eadem signa, aliter versus A. Dein fac ut sit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape a puncto F versus I si sectio sit ellipsis, aut ad partes contrarias si ea sit hyperbola. Porro compleantur parallelogramma IACK & HAEL, & hæc omnes jam descriptæ lineæ transferantur ad datam sectionem conicam, aut quod perinde est, his superponatur curva, ita ut axis ejus, sive transversa diameter principalis, conveniat cum recta LH & centrum cum puncto L. His ita constitutis agatur recta KL, ut & recta GL secans conicam sectionem in  $g$ . In LK cape Lk quæ sit ad LK ut Lg ad LG, centroque  $k$  & intervallo  $kg$  describe circulum. A punctis ubi hic secuerit curvam impositam demitte perpendiculara ad lineam LH, cujuscumodi sit  $\gamma$ T. Denique versus  $\gamma$ , cape TY quæ sit ad T $\gamma$  ut LG ad Lg, & hæc TY producta secet rectam AB in X, eritque recta  $\frac{1}{2}$ XY una

ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet a puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes si modo habeatur  $+r$ , & contra si  $-r$  obvenerit.

LXIV. Hoc modo construuntur æquationes cubicæ per ellipses & hyperbolas datas. Quod si detur parabola, capienda est BC æqualis lateri recto ipsius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, centro K intervallo KG describendus est circulus, & parabola ita applicanda ad schema jam descriptum (aut schema ad parabolam) ut ipsa transeat per puncta A & G, & axis ejus ipsi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit a puncto C. His ita constitutis, si perpendiculara ab ejus occuribus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis construendæ.

LXV. Et notes quod ubi secundus æquationis terminus deest, & latus rectum parabolæ ponitur numerus binarius, hæc constructio evadet eadem cum illa quam Cartesius attulit in Geometria sua, præterquam quod lineamenta hic sunt illorum duplicia.

Hæc

Hæc est constructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, consulendum est constructionum formulis simplicissimis. Libera enim manet quantitas  $n$ , cujus assumptione constructio plerumque simplicior reddi potest. Ejus rei exemplum unum subjungo.

LXVI. Detur ellipsis, & inter datas lineas  $a$  &  $b$  inveniendæ sint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima  $x$ , &  $a. x. \frac{xx}{a}. b$  erunt continue

proportionales, adeoque  $ab = \frac{x^3}{a}$ , seu  $x^3 = aab$  æquatio est quam construere oportet. Hic desunt termini  $p$ , &  $q$ , & terminus  $r$  est  $aab$ , adeoque  $BA$  &  $AF$  nullæ sunt, &  $FI$  est  $\frac{aab}{nn}$ . Ut terminus novissimus evadat simplicior assumatur  $n = a$ , & fiet  $FI = b$ . Deinde constructio ita se habebit.

A puncto quovis  $A$  in recta quavis infinita  $AE$  cape  $AC = a$ , & ad eas- Tab. XI.  
dem partes puncti  $A$  cape  $AC$  ad  $AE$  ut est ellipseos latus rectum principale Fig. 5.  
ad latus transversum. Tum in perpendiculo  $AI$  cape  $AI = b$ , &  $AH$  ad  $AI$  ut est  $AC$  ad  $AE$ . Compleantur parallelogramma  $IACK$ ,  $HAEL$ . Jungantur  $LA$ ,  $LK$ . Huic schemati imponatur ellipsis data. Secet ea rectam  $AL$  in puncto  $g$ . Fiat  $Lk$  ad  $LK$  ut  $Lg$  ad  $LA$ . Centro  $k$  intervallo  $kg$  describatur circulus secans ellipsin in  $\gamma$ . Ad  $AE$  demittatur perpendiculum  $\gamma X$  secans  $HL$  in  $T$ , & producat id ad  $Y$  ut sit  $TY$  ad  $T\gamma$  sicut

$LA$  ad  $Lg$ . Sic fiet  $\frac{1}{2}XY$  prima duarum medie proportionalium  $x$ . Q.E.I.

# COMMENTARIUS

A D

## AUCTORIS APPENDICEM

### *De æquationum constructione lineari.*

1. **P**roblema, quod per æquationem solvitur, est aut *geometricum*, aut *arithmeticum*; id est vel quæritur quomodo determinari debeat situs puncti; positio & magnitudo rectæ, &c.; problema solvantis; vel quæritur numerus qui problemati respondeat. (Vide N<sup>o</sup>s 16..19 pag. 154. Tomi I.).

Ad arithmeticam pertinent problem. I. pag. 155. II. pag. 156. XI. pag. 171. Tomi I. Reliqua per se *geometrica* sunt; sed fieri possunt *arithmetica*, si *data* fuerint per numeros determinata.

Sed exemplum luculentum desumemus ab anguli trisectione. Æquationem pro hoc problemate jam invenit noster, ut monuimus, probl. geom. XXIX. pag. 236. Tomi I. & alio pacto reperit N<sup>o</sup>. XLIV. hujus Appendicis pag. 251. nempe, dicto radio =  $a$ ; subtensa arcus triseccandi =  $b$ ; & quæsitæ subtensa tertiæ partis =  $x$ ,

$$x^3 - 3ax + aab = 0$$

Hoc problema *geometricum* est, si detur circulus & arcus geometricæ; *arithmeticum* si per numeros detur radius circuli & subtensa arcus triseccandi, atque horum ratio; quod, ex. gr., sit  $b = \frac{2a}{3}$ ; unde pro  $a$  poni possit unitas, & æquatio fieret

$$x^3 - 3x + \frac{2}{3} = 0.$$

2. Problemata revocari possunt ad arithmeticam quando datorum ratio numerica aut data est aut potest inveniri.

3. Sed problemata *geometrica* complectuntur ea, quæ ad arithmeticam revocari possunt, & ea quæ non possunt, sive quia datorum ratio numerica non est, quando nempe ea sunt incommensurabilia, ut si in exemplo, esset  $b =$

$b = a\sqrt{3}$ , vel ratio cognosci nequit, ut si esset subtensa arcus trifecandi tertia proportionalis post peripheriam & diametrum, sive quia ratio cognosci quidem potest, tamen nota non est.

4. Problemata geometrica necessario constructionem flagitant, ut dici possint soluta.

5. Problemata arithmetica aut habent æquationem cujus radices accurate determinari possunt, aut secus. Ad primum genus pertinent omnes æquationes, quarum radices sunt commensurabiles, & quæ determinari possunt vel per radicis extractionem, vel per inventionem Divisorum, vel per quamlibet aliam methodum. Ad secundum pertinent non tantum æquationes, quarum radices inveniri nequeunt, sed etiam illæ, quarum radices sunt incommensurabiles. Quamnam enim est utilitas quantitatum surdarum in scientiis practicis? Quærit, ex. gr. s. Gravesande (Phys. Elem. math. lib. I. Cap. XXI. Scholio III. pag. 142. Tom. I. Edit. 1742.) minimam æctionem totalem in mechanicis, & venit ad æquationem

$$xx + \frac{bx - b}{2} = 0,$$

in ea sit  $b = 6$ : erit

$$xx = -3x + 3; x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Profecto nihil adhuc scimus, quia nota non est  $\sqrt{21}$ .

6. Tunc oportet ut æquatio solvatur per *approximationem*, id est, ut valor quantitatis quæsitæ vero proximus ita determinetur, ut error negligi possit. Hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis, ut monet nos N°. I. pag. 237. hujus; id est in valore investigando, non quidem satis accurately, sed qui facile corrigi possit & aptus reddi ad usum. Hujusmodi est 4 in  $\sqrt{21}$ , qui facile corrigitur per arithmetica decimalem, addendo nempe aliquot 0, numero pari, ipsi 21, & extrahendo radicem satis accuratam pro re nata.

7. Sed sæpe sæpius res est magis ardua. Tunc primæ figuræ determinantur, vel per conjecturam, ut HALLEJUS Addit. pag. 9. in exemplo, primum valorem quæsitæ  $x$  ponit 10, quartam radicem ultimi termini 10000; vel per *limites*; vel alio quovis pacto; sed aut primæ figuræ nimis absunt a vero, nec sine multis laboribus & ambagibus corrigi possunt; aut non sine multis laboribus & ambagibus primæ figuræ satis vero proximæ deteguntur. Vitantur hæc incommoda per constructionem aliquam, seu *geometricam*, seu *mechanicam* (N°. I. pag. 237. hujus), quæ determinatas præbet rectas radicibus æquationis solvendæ respondentes; hæc aptantur scalæ geometricæ, id est rectæ divisæ in magnum partium perexiguarum numerum; ita radicem valor numericus vero proximus facile extenditur.

8. Facile, inquam, nempe considerando constructionem ut jam peractam; atque

atque ideo a difficultatum censu excludendo ipsam difficultatem constructionis. Sed & hæc est consideranda, quando non sufficit figuram habere pro descripta, quin figura est actu describenda. Dum enim ea describitur, infumitur tempus & opera, quæ frustra perduntur quando idem vel brevior tempore vel opera minore poterat obtineri, & præterea, quod pejus est, augentur errores, quos nunquam manus & oculus vitare omnino possunt, saltem ob instrumentorum vitia. Ideo totum constructionum negotium videtur in duos casus distribuendum: aut enim quæritur demonstratio theorematis, & lineæ ducendæ sunt quæ demonstrationem suppeditent, id est instituenda est *præparatio* ad demonstrationem, ut loqui solent; aut quæritur solutio problematis, nempe regula qua propositum sive *geometrice* perficiatur, sive quæsitum *arithmetice* determinetur, id est proprie *constructio* est peragenda.

9. Quod pertinet ad demonstrationem *propositionis*, recte Veteres voluerunt ut ne adhiberentur problemata nondum soluta. Ideo EUCLIDES statim ponit tria problemata, quibus opus habet ad præparationem demonstrationis propos. 5. lib. 1., quam male nonnulli recentiores demonstrant biseccando angulum quem duo latera æqualia constituunt; nondum enim tiro scit angulum biseccare: ideo etiam per tota elementa prudentissimus auctor theorematis ea miscet problemata, quibus usus est. Sed quia præparatio non est necessario peragenda, quin potius sufficit si peracta concipiatur, dum ipsa demonstratio est intelligenda, & tota mente comprehendenda, ea videtur eligenda præparatio, quæ faciliorem suppeditat demonstrationem; ita ut non eo melior existimanda videatur præparatio, quo simplicior & faciliior est, sed quo brevior est & faciliior demonstratio, cui locum dat; quia nempe in theoremate præcipuum locum occupat demonstratio, præparatio autem accessoria est, & demonstrationi inserviens.

Fortasse sufficeret, si geometra figurarum naturam & proprietates considerans, ea enumeraret, quæ possunt effici, & eadem conciperet, vel facta poneret in præparatione; velut rectæ, & circuli naturam expendens EUCLIDES pronunciat, vel petit rectam per duo puncta duci, & ad arbitrium semper produci posse; ac circulum describi quovis centro & intervallo. Ubi est observandum, contra falsam sententiam nonnullorum recentiorum, quin & veterum, docente PROCLUSO lib. 3. in primum Eucl. Elem. lib. ad probl. 2., postulatam hoc necessario requirere ut centrum sit ipsum alterum dati intervalli extremum. Sed ad rem. Eodem pacto in *Datorum* libro considerans EUCLIDES nonnulla dari & determinari ab eo, qui problema proponit, quæ *data per conventionem* dici possunt; hinc nonnulla necessario data esse & determinata, quia nempe cum datis *per conventionem* necessariam habent relationem, & quæ data *per consequens* appellari possunt, quænam ea essent demonstravit in *Datorum* libro, non tamen in illo libro ostendit quomodo revera & actu determinari possent, quod effecisse videtur in deperdito *Porismatum* libro. Ad hunc restituendum non pauca colligere cœperam, sed cum audivissem virum doctissimum Robertum SIMSONUM rem perfecisse, & sua scripta reliquisse, ab incepto destiti, sperans & rogans ut tanti viri cogitationes in publicam lucem emittantur. Si igitur, sine  
erro-



erroris timore, enumerarentur quæ fieri possunt, ea liceret in *preparatione* tanquam facta considerare, & tunc bona esset demonstratio prop. 5. lib. 1. Eucl.; quam asserunt recentiores per suppositam anguli bisectionem, quod pertinet ad angulos intra triangulum; non quod ad angulos extra triangulum, quorum tamen æqualitate eget casus unus prop. 7. lib. 1.

10. Contra in problematis, præcipuus locus est *construionis*; constructio quaritur, & actu est peragenda; accedit demonstratio quæ eo tendit ut ostendat regulam esse certam; ideo ea præferenda est constructio quæ simplicior est & facilior, non quæ faciliorem demonstrationem suppeditat.

11. Quænam vero est constructio simplicior & facilior? Hic considerandum puto *primo* linearum describendarum naturam. *secundo* numerum. Lineæ, quæ facilius actu describitur, præferenda est illi, quæ difficilius describitur; est enim *descriptionis facilitas*, quæ lineam ad *construiones problematum prius admittendam esse indicat*, ut optime noster N°. III. pag. 237. hujus. Facilitate descriptionis eminent linea *recta* & *circulus*; ideo has jure præferunt Geometræ, & *geometrica* dumtaxat appellant problemata quæ rectis & circulis construuntur. Sunt quidem qui ajunt lineam rectam geometricè non describi, sed mechanicè descriptam esse in *regula*, secundum quam ducitur; eodem pacto describi posse lineam quamvis, si nempe ligneus asserculus aut lamina e metallo in lineæ describendæ figuram circumcidatur. Sed primo, eadem regula, quantumvis brevi, linea recta duci potest quantumvis longa; eodem typo non quanta libet curva describi potest. Secundo facile fabri lineam rectam describunt dum regulas faciunt; difficile reliquas curvas. Siquis vero eas satis accurate descriptas habeat, uti potest ad primas figuras arithmeticas extendendas.

13. Post lineam rectam & circulum facillime describi potest *conchois*, de qua satis, nisi fallor, pag. 250. 251. Tom. I. ad prob. XXXIV. geometricorum, quod recte observat Auctor N°. III. pag. 238. hujus. Reliquæ curvæ, ipsæ quoque sectiones conicæ, difficile describi possunt, desunt enim instrumenta satis accurata, & siquis eas per plura puncta delineare velit, expertus discet rem esse operosam, arduam, & multis erroribus obnoxiam.

14. Quidquid sit, NEWTONUS videtur inter lineas, quæ non difficile describuntur, annumerare *Trochoidem* vel *Cycloidem* (N°. III. pag. 238. hujus), cujus descriptio & proprietates habentur pluribus in locis, sed præsertim apud HUGENIUM de *horologio oscillatorio*, qui mira elegantia hoc argumentum pertractavit. Sed an hæc linea per motum continuum, circuli nempe rotatione, facile & accurate describi possit, dubito. Saltem s'GRAVESANDIUS monet magis commodum esse per puncta ipsam delineare (Phys. Elem. mathem. lib. I. Cap. XX. Schol. 2. pag. 122. Edit. 1742.); quæ tamen descriptio & operosa est & multis erroribus obnoxia. Quomodo vero per eam datus arcus circuli in datam rationem secetur, facile patet ex hujus curvæ natura, neque hic locus est explicandi.

Locus PAPPI, de quo noster initio N°. II. pag. 237. hujus, est Collect. mathem. lib. 3. post theor. 4. prop. 45 & lib. 4. post. Probl. 7. prop. 30. In eodem libro 4. post propof. 22. tradit PAPPUS ortum *conchoidis*, & propof. Tom. II. LI 23.

23. quomodo inter erura dati anguli ponatur recta magnitudine data, quæ producta transeat per datum punctum, quod est ipsum NEWTONI problema sub N°. V. pag. 239. hujus. Ibi docet COMMANDINUS eadem fufius pertractasse EUTOCIUM in commentariis in secundum librum ARCHIMEDIS de sphaera & cylindro.

15. Post linearum naturam numerus considerandus est; & quo hic minor est, eo melior est constructio, tum quia minori labore & breviori tempore perficitur, tum præsertim quia minuitur numerus errorum, quos nemo in manuali descriptione vitari potest.

His præmissis, docet Newtonus, quomodo æquationes trium dimensionum construantur per conchoidem, deinde per sectiones conicas.

16. Recentiores, fortasse Veteres sequuti, qui, ut infra docet NEWTONUS ipse, problemata solida per sectiones conicas prius solvere conabantur, deinde, sentientes ejusmodi constructiones ob difficilem conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores; hos inquam secuti recentiores multa de problematibus solidis per sectiones conicas componendis tradiderunt. Nos autem lectorem ad eximias COLSONI (Addit. pag. 15.. 30.) & HALLEII (Addit. pag. 35.. 42.) dissertationes huic libro subditas delegamus. Nonnulla tamen, quæ sese sponte obviam dabunt, adnotare non pigebit. Contra noster primum indicat solutionem faciliorem, deinde per sectiones conicas, incipiens a Lemmate, quod explicat per conchoidem N°. V. pag. 239. & per sectiones conicas N°. VI. pag. eadem hujus.

Statim patet Æquationem ad hyperbolam N°. VI. pag. 239. hujus,  $by = ax - xy$ , non sufficere ad problema solvendum; non enim omnes problematis leges involvit, & ea de re est indeterminata, cum natura problematis determinatam flagitet: igitur alia quærenda est.

Neque alia  $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$  sola problema solvit, quia quantitatem  $b$ , problemati necessariam non complectitur, & hinc fit ut indeterminata sit.

Siquis cuperet æquationem determinatam, eruere deberet ex superiori æquatione valorem alterutrius  $x$  vel  $y$ , & in posteriore pro indeterminata illa substituere; qui tamen labor evitari potest, si animadvertas, quod ex superiori æquatione, sunt quæsitæ  $x$  &  $y$  in certa hyperbola, ex posteriore autem in certa ellipsi, quæ duæ curvæ easdem habent coordinatas; sed hæ duæ æquationes jungendæ sunt ut problema solvatur, debent igitur  $x$  &  $y$  esse in punctis illis quæ simul sunt ad utramque curvam, id est in earum intersectionibus.

Assumpsimus locum æquationis postremæ esse ad ellipsim, quod facile patet extracta æquationis radice, ut supra docuimus & sæpe fecimus.

Hinc sequitur quod.

17. In problematibus determinatis necesse non est ad æquationem determinatam devenire, sed sufficit habere duas æquationes locales, quæ constructæ dent, locorum intersectionibus, radices quæsitæ. Cavendum tunc est, ne sic incidamus in compositionem intricatiorem, quam quæ ex æquatione de-

determinata prodierit. Ex. gr., si in aliquo problemate solvendo deven-  
tum esset ad has duas æquationes locales

$$y = \frac{cd - cx}{b}; \text{ \& } \frac{bby}{ff} = aa + xx,$$

illæ ostenderent construendas esse rectam pro prima, & hyperbolam pro se-  
cunda; attamen substituto valore  $y$ , æquatio fit

$$xx - \frac{ccdx + ccd - aaff}{cc - ff} = 0,$$

æquatio plana.

18. Æquatio quævis determinata resolvi potest in duas æquationes locales;  
siquidem, ut vidimus, ex duabus æquationibus localibus componi potest.  
Id quomodo fiat, infra videbimus. Quod autem pertinet ad eas, quas præ  
manibus habemus.

Quia circulus ellipsi simplicior est, ideo NEWTONUS optime ex da-  
tarum æquationum combinatione ellipsim in circulum mutavit.

19. Hic locus est animadvertendi quod duæ locales æquationes additione  
& subtractione, ut res fert, ita jungi possunt, ut curva specie data obtineat-  
ur. En methodum.

Duc alteram ex datis æquationibus in assumptam fractionem  $\frac{m}{n}$ ; aut aliam  
commodiorem pro re nata; adde duas has æquationes; & hinc, secundum  
data, erue valorem ipsius  $\frac{m}{n}$ .

Ex. gr., ducatur in  $\frac{2m}{n}$  æquatio prior N<sup>i</sup>. VI. pag. 239. hujus, id est

$$by = ax - xy; \text{ fiet } \frac{2bmy}{n} = \frac{2am - 2mxy}{n}.$$

hanc adde posteriori ejusdem N<sup>i</sup>, nempe

$$cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$$

& invenies

$$cc + \frac{2bmy}{n} = yy + xx + \frac{2amx - 2mxy}{n} - \frac{2dxy}{a}$$

id est

L I 2

xx

$$xx = \frac{2dxy}{a} + \frac{2mxy}{n} - \frac{2amx}{n} - yy + \frac{2bmy}{n} + cc$$

aut

$$x = \frac{dy}{a} + \frac{my}{n} - \frac{am}{n} \pm \sqrt{yy \left( \frac{d}{a} + \frac{m}{n} \right)^2 - y^2 + \frac{2my}{n} (b - d - \frac{am}{n}) + cc + \frac{a^2 m^2}{n^2}}$$

Esse debeat hæc æquatio ad parabolam; igitur omnes termini, in quibus est  $yy$ , debent evanescere (Nº. 106. pag. 219. 220. Tomi I.) quare.

$$\left( \frac{d}{a} + \frac{m}{n} \right)^2 - 1 = 0; \& \frac{d}{a} + \frac{m}{n} = 1; \text{ aut } \frac{m}{n} = \frac{a-d}{a};$$

& fiet æquatio.

$$x = y - a + d \pm \sqrt{ay \left( \frac{a-d}{a} \right) (b-a) + cc + (a-d)^2}.$$

Ad hoc exemplum determinari potest æquatio, ut sit ad ellipsum, vel ad hyperbolam, ponendo  $\frac{d}{a} + \frac{m}{n}$  unitate minorem vel majorem: sed, cum in hac hypothesi maneat indeterminata quantitas  $\frac{d}{a} + \frac{m}{n}$ , ea determinanda est aliunde, puta, per datam rationem diametrorum.

Si vero æquatio debeat esse ad circulum; tunc

$$\left( \frac{d}{a} + \frac{m}{n} \right)^2 - 1 = 0; \& \frac{d}{a} + \frac{m}{n} = 0; \text{ ac } \frac{m}{n} = -\frac{d}{a}$$

id est æquatio prima multiplicari debet per  $\frac{d}{a}$ , & e posteriore subduci, quod fecit Auctor in fine Ni. VI. pag. 239. hujus.

Tab. IX.  
Fig. I.

20 Pro constructione, noluit acutissimus Auctor quæsitam determinare ipsa figura, quia angulus BAC ab indeterminatis factus necessario rectus non est; unde intricatior oriretur constructio, & circulus in ellipsum circa æquales diametros degeneraret. Suam vero compositionem NEWTONUS videtur invernisse methodis a nobis supra relatis. Nam extendente se  $y$  ex K in L, &  $x$  ex K in P, æquatio ad hyperbolam  $by + xy = ax$ , suppeditat per divisionem  $y = a - \frac{ab}{x+b}$ . Sume igitur KL æqualem AD =  $a$ ; &

si ponas  $y - a = u$ ; erit  $u = -\frac{x+b}{x-b}$  & incipiet ab L; tendent au-

tem

tem —  $u$  ab  $L$  in  $R$ . Posterior hæc æquatio dat  $ux + ub = -ab$ , vel  $ux = -ub - ab$ , aut  $x = -b - \frac{ab}{u}$ ; quapropter cape negativam

$KM$  parem (Fig. 1.)  $PD$  aut  $AE = b$ ; & si  $x + b = z$ , erit  $ux = -ab$ ;  $z$  autem se ipsæ extendunt ex  $M$  in  $P$ ; ideo comple rectangulum  $KLNM$ , erunt  $LN$ ,  $NM$  asymptoti, inter quas describenda est hyperbola, quæ quidem clauderetur angulo illo, qui ad verticem est ipsi  $LMN$  si  $uz$  esset quantitas positiva, quia vero negativa est, accipi debet ejus opposita, ut optime **NEWTONUS** (Nº. VII. pag. 240. hujus.)

Pro circulo autem, æquatio inventa sic disposita

$$xx = 2dx + cc - yy - \frac{2dby}{a}.$$

præbet

$$x = d \pm \sqrt{(dd + cc - yy - \frac{2dby}{a})}.$$

Ideo (Fig. 2.) cape  $KP$  æqualem  $AG = d$  (Fig. 1.). Age (Fig. 2.)  $PT$  ipsi  $RS$  parallelam, & diameter erit in  $PT$  indefinite producta, centrum vero erit  $T$ . Nunc pone

$$x - d = u; \text{ erit } u = \sqrt{(dd + cc - yy - \frac{2dby}{a})},$$

ipsa ordinata, quæ in nihilum evanescit, quando circuli diameter a circulo secatur; jam

$$\sqrt{(dd + cc - yy - \frac{2dby}{a})} = 0.$$

dat

$$yy = -\frac{2bdy}{a} + dd + cc, \text{ \& } y = -\frac{bd}{a} \pm \sqrt{(\frac{dabb}{aa} + dd + cc)}.$$

Est autem (in fig. 1.)  $DA (a) . AG (d) :: EA (= PD = b) . AH = \frac{db}{a}$ .

Cape igitur negativam  $KR$  æqualem  $AH$ , & comple rectangulum: denique ex  $KP$  abscinde  $KQ$  parem  $BC = c$ ; & erit

$$RQ = RS = \sqrt{(\frac{dabb}{aa} + cc)}, \text{ ac } TS = \sqrt{(\frac{dabb}{aa} + cc + dd)}, \text{ radius.}$$

Demonstratio & determinatio casuum diverforum adeo facilis est iis, qui superiora bene perspecta jam habent, ut omittendas censeam.

Verba, quæ in fine Ni. IX. Italicis litteris scripta sunt, an Auctoris sint, an ab aliquo addita, non liquet. Quomodo vero æquationes biquadraticas ad cubicas revocentur per CARTESII methodum tradidit noster N°. XVII. pag. 160. 161. hujus.

Quia mihi videor nonnullorum Lemmatum faciliorem demonstrationem invenisse, ea omnia repetam, simul & explicato, ac, ubi res tulerit, nova demonstratione firmabo.

LEMMA I. N°. XI. pag. 241. hujus.

21. *Posita præcedente constructione, proportionales sunt rectæ TX; AX; CX; KE.*

Nam similia sunt triangula ACX; AKF, unde

CA ad AK ut CX ad KF.

Præterea, in Fig. 3. 4., similia sunt triangula EXY; EKF; quapropter

XY ad YE ut FK ad KE.

Sed in Fig. 5., similia primo sunt triangula YX<sub>1</sub>E; 1EKF; quare

X<sub>1</sub>Y ad 1Y<sub>1</sub>E ut FK ad K<sub>1</sub>E.

Secundo, similia sunt triangula 2YX<sub>2</sub>E; FK<sub>2</sub>E; ideo

X<sub>2</sub>Y ad 2Y<sub>2</sub>E ut FK ad K<sub>2</sub>E.

Tertio, similia sunt triangula 3YX<sub>3</sub>E; FR<sub>3</sub>E; quare

X<sub>3</sub>Y ad 3Y<sub>3</sub>E ut FK ad K<sub>3</sub>E.

Atqui æquales factæ sunt CA; YE; 1Y<sub>1</sub>E; 2Y<sub>2</sub>E; 3Y<sub>3</sub>E. Ergo ex æquo perturbate &c.

LEMMA II. N°. XII. pag. 241. hujus.

22. *Isdem positis, proportionales sunt ipsi TX; AR, in Fig. 3. & 4); TC & summa ipsarum AK; KE; & in Fig. 5.1); 3TC & summa AK; K<sub>3</sub>E; atque C<sub>1</sub>T & excessus AK supra K<sub>1</sub>E; & tandem C<sub>2</sub>T & excessus ipsius K<sub>2</sub>E supra AK.*

Patet resumendo proportionem Lemmatis I., & addendo antecedentem antecedenti, ac consequentem consequenti, vel ex antecedente demendo antecedentem & ex consequente consequentem, ut in hujus enunciatione.

LEMMA III. N°. XIII. pag. 241. hujus.

23. *Isdem positis, erit TX (in Fig. 3. & 4.) media proportionalis inter excessum ipsius EK supra KB, & RA; ac (in Fig. 5.) X<sub>1</sub>T media proportionalis inter*

inter excessum ipsius  $BK$  supra  $K_1E$ , &  $AK$ ; &  $X_2Y$  media proportionalis inter excessum ipsius  $BK$  supra  $K_2E$ , &  $AK$ ; tandem  $X_3Y$  media proportionalis inter summam ipsarum  $BK$ ,  $K_3E$  &  $AK$ .

Perfice circulum  $CXcDx$  occurrentem rectæ  $YK$  (productæ quatenus Tab. Z. opus est,) in  $c$  &  $x$ , ac rectæ  $AK$ , (pariter productæ) in  $C$  &  $D$ . An- Fig. 1. 2. gulus  $DCX$  est in maiore segmento  $DxCX$ ; ergo acutus est (Eucl. prop. 3. 4. 31. lib. 3.) Quare, ducta ex centro  $K$  in  $YC$  perpendiculari  $KR$ , erit quadratum  $YK$  minus quàm quadrata ex  $CK$  &  $CY$ , rectangulo bis contento sub  $YC$ ;  $CR$  (Eucl. prop. 13. lib. 2.), vel rectangulo semel contento sub  $YC$ ;  $CX$  (Eucl. prop. 3. lib. 3. & prop. 1. lib. 2.). Idem eadem de causa verum est (in Auct. Fig. 5.)  $K_2Yc$ ; &  $K_3Y$ .

Sed (in Auct. Fig. 5.) angulus  $YCK$  obtusus est; ideo quadratum  $YK$  majus est quam quadrata  $KC$  &  $CY$  rectangulo semel contento sub  $YC$ ;  $CX$  (Eucl. prop. 12. lib. 2.; & prop. 3. lib. 3. ac 1. lib. 2.)

Quin, descripto toto circulo, statim patet esse rectangulum  $*Yc$  excef- Tab. Z. sum quadrati  $YK$  supra  $cK$ , vel  $CK$  quadratum; (Eucl. prop. 6. lib. 2.) Fig. 1. rectangulum vero  $CYX$  excessum quadrati  $XC$  supra rectangulum  $YCX$  & 2. (Eucl. prop. 2. lib. 2.); id est, acta per centrum  $K$  in  $CY$  perpendiculari  $KR$  supra duplum rectangulum  $YCR$ .

At (in Fig. 3.), in qua recta  $EK*Y$  respondet rectæ  $1EK_1Y$  Fig. 5. Au- Tab. Z. ctoris, manet rectangulum  $*Yc$  excessus quadrati  $YK$  supra quadratum  $*K$  Fig. 3. vel  $KC$ ; rectangulum vero  $CYX$  est summa quadrati  $YC$  & rectanguli  $YCX$  (Eucl. prop. 3. lib. 2.).

Denique (in Fig. 4.), in qua recta  $EcYK$  respondet rectæ  $2E_2YK$  Fig. Tab. Z. 5. Auctoris, est rectangulum  $*Yc$  excessus quadrati  $cK$  vel  $CK$  supra qua- Fig. 4. dratum  $YK$  (Eucl. prop. 5. lib. 2.); rectangulum vero  $CYX$  est excessus rectanguli  $YCX$  supra quadratum  $YC$  (Eucl. prop. 3. lib. 2.).

Hinc facile deducitur reliqua demonstratio.

Sed, perfecto circulo, res ita facilius confici videtur. Jam (Fig. 1. quæ Tab. Z. est Auctoris 3.) æquantur  $AC$ ,  $YE$ , adde æquales  $CK$ ,  $Kx$  & communem Fig. 1.  $KE$ ; & erit  $Yx$  æqualis  $AK$ ,  $KE$  simul: sed, per Lemma II, est  $XY$  ad  $AK$  ut  $YC$  ad  $AK$ ,  $KE$  simul, nempe, ad  $Yx$ ; & per naturam circuli  $CY$  ad  $Yx$  ut  $cY$  ad  $YX$ ; ergo  $cY$  ad  $YX$  ut  $YX$  ad  $AK$ .

Jam ex  $EK$  abscinde  $Kb$  parem  $KB$ , reliqua  $bc$  æquabit reliquam  $BC$ , nempe  $CA$  aut  $YE$ ; quare, addita communi  $Ec$  erit  $Yc$  æqualis  $Eb$  aut excessui  $EK$  supra  $KB$ .

Sed (in Fig. 2. quæ est Auctoris 4.) est  $CB$  æqualis  $EY$ ; adde æquales Tab. Z.  $CK$ ,  $Kc$ ; atque  $EY$ ,  $cK$  simul æquabunt  $KB$  aut ei parem  $Kc$ ; deme hinc Fig. 2. inde communes  $bY$ ,  $cK$ , ac remanebit  $Yc$  æqualis  $Eb$  excessui  $EK$  supra  $KB$ .

At in casu primo (Fig. 5. Newtoniana, ea est 3. ex nostris æquales sunt Tab. Z.  $AC$ ,  $YE$ ; deme æquales  $CK$ ,  $Kx$ ; &  $AK$  æquabit  $KE$ ,  $Yx$  simul: ergo Fig. 3.  $Yx$  est excessus  $AK$  supra  $AE$ . Atqui, per Lemma II, est  $YX$  ad  $AK$  ut  $YC$  ad  $Yx$ ; & per circuli naturam  $CY$  ad  $Yx$  ut  $cY$  ad  $YX$ ; ergo  $cY$  ad  $YX$  ut  $YX$  ad  $AK$ .

Jam

Jam BK æquat YE & KC simul, id est, Yc & KE simul; quare Yc est excessus BK supra KE.

Tab. Z.  
Fig. 4.

In casu secundo (Fig. 5. Newtoni, aut 4. ex his) æquales sunt AC, EY; quocirca excessus EY supra AK est CK vel Kx; adde utrinque KY; & excessus EK supra KA erit Yx; est autem, per Lemma secundum, YX ad AK ut CY ad Yx, & per naturam circuli CY ad Yx ut cY ad YX; ergo cY ad YX ut YX ad AK.

Tab. Z.  
Fig. 5.

Nunc BK æquat EY & cK simul, id est, KE & cY simul, ideo cY æquat excessum BK supra KE.

Denique in casu tertio (Fig. 5. Newtoniana, & 5. ex hisce nostris.) æquales sunt AC & EY; addita igitur KE, pares erunt AC, KE simul, & KY; & c, demtis æqualibus CK, Kx, erunt AK, KE simul æquales Yx; sed per Lemma secundum YX ad AK est ut CY ad Yx; & per circuli naturam, CY ad Yx ut cY ad YX; ergo cY ad YX ut YX ad AK.

Quoniam vero BC æquat YE; additis æqualibus CK, Kc & communi KE; BK, KE simul æquabunt cY.

Diversos casus, quibus determinandis immorari noluit NEWTONUS, evolvere videtur operæ pretium, quam in rem præmittam aliquot lemmata.

Tab. Z.  
Fig. 6.

24. Quando punctum K est extra puncta A & B, una recta datæ longitudinis CA poni potest in angulo CXA, & una EY in angulo FXY, earum quæ transeunt per punctum K.

Nam, angulus XCK ostensus est acutus, quare obtusus est angulus ei deinceps XCA; & fortius angulus CAH; qui eo major est (Eucl. prop. 16. lib. 1.) Ergo, ducta quavis KH, quæ ipsi XC occurrat in G, & ipsi XA in H, erit HK major quam KA (Eucl. prop. 29. lib. 1.)

Jam per C agatur CI parallela ipsi AH & occurrens rectæ KH in I: cadet punctum I inter puncta G & H, nam angulus KCI æqualis angulo KAH (Eucl. prop. 29. lib. 1.) major est quam angulus KCG, qui æquat angulum XCA (Eucl. prop. 15. lib. 1.)

Est autem HI ad AC ut HK ad AK (Eucl. prop. 2. lib. 6.), quare HI, & fortius HG major est quam AC.

Si vero intra triangulum CXA ducatur quævis Kgh, eodem pacto ostendetur gh minor quam CA.

Tab. Z.  
Fig. 7.

Sed in Fig. 7; Est angulus KCG obtusus & major angulo KAH quare ex A ducta AI parallela ipsi CG, demonstrabitur, ut supra, GH quidem major; gh vero minor quam AC. Et hæc quidem pro rectis, quæ ex K ducuntur intra angulum AXC.

Pro iis vero quæ ducuntur intra angulum YXE, angulus CYK demonstrabitur acutus per Fig. 1. & 2. hujus tabulæ, in quibus rectangulum ad R est triangulum KRY. Ideo in Fig. 6. 7. obtusus est angulus GYK, & in Fig. 6. major angulo YEX, vel HEK; & in Fig. 7. contra angulus HEK major est quam angulus EYX, vel GYK: unde redibit demonstratio superior.

Tab. Z.  
Fig. 1.

25. In angulo his deinceps nulla æqualis CA vel CB poni potest, quæ transeat per punctum K. Nam in Fig. 1., angulus hic est CXE, cujus

latus



latus XE totum est extra circulum, & lateris XC sola pars XC est intra circulum. Quoniam rectæ CY; KY convenient in puncto Y; anguli YCK; CKY simul duobus rectis minores sunt. Ergo quævis ducta per K intra angulum CKY ipsi CY occurret inter puncta C & Y. Eadem de causa recta AE occurret inter puncta A & E; quare, siqua ejus pars æquat ipsam CA, ea pars erit in angulo EXY. Ergo recta utrique EX; XC occurrens in angulo EXC, cadet intra angulum EKD, eique ad verticem CK<sub>x</sub>; atque ideo erit diametro major. Est autem AC vel CB semidiametro minor.

Quod autem pertinet ad Fig. 2., angulus de quo agitur, est AXY; & Tab. Z. recta ducenda per K, & occurrens ipsis XY; YA, cadet intra angulos Fig. 2. EKD & CK<sub>x</sub>; atque ideo extra circulum excurret saltem ad partes Y; nam ad alteram partem occurrere potest rectæ XA intra circulum, nempe inter puncta A & x; & semper erit radio major; quo minor esse debet.

26. Sed quando æquatio construenda habet  $+q$ ; ipsæ KA & KB sumi debent ad easdem partes (N<sup>o</sup>. X. pag. . hujus). Igitur hujus æquationis unam radicem præbebit constructio; atque hujusmodi æquatio unam tantum habet radicem realem.

27. Nulla recta æqualis ipsi CA cadere potest in angulo AXC præter CA (N<sup>o</sup>. 24. pag. 240. hujus). Ergo una radix erit XY; quæ negativa est, si æquatio habet  $+r$ , quia æquatio

$$x^3 + qx + r = 0$$

radices positivas non habet; eadem positiva erit si æquatio habet  $-r$ , quia æquatio

$$x^3 + qx - r = 0$$

habet unam radicem positivam, ut monet noster in fine N<sup>i</sup>. X. pag. 240. hujus.

28. Quando punctum K cadit inter puncta A & B, patet tres rectas poni Tab. IX. posse per K æquales datæ CA, quæ radio major est, unam 1E<sub>1</sub>Y intra Fig. 5. angulum CXE; alteram 2E<sub>2</sub>Y intra angulum CX<sub>2</sub>E; tertiam 3E<sub>3</sub>X intra angulum ad verticem AX<sub>3</sub>Y.

Hæ observationes non difficile aptantur ad reliqua ad N<sup>um</sup>. LII. usque, ad quem transco. Sed prius observo quod.

29. Æquatio  $r - qx = x^3$ , quæ habetur in fine N<sup>i</sup>. XIV. pag. 242. hujus, resolvitur in analogiam

$$\frac{r}{n} - \frac{qx}{n} \text{ ad } xx \text{ ut } x \text{ ad } n;$$

& ut duo primi termini evadant lineares, faciendum est  $x \text{ ad } n \text{ ut } \frac{r}{nn} \text{ ad } z;$

eritque

Tom. II.

Mm

xx

$$xz = \frac{r}{n}, \text{ \& } xz = \frac{qx}{n} \text{ ad } xx \text{ ut } x \text{ ad } n \text{ ut } z = \frac{q}{n} \text{ ad } x.$$

Prima analogia  $x$  ad  $n$  ut  $\frac{r}{m}$  determinatur primo Lemmate, & secunda tertio.

30. Quia vero  $r$  hic est quantitas positiva, scribi debet  $XY = -x$ , unde  $\frac{r}{n} + \frac{qx}{n}$  ad  $xx$  ut  $-x$  ad  $n$ ; tunc autem esset  $\frac{r}{n} = -xz$ ; nam  $-x$  ad  $n$  ut  $\frac{r}{m}$  ad  $z$ ; quapropter  $-xz + \frac{qx}{n}$  ad  $xx$  ut  $-x$  ad  $n$ ; ac (dividendo primos duos terminos per  $-x$ )  $z = \frac{q}{n}$  ad  $-x$  ut  $-x$  ad  $n$ , &  $r + qx = -x^2$ , aut  $x^2 + qx + r = 0$ .

31. Si vero haberetur  $-r$ , tunc  $XY$  esset quantitas positiva, & analogia esset  $\frac{+r - qx}{n}$  ad  $xx$  ut  $x$  ad  $n$ , atque  $+r - qx = x^2$ , seu  $x^2 + qx - r = 0$ .

32. Quod si æquatio proposita esset  $x^2 - qx - r = 0$ , esset  $XY$  radix positiva  $= +x$ , & analogia fieret  $\frac{r + qx}{n}$  ad  $xx$  ut  $x$  ad  $n$  ut  $z = \frac{q}{n}$  ad  $x$ ; & constructio fieri deberet ut in casu tertio, fig. 5. Auct. aut 5. nostra.

33. Si denique æquatio fuisset  $x^2 - qx + r = 0$ , haberemus  $\frac{qx - r}{n}$  ad  $xx$  ut  $x$  ad  $n$  ut  $\frac{q}{n} = z$  ad  $x$ , & constructio facienda esset ut in casu primo & secundo, fig. Auctoris, aut 3. 4. ex nostris.

Hoc ad exemplum, facile determinabuntur casus in reliquis formulis.

34. Obiter observo in N°. XXIII. pag. 244. hujus, facile demonstrari triangula  $ACX$ ;  $AKG$  esse similia, & quia  $CA$  facta est æqualis  $CX$ , esse etiam  $KA$  æqualem  $AG$ , quod alio pacto demonstrat noster N°. XXV. pag. 245. hujus.

Nam, quia æquales sunt rectæ  $CA$ ;  $AX$ , per constructionem, æquales sunt anguli  $KCX$ ;  $CXG$  (Eucl. prop. 5. lib. 1.) Sed anguli  $KCX$ ;  $XGK$  simul conficiunt duos rectos (Eucl. prop. 22. lib. 3.); atque ideo æquales sunt angulis  $CXG$ ;  $GKC$  simul, qui pariter conficiunt duos rectos; & eadem de causa æquales angulis  $KCX$ ;  $XCA$ ; & angulis  $CXG$ ;  $CXA$ ; ergo demptis æqualibus & communibus, æquales manent  $ACX$ ;  $AKG$ ;  $KGA$ ;  $CXA$ .

Tandem venio ad Num. LII. Ibi docet Auctor descriptionem ellipsis, quæ quanquam explicata fuerit probl. XXXV. pag. pag. 251. Tomi I. tamen libet addere analysim geometriam, quæ perfacilis est.

35. *Data magnitudine recta DE ita moveatur per rectas indefinitas IK, LM se ad rectum angulum interfecantes in C, ut datæ DE extremitas altera D semper sit*

Tab. 4.  
Fig. 2.

fit in recta LM, altera vero E semper in recta IK; queritur locus descriptus ab F puncto ipsius DE ita in F productæ, ut EF data sit magnitudine.

## ANALYSIS.

Ponatur prius punctum D esse in C, tunc punctum F erit in A; eritque AC æqualis toti FD. Moveatur nunc recta, servatis legibus propositis, ita ut punctum D progrediatur versus L, aliquando punctum E cadet in C; & tunc erit Cb par ipsi EF. Feratur punctum E versus K, liquet punctum D descensurum versus C, ubi rursus incidet; & tunc erit Ca æqualis toti DF aut CA. Descendat nunc punctum D versus M, regredietur punctum E versus C, ad quod aliquando deveniet; & tunc erit CB par datæ EF vel Cb. Eat denique punctum E versus I, ascendet punctum D versus C, ubi rursus cadet; & recta DF coincidet iterum cum CA. Hinc patet puncta A, B, a, b futura ad locum quæsitum.

Nunc sit recta DF in locum quemlibet DEF, & ex F ipsi ML parallela agatur indefinita FN ipsi IC occurrens in G, atque ex D agatur DH parallela AC & occurrens FN in H. Est ergo quadratum DF ad quadratum FE ut DH quadratum ad quadratum GE, & ablato antecedente ab antecedente, & consequente a consequente, erit quadratum DF ad quadratum FE ut excessus quadrati DF supra DH quadratum ad excessum quadrati FE supra EG quadratum. Est autem FD quadratum æquale quadrato AC, & FE par CB; & excessus quadrati AC supra DH vel CG est rectangulum AGa, excessus vero quadrati FE supra EG quadratum est quadratum GF; ergo quadratum AC ad CB quadratum ut rectangulum AGa ad quadratum GF. Igitur locus est ellipsis, cujus major semiaxis tota DF, minor vero EF.

36. Ceterum fons, unde omnes constructiones dimanant, hic est.

Omnis æquatio trium dimensionum ad quatuor ascendet, si per incognitam cognita quavis auctam vel diminutam multiplicetur. Exempli gratia; æquatio cubica

$$x^3 + px + qx + r = 0$$

ducta in  $x + a$  fit

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 + p & x^3 + q & xx & + r & x + ar & = 0. \\ + a & + ap & + aq & \end{array}$$

Quævis æquatio quadrato-quadratica determinata fingi potest composita ex duabus quadraticis indeterminatis, quarum una sumi potest ad libitum, altera ex assumpta & proposita deducitur. Sic æquatio proposita

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 + p & x^3 + q & xx & + r & x + ar & = 0 \\ + a & + ap & + aq & \end{array}$$

fingi potest composita ex hac ad arbitrium sumpta

$$\beta y = xx + \frac{px + ax}{2}$$

& ex alia quam facile reperiam ponendo hanc assumptam in proposita; quod sic fit: assumpta quadretur & erit

$$\beta\beta yy = x^4 + \frac{p}{a} x^3 + \frac{2ap}{4} xx + \frac{aa}{4}$$

ergo

$$\beta\beta yy - \frac{2ap}{4} xx = x^4 + \frac{p}{a} x^3 + \frac{aa}{4}$$

quo valore posito in æquatione proposita, ea fit

$$\beta\beta yy + \frac{2ap}{4} xx + \frac{r}{a} x + ar = 0;$$

quæ iidem quadratica est & indeterminata. Hujus rei ratio est, quod æquatio

$$\beta y = xx + \frac{px + ax}{2}$$

convenit infinito quantitatum numero, ideoque eas etiam quæ sub proposita continentur, complectitur. Altera vero complecti quidem debet infinitas quantitates, & propterea debet esse indeterminata; sed alia ad aliam ita referri debet, ut contineant ambæ junctæ quantitates tantum illas quas proposita continebat: quod fieri nequit nisi secunda a proposita deducatur.

37. Rem expedire potes, si sumas duas æquationes indeterminatas ad libitum, e quarum altera, primæ ope, alteram incognitam elimines; unde æquationem

tionem determinatam conficies, cujus terminos comparabis cum terminis propositæ, & ita constantes determinabis.

Assumpsi

$$\beta y = xx + \frac{px + ax}{2}, \text{ non } \beta y = xx \text{ aut } \beta y = xx + xx,$$

quia sic, quadrando statim obtineo duos primos propositæ terminos, quos simul ejicio. Si vero proposita secundum terminum non haberet, aut eum manere præstaret, sufficeret ponere  $\beta y = xx$  aut  $\beta y = xx + xx$ , ubi  $x$  indicat quantitatem constantem pro re nata determinandam.

38. Si quando æquatio cubica ad quadrato-quadraticam efferenda est, præstat plerumque ita computum instituere, ut quadrato-quadratica secundo termino careat, quod facile fit, si æquatio cubica ducatur in incognitam cognita secundi termini propositæ minutam, si secundus propositæ terminus sit affirmativus; aut eadem auctam, si sit negativus. Sic, in proposito exemplo, si æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r = 0 \text{ ducatur in } x - p,$$

habetur æquatio quadrato-quadratica

$$x^4 + \frac{q}{-pp} xx + \frac{r}{-pq} x - pr = 0.$$

Si vero proposita secundo termino destituta esset, sufficeret eam ducere in incognitam.

39. Sed jam proposita aut ultro aut per has artes sit quadrato-quadratica, animadvertendum est ex assumpta & proposita plures haberi posse æquationes, quarum duæ commodiores, ut res fert, sunt seligendæ. Sic in secunda

ex inventis ponatur pro  $xx$  ejus valor  $\beta y = \frac{px - ax}{2}$  in  $qxx$ , habebitur.

$$\begin{aligned} & + \frac{2ap}{4} & - \frac{qp}{2} \\ \beta\beta yy + \beta qy & - \frac{pp}{4} & xx + r & x + ar = 0; \\ & - \frac{aa}{4} & - \frac{aq}{2} \end{aligned}$$

$$\text{si in } \left( \frac{2q + ap}{2} \right) xx, \text{ fiet}$$

$$\begin{array}{r}
 -\frac{pq}{2} \\
 +\frac{2\beta q}{2} + \frac{aq}{2} - \frac{pp}{4} \\
 \beta^2\gamma\gamma + \frac{a\beta p}{2} y - \frac{app}{4} x - \frac{4}{aa} xx + ar = 0; \\
 -\frac{aap}{4} \\
 +r
 \end{array}$$

& sic de ceteris.

40. Quinimo & cuicumque ex his secundis addendo primam æquationem alteræ conficiuntur.

41. Æquatio fictitia est ad parabolam, & æquatio hinc exurgens potest esse ad circulum, aut ellipsin. Si habeas parabolam datam, id est, cuius latus rectum datum sit  $= b$ , æquatio ad parabolam vertetur in hanc

$$by = xx + \frac{px + ax}{2}.$$

Construenda nunc sit æquatio proposita per datam hanc parabolam & circulum; patet æquationem secundam, si  $xx$  fractionibus liberetur, verti in hanc

$$xx = \frac{(4r - 4aq)x - 4b\gamma\gamma - 4ar}{4q + 2ap - pp - aa},$$

quæ numquam erit ad circulum, nisi coefficientis ipsius  $-\gamma\gamma$  sit  $= 1$ ; ergo

$$= \frac{4bb}{4q + 2ap - pp - aa}; \text{ aut } 4q + 2ap - pp - aa = 4bb,$$

hoc est,

$$aa = +2ap + 4q - pp - 4bb, \text{ & } a = +p \pm \sqrt{4q - 4bb};$$

aut igitur  $q$  superat  $bb$ , aut ab eo superatur, aut ei æquatur. Si primum; duo sunt valores ipsius  $a$  ad arbitrium sumendi, & ideo duo circuli problema solventes; nam pone  $\sqrt{4q - 4bb} = f$ ; erit æquatio ad parabolam

$$by = xx \pm \frac{fx}{2} + qx,$$

& æquatio ad circulum

$$xx = - \frac{(4r - 4pq \mp 4fq) x}{4bb} - yy - \frac{4pr \mp 4fr}{4bb}.$$

Si secundum; res perfici non posset. Si tertium, unus circulus problema solveret.

42. Ceterum dum agimus de circulo, semper intelligendum est coordinatas esse ad rectos angulos.

43. Simili modo verti posset æquatio secunda in ellipsin specie datam, ponendo.

$$4bb \text{ ad } 4q + 2ap - pp - aa \text{ ut } m \text{ ad } n,$$

id est, in data diametrorum ratione; unde rursus haberetur  $a$ , quæ tunc æquaret  $p \pm \sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})}$ : ubi eadem quæ supra notanda sunt. Hyperbola autem nullo pacto posset obtineri: nam si curva esset hyperbola, terminus  $\frac{-4bbny}{4q + 2ap - pp - aa}$  deberet esse positivus, & idcirco divisor negativus, igitur  $4q + 2ap$  minor  $pp + aa$ , id est

$$4q + 2pp \pm 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})} \text{ minor quam}$$

$$pp + pp \pm 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})} + 4q - \frac{4bbn}{m},$$

vel o minor  $-\frac{4bbn}{m}$ , quod est absurdum, siquidem omnis quantitas negativa minor est nihilo; seu, quod idem est, tunc

$$4q + 2ap - pp - aa = 4q + 2pp \pm 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})} - pp - pp \mp 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})} - 4q \frac{bbn}{m} = + \frac{bbn}{m}.$$

deberet esse quantitas negativa, quod non est.

44. Sed ex æquatione assumpta & ex illa, quæ inde & ex proposita exoritur, obtineri possunt, ut diximus, aliæ æquationes, quæ dant alios circulos & hyperbolam. Etenim æquatio

$$\begin{aligned} & + \frac{2ap}{4} - \frac{pq}{2} \\ \beta\beta yy + \beta qy - \frac{pp}{4} + r x - ar & = 0 \\ & - \frac{aa}{4} + \frac{aq}{2}. \end{aligned}$$

fit

fit quidem

$$xx = \frac{(2pq + 4r + 2aq)x + 4bby + 4\beta qy - 4ar}{aa - 2ap + pp},$$

quæ nequit esse ad circulum neque ad ellipsin; quandoquidem ob

$aa$  ad  $ap$  ut  $ap$  ad  $pp$ , est  $aa + pp$  major quam  $2ap$ ,

& quantitates  $4bb$  ac  $aa - 2ap + pp$  ambæ positivæ, est autem ad hyperbolam, cujus species definitur ponendo  $4bb$  ad  $aa - 2ap + pp$  datam habere rationem.

45. Sed, si ex illa subduceretur æquatio  $bb$  ( $by - \frac{px - ax}{2} - xx = 0$ ), haberetur

$$\begin{array}{rcl} & & - \frac{pq}{2} \\ + \frac{2ap}{4} & & + r \\ & & + \frac{aq}{2} \\ bby - \frac{bq}{b}y - \frac{pp}{4}xx & & x - ar = 0, \\ & & + \frac{bbp}{2} \\ & & + \frac{abb}{2} \end{array}$$

quæ verteretur in

$$xx = \frac{(2pq + 4r + 2aq + 2bbp + 2abb)x + 4bby + (4bq - 4b^2)y - 4ar}{aa - 2ap + pp - 4bb},$$

quæ esse potest ad circulum, si fiat

$$\frac{4bb}{aa - 2ap + pp - 4bb} = -1,$$

unde oriëtür

$$aa - 2ap + pp + 4bb = 4bb, \text{ unde } a = p;$$

& ad aliam quamvis hyperbolam specie datam, si fiat  $aa - 2ap + pp - 4bb$  ad  $4bb$  in data ratione; & denique ad ellipsim, si ponas

$$aa - 2ap + pp - 4bb \text{ ad } -4bb \text{ in data ratione.}$$

46. Nota quod in N<sup>is</sup>. 41..45. pro  $\beta\beta$  posuimus  $bb$ , quia ipsam  $\beta$  datam finigimus ob datam parabolam; in aliis vero hypothésibus alius valor ipsius  $\beta$  adhibendus erit.



47. Quoniam autem circulus simplicior est sectionibus conicis, is semper adhibetur cum alia sectione conica data saltem specie. Ex. gr. detur ellipsis, cujus axes sint  $c, b$ . Ad hanc ellipsin exponendam assumamus aliquam ex jam repertis æquationibus, quæ ad ellipsin esse possunt, puta

$$xx = \frac{(4r - 4aq)x - 4\beta\gamma y - 4ar}{4q + 2ap - pp - aa},$$

debet ergo esse

$$\frac{4\beta\beta}{4q + 2ap - pp - aa} = \frac{lb}{cc}, \text{ \& } \beta\beta = \frac{bb\gamma\gamma}{4cc}$$

(ponendo brevitatis gratia  $\gamma\gamma = 4q + 2ap - pp - aa$ )

igitur altera æquatio quæ potest esse ad circulum, ubi

$$aa - 2ap + pp - 4\beta\beta = -4\beta\beta, \text{ nempe}$$

$$xx - \frac{(2pq + 4r + 2aq + 2\beta\beta q + 2a\beta\beta)x + 4\beta\beta\gamma y + (4\beta q - 4\beta\beta)y - 4ar}{aa - 2ap + pp - 4\beta\beta} = 0;$$

fiet primo

$$xx = + \frac{2pq - 4r - 2aq}{4\beta\beta} - 2q - 2a)x - \gamma y - \left(\frac{q}{\beta} + \beta\right)y + \frac{ar}{\beta\beta};$$

sed tunc  $aa - 2ap + pp = 0$ ; ergo æquatio

$$\gamma\gamma = 4q + 2ap - pp - aa \text{ fit } \gamma\gamma = 4q \text{ \& } \beta\beta = \frac{bbq}{cc};$$

quare æquatio ad ellipsim evadit

$$xx = -\left(\frac{r}{q} - p\right)x - \frac{bbyy}{cc} - \frac{pr}{q},$$

\& æquatio ad circulum

$$xx = -\left(\frac{ccr}{bbq} - 2q - 2p\right)x - \gamma y - \left(\frac{a\sqrt{q}}{b} + \frac{b\sqrt{q}}{a}\right)y + \frac{ccpr}{bbq};$$

quæ facile construi possunt.

49. Quæ diximus de ellipsi data, facile aptantur tum ad ellipsim specie datam, tum ad hyperbolam.

50. Hoc pacto fortasse invenit Newtonus rationem quam tradidit (N<sup>o</sup>. Tom. II. Nn LII;

LII. pag. 210. hujus) construendæ æquationis

$$x^3 = px + qx + r, \text{ vel } x^3 - px - qx - r = 0,$$

aut certe hoc pacto potuit eam invenire. Nam æquationem illam duc in  $x - p$  & habebis

$$x^4 - 2px^3 - \frac{q}{+pp} xx - \frac{r}{+pq} x + pr = 0.$$

Pone nunc

$$\frac{nu}{2} = xx - px - \frac{q - nn}{2},$$

erit, quadrando,

$$\frac{nnnn}{4} = x^4 - 2px^3 - \frac{q}{+pp} xx + \frac{pq}{+np} x + \frac{nnq}{2} + \frac{qq}{4} + \frac{nn^2}{4},$$

hoc est,

$$\frac{nnnn}{4} + nnnx - nnp x - \frac{qq - 2nnq - n^4}{4} = x^4 - 2px^3 - \frac{q}{+pp} xx + pqx.$$

sed ex propofita æquatione est

$$x^4 - 2px^3 - \frac{q}{+pp} xx + pqx = rx - pr;$$

ergo (dividendo per  $nn$  & multiplicando per 4)

$$nn + 4xx - 4px - \frac{qq}{nn} - 2q - nn = \frac{4rx - 4pr}{nn},$$

aut

$$nn = -4xx + 4px + \frac{4rx}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn},$$

feu

$$u = \sqrt{(-4xx + 4px + \frac{4rx}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})},$$

æqua-

æquatio ad circulum, quod melius videbis si pro  $2x$  scribas  $z$ ; tunc enim erit

$$u = \sqrt{(-zz + 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})}.$$

Si ergo rectæ CE, CK ad angulos rectos sibi occurrant in C, &  $u$  ponatur tendere ex C in D,  $z$  vero ex C in K; transibit CK per circuli centrum. Quando autem  $u = 0$ , id est in ipsa CK est

$$\sqrt{(-zz + 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})} = 0,$$

id est,

$$zz = 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn},$$

vel

$$z = p + \frac{r}{nn} \pm \sqrt{(\frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{2pr}{nn} + pp + \frac{rr}{n^2})}.$$

Captas pone Cf =  $p$ , fK =  $\frac{r}{nn}$ ; erit K centrum circuli, cujus radius est

$$\sqrt{(\frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{2pr}{nn} + pp + \frac{rr}{n^2})} = \sqrt{((\frac{q}{n} + n)^2 + (\frac{r}{nn} - p)^2)}.$$

Sume igitur CB =  $n$  & BA =  $\frac{q}{n}$ ; per A age ad rectos angulos AI; & per K & f age KI, fF parallelas ipsi AE & occurrentes AI in I & F. Dehinc abscinde GF æqualem FA, parem fC =  $p$ , & erit IK =  $n + \frac{q}{n}$ , ac IG =  $\frac{r}{nn} - p$ ; igitur GK radius quæsitus. Quæ constructio ne hilum quidem differt a Newtoniana.

§1. Nunc æquatio assumpta ducatur in fractionem  $\frac{2n - 2a}{n}$ , & fiet

$$2nn - 2an = 4xx - \frac{4axx}{n} + \frac{4apx}{n} - 4px - 2q + \frac{2aq}{n} - 2nn + 2an;$$

huic addatur æquatio ad circulum

$$nn = -4xx + 4px + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4rx}{nn} - \frac{4pr}{nn},$$

N n 2

&c

&amp; fiet

$$2nu - 2au + uu = -\frac{4axx}{n} + \frac{4apx}{n} + \frac{4rx}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn + 2av - \frac{4pr}{nn},$$

feu (ordinando & pro  $2x$  reponendo  $z$ )

$$uu = 2au - 2nu - \frac{azx}{n} + \frac{2apz}{n} + \frac{2rz}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn + 2an - \frac{4pr}{nn},$$

nempe,

$$u = a - n \pm \sqrt{\left(-\frac{azx}{n} + \frac{2apz}{n} + \frac{2rz}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - \frac{4pr}{nn} + aa\right)},$$

æquatio ad ellipsira, cujus axes sunt in data ratione, scilicet subduplicata.  
 Tab. XI.  $a$  ad  $n$ . Abscinde igitur BE cujusvis longitudinis, si ellipsis specie data non.  
 Fig. 2. sit; sed ita ut ad  $n$  datam habeat rationem, si ellipsis specie detur, & sem-  
 æqualem arbitrariæ  $a$ ; erit E centrum ellipsios. Pone nunc

$$\sqrt{\left(-\frac{azx}{n} + \frac{2apz}{n} + \frac{2rz}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - \frac{4pr}{nn} + aa\right)} = 0,$$

&amp; invenies

$$z = p + \frac{r}{an} \pm \sqrt{\left(2q + \frac{qq}{an} - \frac{2pr}{an} + an + pp + \frac{rr}{aann}\right)}.$$

Quapropter abscinde FH =  $\frac{r}{an}$ , id est, fac FH ad FI ( $\frac{r}{nn}$ ) ut BC ( $u$ ) ad BE ( $a$ ); & per H age HL ipsi AE parallelam & occurrentem perpendiculari ES in L, erit L centrum ellipsios. Jam

$$\sqrt{\left(2q + \frac{qq}{an} - \frac{2pr}{an} + an + pp + \frac{rr}{aann}\right)} = \sqrt{\left(\left(\frac{q}{\sqrt{an}} + \sqrt{an}\right)^2 + \left(\frac{r}{an} - p\right)^2\right)};$$

& est HG =  $\frac{r}{an} - p$ : restat igitur sumenda HR =  $\frac{q}{\sqrt{an}} + \sqrt{an}$ , id est,

faciendum est HR ad HL ( $\frac{q}{n} + a$ ) ut BD ( $\sqrt{an}$ ) ad BE ( $a$ ): erit GR minor diameter & SG major; siquidem RG<sup>2</sup> ad GS<sup>2</sup>, ut RH<sup>2</sup> ad HL<sup>2</sup> aut AE<sup>2</sup>, ut BD<sup>2</sup> ad BE<sup>2</sup>, ut  $an$  ad  $az$ , ut  $n$  ad  $a$ ; quæ est ipsissima Auctoris constructio.

52. Summissimus  $\frac{nu}{2} = xx - px - \frac{q-nn}{2}$ , quia sic, quadrando, invenimus

mus quantitatem, in qua incognita  $n$  est duarum tantum dimensionum, æqualem totis primo & secundo & parti tertiæ & quarti termini æquationis propositæ; quo pacto computatio facilior redditur. Poterat tamen æquatio cubica proposita multiplicari per  $x + p$ , & tunc habuiffemus.

$$x^3 - \frac{q}{2p} xx - \frac{r}{pq} x - pr = 0,$$

quæ fuisset simplicior; & quæ, premendo eadem vestigia, construi posset per æquationem  $\frac{nn}{2} = xx - \frac{q - nn}{2}$  itidem simpliciore.

§3. Pariter animadverte quod quantitas  $n$  indeterminata relinquatur, quo determinari ita possit ut constructiones peculiare faciliores evadant. Sed hæc quoque constructio potest confici per ellipsim datam & circulum rei statui aptum. Dentur enim axes ellipseos, & dabitur majoris latus rectum; pone minorem axem  $= n$  indeterminatæ, & latus rectum  $= a$  pariter indeterminatæ; sic ellipsis erit data, & circulus, qui in Auctoris constructione positus fuerat datus, aut ad arbitrium determinandus ob indefinitam  $n$ , quæ ingreditur in ejusdem radio, erit determinatus & pendebit a data ellipsi. Item quod æquatio, quam construximus, habet radices quatuor; construenda vero tres. Secunda e quatuor est  $GF$  vel  $p$ , quam quantitatem ipsi  $x$  æqualem fecimus, quando æquationem propositam duximus in  $x - p$ ; qua demta, restant tres illæ quæ quærebantur.

Ceterum quæ monet Auctor de positione linearum & radicum negativarum ac positivarum tendentia, recluso constructionum fonte, ultro patent & sese cuius offerunt.

Lemmaibus & regulis a Viro summo traditis, res minore computatione conficiuntur; sed nescio an sic Algebrae sua servetur elegantia, quæ, ut dicam quod sentio, tota in eo est ut perpauca theoremata sint in auxilium advocanda. Multitudo theorematum methodo Veterum convenit; methodus autem Recentiorum ideo inventa mihi videtur, ut paucis & facillimis principiis problemata solvi possint & construi; idcirco, ut constructionum harum fontes aperirem, laboravi.

§4. Constructio quoque N<sup>o</sup>. LIX. pag. 259. hujus, facile deducitur ex principiis nostris. Æquatio

$$2nn - 2an + nn = -\frac{4nxx}{n} + \frac{4apx}{n} + \frac{4rx}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn + 2an - \frac{4pr}{nn}$$

est ad ellipsim, quia termini  $nn$ ,  $\frac{4nxx}{n}$  utrinque ab æqualitatis signo positi, habent signa contraria: ut ea sit ad hyperbolam, debent eadem signa habere; muta igitur omnes  $-a$  in  $+a$ , & idcirco etiam omnes  $+a$  in  $-a$ ; aut, quod eodem recidit, æquationem, quam supra duximus in  $2n - 2a$ , ducamus in  $2n + 2a$ , & habebimus

$$2nn + 2an + nn = \frac{4axx}{n} - \frac{4apx}{n} + \frac{4rx}{nn} - \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn - 2an - \frac{4pr}{nn},$$

five (pro  $2x$  reponendo  $z$ , & ordinando)

$$zz = 2px - \frac{2xz}{an} + 2q - \frac{qq}{an} + \frac{n^3}{a} + 2nn + \frac{4pr}{an} + \frac{2nnn}{an} + 2nu + \frac{nnu}{a},$$

&c

$$z = p - \frac{r}{an} \pm \sqrt{(pp + \frac{2pr}{an} + \frac{rr}{aann} + 2q - \frac{qq}{an} + \frac{n^3}{a} + 2nn + \frac{2nnn}{a} + 2nu + \frac{nnu}{a})}.$$

Posita ergo superiore circuli constructione, quia circulus idem est, in AI  
Tab. a. cape, ut jubet Auctor, ex F versus A rectam FH =  $\frac{r}{an}$ ; & erit AH = p  
Fig. 3.

—  $\frac{r}{an}$ ; & per H age HL indefinitam ipsi AD parallelam, & hyperbolæ  
diameter jacebit in HL. Nunc, ubi ordinata nulla est, ibi est figuræ ver-  
tex; pone igitur

$$\sqrt{(pp + \frac{2pr}{an} + \frac{rr}{aann} + 2q - \frac{qq}{an} + \frac{n^3}{a} + 2nn + \frac{2nnn}{a} + 2nu + \frac{nnu}{a})} = 0,$$

&c habebis, quadrando & ordinando,

$$nn = -2nn - 2au - 2an - nn + \frac{qq}{nn} - \frac{2aq}{n} - \frac{rr}{an^3} - \frac{2pr}{nn} - \frac{app}{n},$$

&c

$$u = -n - a \pm \sqrt{(\frac{qq}{nn} - \frac{2aq}{n} - \frac{rr}{an^3} - \frac{2pr}{nn} - \frac{app}{n} + aa)}.$$

Jam est CB = —  $n$ : sume igitur BE ex B versus A = —  $a$ : ex E de-  
mitte perpendicularem EL; eritque L hyperbolæ centrum, & ejus major  
axis dimidiatus erit quantitas radicalis supra inventa. Debet autem quadra-  
tum dimidii axis majoris ad quadratum dimidii minoris M esse ut  $a$  ad  $n$ ; ergo

$$MM = \frac{qq}{an} - 2q - \frac{rr}{an} - \frac{2pr}{an} - pp + an = (\sqrt{an} - \frac{q}{\sqrt{an}} - \frac{r}{an} - p) \text{ in} \\ (\sqrt{an} - q + \frac{r}{an} + p),$$

& est quadratum dimidii minoris axis æquale rectangulo ex partibus ordinatæ

tae ab asymptoto ad curvam & a curva ad asymptotum; atque est  $GF + FH = p + \frac{r}{an}$ ; quapropter inter CB & BE sume mediam  $AD = \sqrt{an}$ , & abscinde hinc inde a puncto H rectas HR, HR singulas æquales  $\sqrt{an} - q$ , faciendo nempe HR ad HL ( $EB - BA = a - \frac{q}{n}$ ) ut DA ( $\sqrt{an}$ ) ad BE (a): & erunt RL, LR asymptoti, atque hyperbola transibit per punctum G. Hic repete quæ constructioni per ellipsin adjuncta sunt.

55. Pro parabola assumes æquationem  $nn = 2xx - 2px - q - mn$ , id est, assumptam ducēs in 1; quia tunc nullum debet esse quadratum alterius incognitæ sub signo radicali, & omnes termini ducti in  $a$  debent evanescere. In hac æquatione si ponas  $x = 0$ , erit  $u = -\frac{q}{n} - n$ , id est, parabola transibit per punctum A; & si singas  $x = p$ , erit iterum  $u = -\frac{q}{n} - n$ , & parabola transibit per H, unde patet ejus axem esse rectam Ff, quod etiam sic perspicui potest. Est

$$xx = px + \frac{q + mn + nn}{2}$$

Ergo

$$x = \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(pp + 2q + 2nn + 4nn)},$$

quod monstrat esse Ff axem. Ubi nunc ordinata nulla est, habetur

$$u = -\frac{q}{n} - n - \frac{pp}{2n}.$$

Sumi igitur debet in fF ex f versus F recta æqualis  $\frac{q}{n} + n + \frac{pp}{2n}$  aut ultra F recta par  $\frac{pp}{2n}$ ; quare  $p$  est ordinata ad parabolam.

56. Supra monstravimus quomodo, data æquatione quadrato-quadratica, una determinatos & alia indeterminata ad ellipsim, hyperbolam, aut parabolam datam, inveniatur circulus, qui suis cum data curva intersectionibus, exhibeat radices æquationis propositæ. Sed, ut explicemus elegantissimam Auctoris methodum, quæ habetur N<sup>o</sup>. LIII. pag. 210. hujus, sequentia lemmata præmittenda sunt.

Sit ellipsis aut hyperbola AM, cujus latus transversum sit AH, rectum AG; Tab. 4. & in latere transverso duo sumantur puncta L & a, & fiat ut LA ad La, sic Fig. 4. c. LH ad Lh; atque ut AH ad AG, sic ah ad ag; & latere transverso ha, recto ag, describatur ellipsis altera aut hyperbola am, & harum familia latera transver-

sa sint  $AH$ ;  $ah$ , id est harum ordinatæ sint parallele: dico quod quævis recta  $LM$ , occurrens duabus sectionibus in punctis  $M$  &  $m$ , ibi secatur in ratione  $AL$  ad  $La$ ; & contra &c.

Centrum figuræ  $AM$  sit  $C$ ; & figuræ  $am$  sit  $c$ . Quoniam  $LA$  ad  $La$  est ut  $HL$  ad  $Lh$ , erit etiam  $AL$  ad  $La$ , (vel  $HL$  ad  $Lh$ ), ut  $AH$  ad  $ah$ ; vel ut  $CA$  ad  $ca$ , ut  $AG$  ad  $ag$ .

Nunc a punctis  $M$ ;  $m$ ; agantur ordinatæ parallele  $MP$ ;  $mp$ ; & jungantur  $HG$ ;  $hg$ ; occurrentes  $PM$  in  $N$ ; &  $pm$  in  $n$ . Quoniam sunt in eadem ratione  $HA$  ad  $AG$ ;  $HP$  ad  $PN$ ;  $ha$  ad  $ag$ ;  $hp$  ad  $pn$ ; erunt & reliquæ  $AP$ ;  $ap$ ; in eadem ratione  $AG$  ad  $ag$ , vel  $AH$  ad  $ah$ , aut  $AC$  ad  $ac$ . Igitur rectangula  $APH$ ;  $aph$ , sunt similia & ut quadrata  $AG$ ;  $ag$ ; vel  $AC$ ;  $ac$ . Est autem rectangulum  $APH$  ad rectangulum  $APN$  ut  $HP$  ad  $PN$ ; ut  $HA$  ad  $AG$ ; ut  $ha$  ad  $ag$ ; ut  $hp$  ad  $pn$ ; ut rectangulum  $hpa$  ad rectangulum  $npa$ ; & rectangulum  $APN$  æquale est quadrato  $PM$ , ac rectangulum  $apn$  quadrato  $pm$ : ergo quadrata  $PM$ ;  $pm$  sunt ut rectangula  $APH$ ;  $aph$ ; ut quadrata  $AC$ ;  $ac$ . Sed quadrata eadem  $PM$ ;  $pm$ , sunt ut quadrata  $PL$ ;  $Lp$ . Ergo rectæ  $AC$ ;  $ac$ , vel  $AH$ ;  $ah$ , sunt ut rectæ  $PL$ ;  $Lp$ , aut  $ML$ ;  $Lm$ . Q. E. D.

Pro conversa. Non sit punctum  $m$  in figura  $am$ , sed punctum  $O$ . Erit ergo  $AH$  ad  $ah$  ut  $ML$  ad  $LO$ ; sed, per hypothesim, ut  $AH$  ad  $ah$ , ita  $ML$  ad  $Lm$ ; ergo  $ML$  ad  $Lm$ , ut  $ML$  ad  $LO$ ; æquales itaque sunt  $Lm$  &  $LO$ .

Sequentia facile ad hyperbolam transferuntur, ideo figuram hyperbolæ omisi.   
 Tab. 6. 67. Si, positis quæ supra, in recta  $LM$  sumatur quodvis punctum  $K$ , & fiat  $GL$  ad  $Lq$  ut  $KL$  ad  $Lk$ : dico quod, si punctum  $k$  fuerit intra aut extra curvam  $AM$ , erit etiam punctum  $k$  pariter intra aut extra curvam  $am$ .

Nam, quia  $GL$  ad  $Lq$  est ut  $ML$  ad  $Lm$ , id est, per hypothesim, ut  $KL$  ad  $Lk$ ; erit alternando  $ML$  ad  $LK$  ut  $Lm$  ad  $Lk$ ; ergo, si  $ML$  major aut minor est quam  $LK$ , erit pariter  $Lm$  major aut minor quam  $Lk$ .

58. Junctæ  $GK$ ,  $gk$  sunt parallele.

59. Si centro  $K$ , radio  $KG$  describatur circulus occurrens rectæ  $KL$  in  $P$ ; & centro  $k$  radio  $kg$  describatur alter circulus occurrens rectæ eidem in  $p$ , erit  $LP$  major  $Lp$ .

Nam  $KL$  ad  $Lk$  ut  $KG$  ad  $kg$ , vel ut  $KP$  ad  $kp$ ; ergo  $KL$  ad  $Lk$  ut  $PL$  ad  $Lp$ : sed est  $KL$  major quam  $Lk$ , ergo  $PL$  major  $Lp$ .

60. Si circulus  $gy$  ellipsi occurrat in altero quovis puncto  $\gamma$ , & jungatur  $Ly$ : dico hanc productam donec ellipsi occurrat in  $T$ , illi occurrere in puncto, ubi circulus  $GP$  ellipsim majorem secat.

Junge  $ky$ ,  $KY$ . Est, ut  $KL$  ad  $Lk$  ita  $YL$  ad  $Ly$ : erunt itaque parallele rectæ  $ky$ ,  $KY$ . Igitur  $KL$  ad  $Lk$  ut  $KY$  ad  $ky$ : sed ut  $KL$  ad  $Lk$  ita  $KG$  ad  $kg$ ; ergo  $KY$  ad  $ky$  ut  $KG$  ad  $kg$ ; æquales autem sunt  $gk$ ,  $ky$ , ergo &  $GK$ ,  $KY$ , quapropter punctum  $Y$  est ad circulum  $GP$ , & ad ellipsin.

61. Igitur ductæ ad rectos angulos  $Yt$ ,  $\gamma T$  sunt ut  $GL$  ad  $Lg$ . Sed erat  $YX$  (posita Auctoris constructione) dupla radix; igitur, ubi habetur  $X\gamma$ , ut obtineatur  $XY$ , fieri debet  $\gamma T$  ad  $tY$  ut  $gL$  ad  $LG$ .

Solutio æquationum per approximationem satis accurata & facilis habetur in Additamento. Nonnulla quidem afferri possent; sed ea omitto ne liber nimis excrescat.

Ad-



ADDITAMENTUM

VEL DE

SOLUTIONE

ET

CONSTRUCTIONE

ÆQUATIONUM &c.

SCRIPTA VARIA

EX TRANSACTIONIBUS PHILOSOPHICIS

ET ALIUNDE

EXCERPTA.

ADDITAMENTUM

EXPLICIT

CONSTRUCTIONE

EXPLICIT

EXPLICIT

EXPLICIT

EXPLICIT

EXPLICIT

# ADDITAMENTUM.

## METHODUS NOVA

*accurata & facilis inveniendi radices æquationum quarumcunque generaliter, sine prævia reductione. Per Edm. Halley, Geom. Prof. Savil.*

**A**RTIS analyticae præcipuus quidem usus est problemata mathematica ad æquationes perducere, easque terminis, quantum fieri possit, simplicissimis exhibere. Ars autem ista manca quodammodo, nec satis analytica merito videretur, nisi methodi quædam subministrarentur, quarum ope radices, sive lineæ sive numeri sint, ex jam inventis æquationibus elicere liceret, eoque nomine problemata soluta dare.

Veteribus sane vix quicquam supra quadraticarum æquationum naturam innotuit; quæcunque vero scripsere de solidorum problematum effectione geometrica ope parabolæ, cissoidis, aliæve curvæ, particularia tantum sunt, ac casibus particularibus destinata; de numerica vero extractione ubique altum silentium; ita ut quicquid in hoc genere jam calculo præstamus, modernorum inventis fere totum debeatur.

Ac primus quidem ingens ille Algebrae hodiernæ repertor ac restaurator *Franciscus Vieta*, annis abhinc circiter centum, methodum generalem aperuit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet; eamque sub titulo *De numerosa potestatum ad exegefin resolutione*, publico donavit, ubique, ut ait, *observando retrogradam compositionis viam*. Hujusque vestigiis insistentes *Harriottus*, *Oughtredus* aliique, tam nostrates quam extranei, quæcunque de hac re scriptis mandarunt, a *Vieta* desumpta debent agnoscere. Quælia vero in hoc negotio præstiterit sagacissima ingenii *Newtoniani* vis, ex contractiore specimine a Clarissimo *Walliso*, Cap. xciv. algebrae suæ, edito, potius conjectura assequi quam pro certo comperiri licet. Ac dum obstinata Authoris modestia amicorum precibus devicta cedat, inventaque hæc sua pulcherrima in lucem promere dignetur, expectare cogimur.

Nuper vero eximius ille juvenis *D. Josephus Raphson*, *R. S. S. analyfin æquationum universalem* anno 1690. evulgavit, suæque methodi præstantiam pluribus exemplis abunde illustravit; quo genii mathematici maxima quæque pollicentis nobile indicium prodidit.

Hujus exemplo ac ductu (ut par est credere) *D. de Lagny*, haud vulgaris apud *Parisienses* Mathematicum Professor, idem argumentum aggressus est; qui cum totus fere sit in eliciendis potestatum purarum radicibus, præsertim cubica, pauca tantum, eaque perplexa nec satis demonstrata, de affectarum radicum extractione subjungit. Regulas autem binas, compendiosas admodum, pro approximatione radicis cubicæ profert, alteram rationalem, alteram irrationalem; nempe cubi  $aaa + b$  latus esse inter

$$a + \frac{ab}{3aaa + b} \text{ ac } \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}\right) + \frac{1}{2}a}$$

Radicem autem potestatis quintæ  $a^5 + b$  sic exprimit

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}}\right) - \frac{1}{4}aa}$$

(non  $\frac{1}{2}aa$  ut perperam legitur in libro gallico impresso.) Has regulas, cum nondum librum videram, ab amico communicatas habui, quarum vires experimento edoctus, compendiumque admiratus, volui etiam demonstrationem investigare. Ea vero inventa, ad universalem æquationum omnium resolutionem eandem methodum accommodari posse statim cognovi; eoque magis eas excolere statui, quia uno intuitu rem totam synoptice explicari posse videbam, quodque hoc pacto singulis calculi restaurati vicibus saltem triplicarentur notæ sive ciphæ in radice jam inventæ, quæ quidem omnibus aliorum omnium computationibus non nisi pari cum datis numero augentur.

Demonstrantur autem regulæ prædictæ ex genesi cubi & potestatis quintæ. Posito enim latere cubi cujusque  $a + e$ , cubus inde conflatus sit

$$aaa + 3aae + 3aee + eee,$$

adeoque si supponatur  $aaa$  numerus cubus proxime minor dato quovis non cubo,  $eee$  minor erit unitate, ac residuum, sive  $b$ , æquabitur reliquis cubi membris.

$$3aae + 3aee + eee:$$

rejectoque  $eee$  ob parvitatem,

$$b = 3aae + 3aee.$$

Cumque  $aae$  multo majus sit quam  $aee$ ,  $\frac{b}{3aa}$  non multum excedet ipsam  $e$ : positoque

$$e =$$

$$e = \frac{b}{3aa}, \frac{b}{3aa + 3ae},$$

cui proxime æquatur quantitas  $e$ , invenietur

$$\frac{b}{3aa} + \frac{3ab}{3aa} \text{ five } \frac{b}{3aa} + \frac{b}{a}$$

hoc est

$$\frac{ab}{3aaa + b} = e,$$

adeoque latus cubi

$$aaa + b \text{ habebitur } a + \frac{ab}{3aaa + b}$$

quæ est ipsa formula rationalis *Dni de Lagny*. Quod si  $aaa$  fuerit numerus cubus proxime major dato, latus cubi  $aaa - b$  pari ratiocinio invenietur  $a - \frac{ab}{3aaa - b}$ ; atque hæc radicis cubicæ approximatio satis expedita ac facilis, parum admodum fallit in defectu, cum scilicet  $e$ , residuum radicis hoc pacto inventum, paulo minus iusto sit. Irrationalis vero formula etiam ex eodem fonte derivatur, videlicet

$$b = 3aae + 3ace, \text{ five } \frac{b}{3a} = ae + ce;$$

adeoque

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}\right)} = \frac{1}{2}a + e,$$

atque

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}\right)} + \frac{1}{2}a = a + e,$$

sive radici quæsitæ. Latus vero cubi  $aaa - b$  eodem modo habebitur

$$\frac{1}{2}a + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}\right)}$$

Atque hæc quidem formula aliquanto propius ad scopum collimat, in excessu peccans sicut altera in defectu, ac ad praxin magis commoda videtur, cum restitutio calculi nihil aliud sit quam continua additio vel subductio ipsius  $\frac{eee}{3a}$ , secundum ac quantitas  $e$  innotescat; ita ut potius scribendum sit

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{b - eee}{3a}\right) + \frac{1}{2}a}$$

in priori casu, ac in posteriori

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{eee - b}{3a}\right)}$$

Utraque autem formula ciphrae jam cognitæ in radice extrahenda ad minimum triplicantur, quod quidem arithmetice studiosis omnibus gratum fore confido, atque ipse inventori abunde gratulor.

Ut autem harum regularum utilitas melius sentiat, exemplum unum vel alterum adjungere placuit. Quærat latus cubi dupli, sive  $aaa + b = 2$ . Hic  $a = 1$  atque  $\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$ , adeoque  $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$  sive 1,26 invenietur latus prope verum. Cubus autem ex 1,26 est 2,000376, adeoque

$$0,63 + \sqrt{(3969 - \frac{2000376}{378})}$$

five

$$0,63 + \sqrt{(3968005291005291)} = 1,259921049895 - ;$$

quod quidem tredecim figuris latus cubi dupli exhibet, nullo fere negotio, videlicet, una divisione & lateris quadrati extractione, ubi vulgari operandi modo quantum defudasset arithmeticus norunt experti. Hunc etiam calculum quousque velis continuare licet, augendo quadratum additione,  $\frac{eee}{3a}$ .

Quæ quidem correctio hoc in casu non nisi unitatis in radicis figura decima-quarta augmentum affert.

*Exemp. II.* Quærat latus cubi æqualis mensuræ *Anglicæ*, Gallon dictæ, uncias solidas 231 continentis. Cubus proxime minor est 216 cujus latus  $6 = a$ , ac residuum  $15 = b$  adeoque pro prima approximatione provenit

$$3 + \sqrt{9 + \frac{r}{6}} = \text{radici.}$$

Cum

Cumque  $V(9,83333\dots)$  sit  $3,1358\dots$  patet  $6,1358 = a + e$ . Supponatur jam  $6,1358 = a$ , & habebimus cubum ejus

$$231,000853894712,$$

ac juxta regulam

$$3,0679 + V(9,41201041 - \frac{,000853894712}{18,4074})$$

æquatur accuratissime lateri cubi dati, id quod intra horæ spatium calculo obtinui

$$6,13579243966195897,$$

in octodecima figura justum, at deficiens in decima nona. Hæc vero formula merito præferenda est rationali ob ingentem divisorem, non sine magno labore tractandum; cum lateris quadrati extractio multo facilius procedat, ut experientia multiplex me docuit.

Regula autem pro radice sursolidi puri, sive potestatis quintæ, paulo altioris indaginis est, atque etiam adhuc multo perfectius rem præstat: datas enim in radice ciphras ad minimum quintuplicat, neque etiam multum nec operosi est calculi. Author autem nullibi inveniendi methodum ejusve demonstrationem concedit, etiam si maxime desiderari videatur: præsertim cum in libro impresso non recte se habeat; id quod imperitos facile illudere possit. Potestas autem quinta lateris  $a + e$  conficitur ex his membris

$$a^5 + 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4 + e^5 = a^5 + b,$$

unde

$$b = 5a^4e + 10a^3e^2 + 10a^2e^3 + 5ae^4,$$

rejectione  $e^5$  ob parvitatem suam: quo circa

$$\frac{b}{5a} = a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4,$$

atque utrinque addendo  $\frac{1}{4}a^4$  habebimus

$$V\left(\frac{1}{4}aaaa + \frac{b}{5a}\right) = V\left(\frac{1}{4}a^4 + a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4\right) = \frac{1}{2}aa + ae + ee.$$

Dein utrinque subducendo  $\frac{1}{4}aa$ ,

$$\frac{1}{2}a + e \text{ æquabitur } \sqrt{V(\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{fa}) - \frac{1}{4}aa}$$

cui si addatur  $\frac{1}{2}a$ , erit

$$a + e = \frac{1}{2}a + \sqrt{V(\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{fa}) - \frac{1}{4}aa}$$

æqualis radici potestatis  $a^5 + b$ . Quod si fuisset  $a^5 - b$ , (assumpta  $a$  justo majore,) regula sic se haberet,

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{V(\frac{1}{4}a^4 - \frac{b}{fa}) - \frac{1}{4}aa}.$$

Atque hæc regula mirum in modum approximât, ut vix restitutione opus sit; at dum hæc mecum pensitavi, incidi in formularum methodum, quandam generalem pro quavis potestate satis concinnam, quamque celare nequeo; cum etiam in superioribus potestatibus datas radices figuras triplicare valeant.

Hæ autem formulæ ita se habent, tam rationales quam irracionales.

$$\sqrt{aa + b} = \sqrt{aa + b} \text{ vel } a + \frac{ab}{2aa + \frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{V(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a})} \text{ vel } a + \frac{ab}{3aa + b}$$

$$\sqrt[4]{a^4 + b} = \frac{2}{3}a + \sqrt{V(\frac{1}{9}aa + \frac{b}{6aa})} \text{ vel } a + \frac{ab}{4a^4 + \frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5 + b} = \frac{3}{4}a + \sqrt{V(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10aa})} \text{ vel } a + \frac{ab}{5a^5 + 2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6 + b} = \frac{4}{5}a + \sqrt{V(\frac{1}{25}aa + \frac{b}{15aa})} \text{ vel } a + \frac{ab}{6a^6 + \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7 + b} = \frac{5}{6}a + \sqrt{V(\frac{1}{36}aa + \frac{b}{21aa})} \text{ vel } a + \frac{ab}{7a^7 + 3b}$$

Et sic de ceteris etiam adhuc superioribus. Quod si assumeretur  $a$  radice quæ-



quæ sita major; (quod cum fructu sit quoties potestas resolvenda multo propior sit potestati numeri integri proxime majoris quam proxime minoris,) mutatis mutandis eadem radicum expressiones proveniunt.

$$\sqrt[1]{aa - b} = \sqrt[1]{(aa - b)} \text{ vel } a - \frac{ab}{2a - \frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{aaa - b} = \frac{1}{2}a + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}\right)} \text{ vel } a - \frac{ab}{3aaa - b}$$

$$\sqrt[4]{a^4 - b} = \frac{2}{3}a + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{9}aa - \frac{b}{6aa}\right)} \text{ vel } a - \frac{ab}{4a^4 - \frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5 - b} = \frac{3}{4}a + \sqrt[5]{\left(\frac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}\right)} \text{ vel } a - \frac{ab}{5a^5 - 2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6 - b} = \frac{4}{5}a + \sqrt[6]{\left(\frac{1}{25}aa - \frac{b}{15a^4}\right)} \text{ vel } a - \frac{ab}{6a^6 - \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7 - b} = \frac{5}{6}a + \sqrt[7]{\left(\frac{1}{36}aa - \frac{b}{21a^5}\right)} \text{ vel } a - \frac{ab}{7a^7 - 3b}$$

Atque inter hos duos terminos semper consistit vera radix, aliquanto propior irrationali quam rationali; *e* vero juxta formulam irrationalem inventa, semper peccat in excessu, sicut in defectu a rationali formula resultans quotus; adeoque si fuerit  $+b$ , irrationalis majorem justo exhibet radicem, rationalis minorem. E contrario vero si fuerit  $-b$ . Atque hæc de eliciendis radicibus *e* potestatibus puris dicta sunt, quæ quidem, ad usus ordinariorum sufficientes, multo facilius habentur ope logarithmorum: quoties vero ultra tabularum logarithmicarum vires accuratissime definienda est radix, ad hujusmodi methodos necessario recurrendum est. Præterea, cum ex harum formularum inventionem ac contemplationem, universalis regula pro æquationibus affectis (quam non sine fructu Geometrix ac Algebrae studiosis omnibus usurpandam confido) mihi ipsi oblata sit, volui ipsius inventi primordia qua possim claritate aperire.

Æquationum quidem affectarum quadrato-quadratum non excedentium constructionem generalem concinnam admodum ac facilem, Num. 188. harum *Transact.* jam tum inventam publici juris feci: ex quo ingens cupidus animum incescit idem numeris efficiendi. Atque brevi post *D<sup>ns</sup> Raphson* magna ex parte voto satisfecisse vitus est, usque dum *D<sup>ns</sup> de Lagny* etiam ad-

adhuc compendiosius rem peragi posse hoc suo libello mihi suggestit. Methodus autem nostra hæc est.

Supponatur radix cujuscvis æquationis  $z$  composita ex partibus  $a +$  vel  $-e$ , quarum  $a$  ex hypothesi assumatur ipsi  $z$  quantum fieri possit propinqua, (quod tamen commodum est, non necessarium) & ex quantitate  $a +$  vel  $-e$  formentur potestates omnes ipsius  $z$  in æquatione inventæ, iisque assignantur numeri coefficientes respective: deinde potestas resolvenda subducatur e summa partium datarum in prima columna, ubi  $e$  non reperitur, quam homogeneum comparationis vocant, sique differentia  $\pm b$ . Dein habeatur summa omnium coefficientium ipsius lateris  $e$  in secunda columna, quæ sit  $s$ ; denique in tertia addantur omnes coefficientes quadrati  $ee$ , quarum summam vocemus  $t$ . Ac radix quæ sita  $z$ , formula rationali habebitur

$$a + \text{vel} - \frac{sb}{ss + \text{vel} - tb}:$$

irrationali vero fiet

$$z = a \pm \frac{\frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}ss + bt}}{s}$$

id quod exemplis illustrare fortasse operæ pretium erit. Instrumenti vero loco adsit tabella, potestatum omnium ipsius  $a +$  vel  $-e$  generis exhibens, quæ si opus fuerit, continuari facile possit. A septima vero incipiam, cum pauca problemata consueque assurgere deprehendantur. Hanc tabellam jure optimo *speculum analyticum generale* appellare licet. Potestates autem prædictæ ex continua multiplicatione per  $a + e = z$  ortæ, sic procedunt cum suis coefficientibus adjunctis.

### Tabella Potestatum.

$$\begin{aligned} 1z^7 &= 1a^7 + 71a^6e + 211a^5ee + 351a^4e^3 + 351a^3e^4 + 211a^2e^5 + 71ae^6 + 1e^7 \\ kz^6 &= ka^6 + 6ka^5e + 15ka^4ee + 20ka^3e^3 + 15ka^2e^4 + 6kae^5 + ke^6 \\ hz^5 &= ha^5 + 5ha^4e + 10ha^3ee + 10ha^2e^3 + 5hae^4 + he^5 \\ gz^4 &= ga^4 + 4ga^3e + 6ga^2ee + 4gae^3 + ge^4 \\ fz^3 &= fa^3 + 3fa^2e + 3faee + fe^3 \\ dz^2 &= da^2 + 2dae + de^2 \\ ez &= ea + e^2 \end{aligned}$$

Quod si fuerit  $a - e = z$ , ex iisdem membris conficitur tabella, negatis solummodo imparibus potestatibus ipsius  $e$ , ut  $e$ ,  $e^3$ ,  $e^5$ ,  $e^7$ : & affirmatis paribus  $e^2$ ,  $e^4$ ,  $e^6$ . Sitque summa coefficientium lateris  $e = s$ ; summa

ma coefficientium quadrati  $ee = s$ ; cubi  $= u$ ; biquadrati  $= w$ ; surfoli-  
di  $e^4 = x$ ; summa vero coefficientium cubo-cubi  $= y$ ; &c.

Cum autem supponatur  $e$  exigua tantum pars radices inquirendæ, omnes  
potestates ipsius  $e$  multo minores evadunt similibus ipsius  $a$  potestatibus,  
adeoque pro prima hypothefi rejiciantur superiores, (ut in potestatibus  
puris ostensum est) ac formata æquatione nova, substituendo  $a \pm e = z$  ha-  
beamus, ut diximus,

$$\pm b = \pm se \pm tee.$$

Cujus rei cape exempla sequentia, quo melius intelligatur.

Exemp. I. Proponatur æquatio

$$x^4 - 3zx + 75z = 10000.$$

Pro prima hypothefi ponatur  $a = 10$ , ac consequenter prodibit æquatio,

$$\begin{array}{rcl} z^4 & = & + a^4 \dots 4a^3e + 6a^2ee \dots 4ae^3 + e^4 \\ - dz & = & - da^3 \dots 2da^2e - d^2ee \\ + ex & = & + ea^3 \dots ee \\ = & + & 10000 \dots 4000e + 600ee \dots 40e^3 + e^4 \\ & - & 300 \dots 60e - 3ee \\ & + & 750 \dots 75e \\ & - & 10000 \\ \hline & + & 450 - 4015e + 597ee - 40e^3 + e^4 = 0. \end{array}$$

Signis  $+$  ac  $-$  (respectu  $e$  ac  $e^2$ ) in dubio relictis, usque dum sciatur  
an  $e$  sit negativa vel affirmativa; quod quidem aliquam parit difficultatem,  
cum in æquationibus plures radices admittentibus, sæpe augeantur homo-  
genea comparationis, ut appellant, a minuta quantitate  $a$ , ac  $e$  contra ea  
aucta minuantur. Determinatur autem signum ipsius  $e$  ex signo quantita-  
tis  $b$ ; sublata enim resolvenda ex homogeneo ab  $a$  formato, signum ip-  
sius  $se$ , ac proinde partium in ejus compositione prævalentium, semper  
contrarium erit signo differentię  $b$ . Unde patebit an fuerit  $-e$  vel  $+e$ ,  
sive an  $a$  major vel minor radice vera assumpta sit. Ipsa autem  $e$  semper

$$\text{æquatur } \frac{\frac{1}{2}s - V(\frac{1}{4}ss - bt)}{s}, \text{ quoties } b \text{ ac } s \text{ eodem signo notantur;}$$

$$\text{quoties vero diverso signo connectuntur, eadem e sit } \frac{V(\frac{1}{4}ss + bt) - \frac{1}{2}s}{s}.$$

Postquam vero compertum sit fore  $-e$ , in affirmatis æquatio-  
nis

Tom. II.

nis membris negentur  $e$ ,  $e^3$ ,  $e^5$ , &c. in negatis affirmentur; scribantur scilicet signo contrario; si vero fuerit  $+e$ , affirmentur in affirmatis, negentur in negatis. Habemus autem in hoc nostro exemplo 10450 loco resolvendæ 10000, sive  $b = +450$ , unde constat  $a$  majorem justo assumptam, ac proinde haberi— $e$ : Hinc æquatio fit

$$10450 - 4015e + 597ee - 40e^3 + e^5 = 10000.$$

Hoc est

$$450 - 4015e + 597ee = 0.$$

Adcoque

$$450 = 4015e - 597ee$$

Sive

$$b = se - tee$$

cujus radix  $e$  fit  $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\left(\frac{1}{4}ss - bt\right)}}{t}$ . Vel si mavis  $\frac{s}{2t} - \sqrt{\left(\frac{ss}{4t^2} - \frac{b}{t}\right)}$ ,

id est, in præsentī casu,

$$e = \frac{2007\frac{1}{2} - \sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597},$$

unde provenit radix quæsitā prope verum, 9,886. Hoc vero pro secunda hypothefi substituto, emergit  $a+e = z$  accuratissime 9,8862603936495...., in

ultima figura vix binario justum superans; nempe cum  $\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}ss + bt\right)} - \frac{1}{2}s}{t} = e$ .

Atque hoc etiam, si opus fuerit, multo ulterius verificari posset, subducen-

do  $\frac{\frac{1}{2}ue^3 + \frac{1}{2}e^5}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}ss + tb\right)}}$  si fuerit  $+e$ , vel addendo  $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^5}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}ss - tb\right)}}$  radici prius in-

ventæ, si sit  $-e$ . Cujus compendium eo plurius æstimandum quod quandoque, ex sola prima suppositione, semper vero ex secunda, iisdem conservatis coefficientibus, quousque velis calculum continuare possis. Ceterum æquatio prædicta etiam negativam habet radicem, id est.  $x = 10,26$ .... quam cuilibet accuratius expiscari licet.

Exempl.

Exempl. II. Sit

$$z^3 - 172z + 543 = 350$$

ac ponatur  $a = 10$ . Ex præscripto regulæ,

$$zzz = aaa + 3aac + 3ace + ccc$$

$$- dzz = daa - 2dae - dece$$

$$+ cz = c a + c e$$

$$\begin{array}{r} \text{Id est} \\ + 1000 + 300e + 30ee + ccc \\ - 1700 - 340e - 17ce \\ + 540 + 54e \\ - 350 \end{array}$$

$$\text{Sive} - 510 + 14e + 13ee + ccc = 0.$$

Cum autem habeatur  $- 510$ , constat  $a$  minorem justo assumi, ac proinde  $c$  affirmativam esse, ac ex  $510 = 14e + 13ee$  fit

$$\frac{V(bt + \frac{1}{4}ss) - \frac{1}{2}s}{t} = e = \frac{V6679 - 7}{13},$$

unde  $z$  fit 15,7... quæ nimia quidem est ob late sumptam  $a$ , ideo supponatur secundo  $a = 15$ , ac pari ratiocinio habebimus

$$e = \frac{\frac{1}{2}s - V(\frac{1}{4}ss - tb)}{t} = \frac{109\frac{1}{2} - V11710\frac{1}{4}}{28}$$

ac proinde  $z = 14,954068$ . Quod si calculum adhuc tertio restaurare velis, usque in vigesimam quintam figuram vero conformem invenies radicem. Paucioribus vero contentus, scribendo  $tb \pm tece$  loco  $tb$ , vel subtrahendo

aut addendo radici prius inventæ  $\frac{\frac{1}{2}ccc}{V(\frac{1}{4}ss \mp tb)}$  ad scopum statim perve-

nies. Æquatio vero proposita nulla alia radice explicari potest, quia potestas resolvenda 350 major est cubo ex  $\frac{17}{3}$  vel  $\frac{1}{3}d$ .

Exempl. III. Sit æquatio illa quam in resolutione difficillimi problematis arithmetici adhibet Clarissimus Wallisus, Cap. LXII. Algebræ suæ, quo radicem Vietae methodo accuratissime quidem affectus est: eandemque exemplum methodi suæ affert laudatus Dns Raphson pag. 25, 26. nempe

b 2

z 4

$$z^4 - 80z^3 + 1998z^2 - 14937z + 5000 = 0.$$

Hæc autem æquatio ejus formulæ est, ut plures habeat radices affirmativas, ac quod difficultatem ejus augeat, prægrandes sunt coefficientes respectu resolvendæ datæ. Quo melius autem tractetur, dividatur, ac juxta notas punctationum regulas ponatur

$$- z^4 + 8z^3 - 20z^2 + 15z = 0,5$$

(ubi  $z$  est  $\frac{1}{10}z$  in æquatione proposita) ac pro prima hypothefi habeamus.  
 $a = 1$ . Proinde

$$+ 2 - 5e - 2ee + 4e^3 - e^4 = 0,5 = 0.$$

Hoc est  $1 - \frac{1}{2} = 5e + 2ee$ ; hinc

$$\frac{\sqrt{(\frac{1}{4}ss + bt) - \frac{1}{2}s}}{s} = e \text{ fit } \frac{\sqrt{37 - 5}}{4}$$

adeoque  $z = 1,27$ : Unde constat 12,7 radicem esse æquationis propositæ vero vicinam. Secundo loco supponatur  $z = 12,7$  ac juxta præscriptum tabellæ potestatum oritur

$$\begin{array}{r} \text{--- } 26014,4641 \text{ --- } 8193,532e \text{ --- } 697,74ee \text{ --- } 50,8e^3 \text{ --- } e^4 \\ + 163870,640 \text{ + } 38709,60 e \text{ + } 3048 \text{ } ee \text{ + } 80 e^3 \\ \text{--- } 322257,42 \text{ --- } 50749,2 e \text{ --- } 1998 \text{ } ee \\ + 189699,9 \text{ + } 14937 e \\ \text{--- } 5000 \end{array}$$

$$+ 298,6559 - 5296,132e + 82,26ee + 29,2e^3 - e^4 = 0.$$

Adeoque

$$- 298,6559 = - 5296,132e + 82,26ee,$$

$$\text{cujus radix } e \text{ juxta regulam} = \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}ss - bt)}}{s} \text{ fit}$$

$$\frac{2648,066 - \sqrt{6987686,106022}}{82,26} = 0,5644080331 \dots = e$$

minori vero. Ut autem corrigatur,

$$\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{V(\frac{1}{4}ss - bt)} \text{ five } \frac{.0026201 \dots}{2643,423 \dots} \text{ fit } .0000099117,$$

ac proinde  $e$  correctæ = ,05644179448.

Quod si adhuc plures radices figuras desideras, formetur ex  $e$  correctæ

$$ue^3 - te^4 = 0,43105602423 \dots,$$

ac

$$\frac{\frac{1}{2}s - V(\frac{1}{4}ss - bt - ue^3 + te^4)}{f} \text{ five } \frac{2648,066 - V6987685,67496597577 \dots}{82,26}$$

$$= ,05644179448074402 = e,$$

unde  $a + e = z$  radix accuratissima fit

$$12,75644179448074402 \dots$$

qualem invenit Cl. Wallisus in loco citato. Ubi observandum redintegrationem calculi semper triplicare notas veras in assumpta  $a$ , quas prima

$$\text{correctio, five } \frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{V(\frac{1}{4}ss - bt)}, \text{ quintuplices reddit, quæque etiam commo-}$$

de per logarithmos efficitur. Altera autem correctio post primam, etiam duplum ciphrearum numerum adjungit, ut omnino assumptas septuplicet; prima tamen plerumque usibus arithmetices abunde sufficit. Quæ vero dicta sunt de numero ciphrearum in radice recte assumptarum, ita intelligi velim, ut cum  $a$  non nisi decima parte distet a vera radice, prima figura recte assumatur; si intra centesimam partem, duæ primæ: Si intra millesimam tres priores rite se habeant; quæ deinde juxta nostram regulam tractatæ statim novem evadunt.

Restat jam ut nonnulla adjiciam de nostra formula rationali, videlicet

$$e = \frac{sb}{ss \pm tb}, \text{ quæ quidem satis expedita videbitur, nec multum cedit}$$

priori, cum etiam datas ciphras triplicare valeat. Formata autem æquatione ex  $a \pm e = z$ , ut prius, statim patebit an  $a$  assumpta sit major vel minor vero, cum scilicet  $se$  signo semper notari debeat contrario signo dif-

ferentiae resolvendae ac homogenei sui ex  $a$  producti. Deinde posito quod  $\pm b \mp se +$  vel  $tee = 0$ , divisor fit  $ss - tb$  quoties  $b$  ac  $t$  iisdem signis notantur; idem vero fit  $ss + bt$ , si signa ista diversa sint. Praxi autem magis accommodata videtur, si scriberetur theorema,

$$e = \frac{b}{s} \pm \frac{tb}{s}$$

nampe cum una multiplicatione ac duabus divisionibus res peragatur, quæ tres multiplicationes ac unam divisionem alias requireret. Hujus etiam methodi exemplum capiamus a prædictæ æquationis radice 12, 7...: ubi

$$\begin{array}{rccccrcl} 298,6559 & - & 5296,132e & + & 82,26ee & + & 29,2e^3 & - & e^4 & = & 0 \\ +b & - & s & + & t & + & u & & & & \end{array}$$

adeoque  $\frac{b}{s} - \frac{tb}{s} = e$ , hoc est, fiat ut  $s$  ad  $t$  ita  $b$  ad  $\frac{tb}{s} = 5296,132$

298,6559 in 82,26 (4,63875... quocirca divisor fit

$s - \frac{tb}{s} = 5291,49325...$  298,6559 (0,056441....)  $= e$ , id est quinque figuris veris adjectis radici assumptæ. Corrigi autem nequit hæc formula sicut præsens irrationalis; adeoque si plures desiderentur radicis figuræ, præstat assumpta nova hypothesi calculum de integro repetere: ac novus quotus triplicando figuras in radice cognitæ supputatori etiam maxime scrupuloso abunde satisfaciet.



## ÆQUATIONUM CUBICARUM

*Et biquadraticarum, tum geometrica & mechanica, resolutio  
universalis,*

a J. COLSON.

§. I. Æquationis cubicæ universalis

$$x^3 = 3px^2 + 3q \cdot x + p^3 - 3pq$$

*radices tres sunt,*

$$x = p + \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})} + \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

$$x = p - \left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})} - \left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

$$x = p - \left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})} - \left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

Vel, ut calculus arithmeticus facilior ac paratior evadat, si posueris binomii irrationalis  $r + \sqrt{(r^2 - q^3)}$  radicem cubicam esse  $m + \sqrt{n}$ , erunt ejusdem æquationis radices tres

$$x = p + 2m \text{ \& } x = p - m \pm \sqrt{-3n}.$$

Igitur data æquatione quavis cubica, inter ejus hujusque æquationis universalis terminos instituenda est comparatio, quo pacto facillime invenientur ipsæ  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ; & hisce cognitis, innotescent æquationis datæ radices omnes. Hujus vero solutionis exempla sint sequentia in numericis.

I. Æquationis cubicæ

$$x^3 = 2x^2 + 3x + 4$$

fit radix  $x$  indaganda.

Erit primo juxta præscriptum  $3p = 2$ , sive  $p = \frac{2}{3}$ .

Sec-

$$\text{Secundo } 3q - (3p^2) \frac{4}{3} = 3, \text{ five } q = \frac{13}{9}.$$

$$\text{Tertio } 2r (+p^3 - 3q \cdot p) - \frac{70}{27} = 4, \text{ five } r = \frac{89}{27} \text{ \& } r^3 - q^3 = \frac{212}{27}.$$

Et propterea

$$x = \frac{2}{3} + \sqrt[3]{\left(\frac{89}{27} + \sqrt{\frac{212}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{89}{27} - \sqrt{\frac{212}{27}}\right)}. \text{ Reliquæ duæ radices sunt impossibiles.}$$

2. In æquatione

$$x^3 = 12x^2 - 41x + 42,$$

$$\text{erit primo } 3p = 12, \text{ five } p = 4.$$

$$\text{Secundo } 3q - (3p^2) \frac{48}{3} = -41, \text{ five } q = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Tertio } 2r + (p^3 - 3q \cdot p) \frac{36}{3} = 42, \text{ five } r = 3.$$

$$\text{Et inde } r^3 - q^3 = -\frac{100}{27}.$$

At binomii furdi  $3 + \sqrt[3]{-\frac{100}{27}}$  ( $= r + \sqrt[3]{(r^3 - q^3)}$ ) radix cubica, per methodos ex arithmetica petendas extracta, est

$$-1 + \sqrt[3]{-\frac{4}{3}}, \text{ (} = m + \sqrt[3]{n}, \text{)}$$

& proinde radix

$$x = (p + 2m = 4 - 2) = 2$$

vel etiam

$$x = (p - m \pm \sqrt[3]{-3n} = 4 + 1 \pm \sqrt[3]{(4)} \cdot 2 =) 7 \text{ vel } 3.$$

Vel rursus, ejusdem binomii  $3 + \sqrt[3]{-\frac{100}{27}}$ , radix alia cubica (tres enim agnoscit) est

$$\frac{3}{2} + \sqrt[3]{-\frac{1}{12}} \text{ (} = m + \sqrt[3]{n}, \text{)}$$

&

& proinde radix

$$x = (p + 2m = 4 + 3 =) 7,$$

& etiam

$$x = (p - m \pm \sqrt{-3n} = 4 - \frac{3}{2} \pm (\sqrt{\frac{1}{4}}) \frac{1}{2} =) 3 \text{ vel } 2.$$

Vel denuo, ejusdem binomii  $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$  radix cubica tertia est

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{25}{12}}, (= m + \sqrt{n},)$$

& proinde radix

$$x = (p + 2m = 4 - 1 =) 3,$$

atque etiam

$$x = (p - m \pm \sqrt{-3n} = 4 + \frac{1}{2} \pm (\sqrt{\frac{25}{4}}) \frac{5}{2} =) 7 \text{ vel } 2.$$

3. In æquatione

$$x^3 = -15x^2 - 84x + 100,$$

erit  $p = -5$ ,  $q = -3$ ,  $r = 135$ ; & binomii  $135 + \sqrt{18252}$  radix cubica est  $3 + \sqrt{12}$ . Igitur radix

$$x = -5 + 6 = 1,$$

&

$$x = -5 - 3 \pm \sqrt{-36} = -8 \pm \sqrt{-36},$$

impossibiles.

4. In æquatione

$$x^3 = 34x^2 - 310x + 1012,$$

erit  $p = \frac{34}{3}$ ,  $q = \frac{226}{9}$ ,  $r = \frac{5536}{27}$ ; & binomii  $\frac{5536}{27} + \sqrt{\frac{707560}{27}}$  radix cu-

bica est  $\frac{16}{3} + \sqrt{\frac{10}{3}}$ . Igitur radix

Tom. II.

c

x =

$$x = \frac{34}{3} + \frac{32}{3} = 22,$$

&amp;c

$$x = \frac{34}{3} - \frac{16}{3} \pm \sqrt{-10} = 6 \pm \sqrt{-10},$$

impossibiles.

5. In æquatione

$$x^3 = 28x^2 + 61x - 4048,$$

$$\text{erit } p = \frac{28}{3}, q = \frac{967}{9}, r = -\frac{25010}{27}; \& \text{ binomii } -\frac{25010}{27} + \sqrt{-382347},$$

$$\text{radix cubica est } \frac{41}{6} + \sqrt{-\frac{247}{4}}. \text{ Igitur}$$

$$x = \frac{28}{3} + \frac{41}{3} = 23,$$

&amp;c

$$x = \frac{28}{3} - \frac{41}{6} \pm (\sqrt{\frac{729}{4}})^{\frac{27}{2}} = 16 \text{ vel } -11.$$

6. In æquatione

$$x^3 = -x^2 + 166x - 660,$$

$$\text{erit } p = -\frac{1}{3}, q = \frac{449}{9}, r = -\frac{9658}{27}; \& \text{ binomii } \frac{9658}{27} + \sqrt{-\frac{1147205}{27}}$$

$$\text{radix cubica est } -\frac{22}{3} + \sqrt{-\frac{5}{3}}. \text{ Igitur}$$

$$x = -\frac{1}{3} - \frac{44}{3} = -15,$$

&amp;c

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{22}{3} \pm \sqrt{5} = 7 \pm \sqrt{5},$$

irrationales.

7. In æquatione

$$x^3 =$$

$$x^3 = 63x^2 + 99673x + 9951705,$$

erit  $p = 21$ ,  $q = \frac{100996}{3}$ ,  $r = 6031680$ ; & binomii  $6031680 +$

$$\sqrt[3]{\frac{47887175043136}{27}} \text{ radix cubica est } 183 + \sqrt[3]{\frac{529}{3}}. \text{ Igitur}$$

$$x = 21 + 366 = 387,$$

&

$$x = 21 - 183 \pm (\sqrt[3]{529}) 23 = -139 \text{ vel } 185.$$

Nec secus in ceteris procedendum. Investigatur autem theorema ad modum sequentem. Pono æquationis cujusdam cubicæ radicem  $z = a + b$ , & cubice multiplicando proveniet

$$z^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =) a^3 + 3ab(a+b) + b^3.$$

Jam loco ipsius  $a + b$  valorem ejus  $z$  substituendo, fiet

$$z^3 = 3abz + a^3 + b^3,$$

quæ est æquatio cubica ex radice  $z = a + b$  constructa, cui terminus secundus deest. Ut hæc vero ad formam magis commodam, magisque concinnam revocetur, sumo æquationem

$$z^3 = 3qz + 2r, \text{ quæ posthac ipsius}$$

$$z^3 = 3abz + a^3 + b^3,$$

vices gerat. Igitur transmutatione hujus in illam, fiet primo  $3q = 3ab$ , sive  $q^3 = a^3 b^3$ , & secundo  $2r = a^3 + b^3$ , sive  $2r a^3 = (a^6 + a^3 b^3 =) a^6 + q^3$ . Et soluta hac æquatione quadratica, erit

$$a^3 = r + \sqrt{(r^2 - q^3)},$$

& hinc

$$b^3 = (2r - a^3 =) r - \sqrt{(r^2 - q^3)}.$$

Atque igitur tandem

$$a = \sqrt[3]{r + \sqrt{(r^2 - q^3)}}$$

&

$$b = \sqrt[3]{r - \sqrt{(r^2 - q^3)}}.$$

Et

Et propterea in æquatione cubica  $z^3 = 3qz + 2r$  erit radix

$$z = (a + b =) \sqrt[3]{r + (r^2 - q^3)} + \sqrt[3]{r - (r^2 - q^3)}.$$

At vero hæc radix revera triplex est, pro triplici valore quem inducere potest

$$\& \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} \& \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}}.$$

Cujusvis enim quantitatis radix cubica triplex erit, & ipsius unitatis radix cubica

$$\text{vel est } 1, \text{ vel } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \text{ vel } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Atque id adeo, propterea quod harum alicujus cubus sit unitas. Igitur si

$$1 \cdot \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} \text{ aut } \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}} \\ (= \sqrt[3]{1 \cdot (r + \sqrt{r^2 - q^3})}) = \sqrt[3]{1 \cdot (\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}})}$$

radicem aliquam [quam supra nominavimus  $m + \sqrt{n}$ , aut  $1(m + \sqrt{n})$ ] cubi  $r + \sqrt{r^2 - q^3}$  designet; ipsæ

$$= \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$$

&

$$= \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$$

$$[\text{id est } \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot (m + \sqrt{n}) \& \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot (m + \sqrt{n})]$$

alias duas ejusdem cubi radices designabunt. Similiter &

$$\sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}},$$

$$= \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}},$$

&

$$= \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 - q^3}},$$

[id

[id est]

$$m - \sqrt[n]{n}, \frac{-1 + \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot (m - \sqrt[n]{n}), \frac{-1 - \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot (m - \sqrt[n]{n}),$$

tres cubicæ radices erunt apotomes  $r - \sqrt[r^2 - q^3]$ . Atque has radices debite connectendo, fiet

$$z = \sqrt[r^2 - q^3]{(r + \sqrt[r^2 - q^3]{(r^2 - r^3)}) + \sqrt[r^2 - q^3]{(r - \sqrt[r^2 - q^3]{(r^2 - q^3)})}},$$

id est

$$z = (m + \sqrt[n]{n}) + (m - \sqrt[n]{n}) = 2m,$$

$$z = \frac{-1 + \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot \sqrt[r^2 - q^3]{(r^2 - q^3)} + \frac{-1 - \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot \sqrt[r^2 - q^3]{(r - \sqrt[r^2 - q^3]{(r^2 - q^3)})}$$

id est

$$z = \frac{-1 + \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot (m + \sqrt[n]{n}) + \frac{-1 - \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot (m - \sqrt[n]{n}) =$$

$$-m + \sqrt[n]{n} - 3n,$$

&amp;c

$$z = -\frac{1 - \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot \sqrt[r^2 - q^3]{(r + \sqrt[r^2 - q^3]{(r^2 - q^3)})} +$$

$$\frac{-1 + \sqrt[n]{n} - 3}{2} \cdot \sqrt[r^2 - q^3]{(r - \sqrt[r^2 - q^3]{(r^2 - q^3)})}$$

id est

$$z = \frac{-1 - \sqrt[n]{n} - 3}{2} (m + \sqrt[n]{n}) + \frac{-1 + \sqrt[n]{n} - 3}{2} (m - \sqrt[n]{n})$$

$$= -m - \sqrt[n]{n} - 3n,$$

quæ tres erunt radices æquationis cubicæ  $z^3 = 3qz + 2r$ . Debite autem connectuntur radices istæ ad modum præcedentem, quippe quæ sic connectæ, & more vulgari in se invicem continuo ductæ, æquationem  $z^3 = 3qz + 2r$  restituant. Denique fac  $z = x - p$ , & æquatio fiet

$$x^3 - 3px^2 + 3p^2 x - p^3 = 3qx - pq + 2r,$$

c 3

quæ

quæ universalis est, & cujus radices evadunt ut supra fuerunt exhibitæ.

Hic obiter notatu dignum est, quod æquationis cubicæ cujuscunque radices omnes sint possibiles & reales, quoties binomii membrum irrationale  $\sqrt{(r^3 - q^3)}$  impossibilitatem in se complectitur; hoc est, quoties  $q$  est quantitas affirmativa, & simul cubus ejus major est quadrato ex latere  $r$ . At si membrum istud  $\sqrt{(r^3 - q^3)}$  sit possibile, hoc est si  $q$  sit quantitas negativa, aut etiam si affirmativæ cubus sit minor quadrato ex latere  $r$ , tunc unicam tantum agnoscit æquatio radicem possibilem & realem, reliquæque duæ erunt impossibiles.

In hoc theoremate si fiat  $p = 0$ , hoc est, si desit æquationis terminus secundus, tunc deventum erit ad casum regularum quæ dicuntur *Cardani*, cujus solutio continetur in præcedentibus.

§. 2. Æquationis biquadraticæ universalis

$$x^4 = 4p x^3 + 2q x^2 - 4p^2 x - q^2,$$

radices quatuor sunt

$$x = p - a \pm \sqrt{(p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a})},$$

&c

$$x = p + a \pm \sqrt{(p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a})},$$

Ubi  $a$  est radix æquationis cubicæ

$$a^3 = p^2 + q - \frac{2pr}{a} - a^2 + r^2.$$

Jam data æquatione quavis biquadratica, inter ejus hujusque æquationis universalis terminos singulos instituenda est comparatio, quo pacto citissime inveniuntur ipsæ  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ; & hisce cognitis, non latebit valor ipsius  $a$ , ex theoremate superiori inveniendus, & tum demum innotescunt æquationis datæ radices omnes.

Huic solutioni illustrandæ exemplum unum aut alterum sufficiat.

1. Æquationis biquadraticæ

$$x^4 = 8x^3 + 83x^2 - 162x - 936$$

sint radices extrahendæ. Erit primò juxta præscriptum

$$4p = 8, \text{ sive } p = 2.$$

Sc-



Secundo

$$2q - (4p^2) 16 = 83, \text{ five } q = \frac{99}{2}.$$

Tertio

$$8r - (4pq) 396 = -162, \text{ five } r = \frac{117}{4}.$$

Quarto

$$4s - (q^2) \frac{9801}{4} = -936, \text{ five } s = \frac{6057}{16}.$$

Hinc

$$p^2 + q = \frac{107}{2}, 2pr + s = \frac{7929}{16}, r^2 = \frac{13689}{16},$$

&amp; proinde

$$a^6 = \frac{107}{2} a^4 - \frac{7929}{16} a^2 + \frac{13689}{16}.$$

Jam ut æquatio hæc, aliquatenus cubica, in radices ejus resolvatur, ad theorema præcedens recurrendum est, in quo erit

$$p = \frac{107}{2}, q = \frac{22009}{144}, r = \frac{2903923}{1728}, \text{ \& } r^2 - q^2 = -\frac{11940075}{16}.$$

Atqui binomii

$$\frac{2903923}{1728} + \sqrt{-\frac{11940075}{16}}.$$

radix cubica est

$$-\frac{53}{12} + \sqrt{-\frac{400}{3}}$$

&amp; propterea

$$a^2 = \frac{107}{6} - \frac{53}{6} = 9,$$

&amp;

& etiam

$$a^2 = \frac{107}{6} + \frac{53}{12} \pm \sqrt{400} \ 20 = \frac{169}{4} \text{ vel } \frac{9}{4}.$$

Vel, quod perinde est, æquationis præmissæ revera cubicæ sex radices sunt  $a = \pm 3$ ,  $a = \pm \frac{13}{2}$ , &  $a = \pm \frac{3}{2}$ , quarum quævis indiscriminatim proposito nostro faciet satis. Puta si in præsentī casu sit  $a = 3$ , erit juxta theorema

$$x = (p - a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a}}) = 2 - 3 \pm \sqrt{4 + \frac{99}{2} - 9 - \frac{39}{2}}$$

$$= -1 \pm (\sqrt{25}) \ 5 = 4 \text{ vel } -6,$$

&

$$x = (p + a \pm \sqrt{p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a}})$$

$$= 2 + 3 \pm \sqrt{4 + \frac{99}{2} - 9 + \frac{39}{2}} = 5 \pm (\sqrt{64}) \ 8 = 13 \text{ vel } -3,$$

que sunt æquationis datæ radices quatuor.

2. In æquatione

$$x^4 = 20x^3 + 252x^2 - 6592x + 21313;$$

$$\text{erit } p = 5, q = 176, r = -384, \text{ \& } s = 13072.$$

$$\text{Hinc } p^2 + q = 201, 2pr + s = 9232, \text{ \& } r^2 = 147456; \text{ \& inde}$$

$$a^2 = 201 \ a^4 - 9232 \ a^2 + 147456.$$

Jam in theoremate pro cubicis erit

$$p = 67, q = \frac{4233}{3}, \text{ \& } r = 65219; \text{ eritque binomii}$$

$$65219 + \sqrt{\frac{38889307072}{27}}$$

$$\text{radix cubica } \frac{77}{2} + \sqrt{\frac{847}{12}}. \text{ Igitur } a^2 = 67 + 77 = 144, \text{ five } a = 12,$$

&

& proinde

$$x = 5 - 12 \pm \sqrt{25 + 176 - 144 + 64} = -7 \pm \sqrt{121} \quad 11 = 4 \text{ vel } -18,$$

&

$$x = 5 + 12 \pm \sqrt{25 + 176 - 144 - 64} = 17 \pm \sqrt{-7}, \text{ impossibiles.}$$

Hujus autem theorematis inventio est hujusmodi. Ex duarum æquationum quadraticarum  $x^2 + 2ax - b = 0$ , &  $x^2 - 2ax - c = 0$  in se invicem multiplicatione, æquationem conficio biquadraticam

$$x^4 = (4a^2 + b + c)x^2 + (2ac - 2ab)x - bc,$$

cui terminus secundus deest, quamque huic æquationi

$$x^4 = ex^2 + fz + g$$

statuo æquipollere. Unde primo  $4a^2 + b + c = e$ , sive  $b = e - 4a^2 - c$ .

Secundo  $2ac - 2ab = f$ , hoc est,

$$2ac - 2ae + 8a^3 + 2ac = f, \text{ sive } c = \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2,$$

& inde

$$b = (e - 4a^2 - c) = \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2.$$

Tertio  $bc = g$ , sive

$$- \frac{f^2}{16a^2} + \frac{e^2}{4} - 2ea^2 + 4a^4 = -g,$$

hoc est,

$$a^6 = \frac{1}{2}ea^4 - \frac{1}{4}ga^2 - \frac{1}{16}e^2a^2 + \frac{f^2}{64},$$

quæ æquatio quasi cubica est, ex radice  $a^4$  & notis vel assumptis  $e, f, g$ , conflata. Ea vero radix per theorema superius exhiberi potest; & eodem calculo innotescant ipsæ  $b$  &  $c$ . At æquationum

$$x^2 + 2ax - b = 0 \text{ \& } x^2 - 2ax - c = 0$$

radices sunt  
d

$$x =$$

$$z = -a \pm \sqrt{a^2 + b} \quad \& \quad z = a \pm \sqrt{a^2 + c}$$

five

$$z = -a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}e - a^2 - \frac{f}{4a}\right)}, \quad \& \quad z = a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}e - a^2 + \frac{f}{4a}\right)},$$

quæ proinde erunt radices æquationis  $z^4 = ez^2 + fz + g$ ; cognita videlicet  $a$  vel  $a^2$  ex æquatione

$$a^6 = \frac{1}{2}ea^4 - \frac{1}{4}fa^2 - \frac{1}{16}e^2a^2 + \frac{f^2}{64}.$$

Jam, ut æquatio ista evadat universalis, & omnibus suis terminis instructa, fac  $z = x - p$ , eritque

$$x^4 - 4px^3 + 6p^2x^2 - 4p^3x + p^4 = ex^2 - 2pex + p^2e + fx - fp + g,$$

item &amp;

$$x = p - a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}e - a^2 - \frac{f}{4a}\right)}, \quad \& \quad x = p + a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}e - a^2 + \frac{f}{4a}\right)}.$$

Tandem concinnitatis & compendii gratia, fac

$$e = 2q + 2p^2 \quad \& \quad f = 8r;$$

tum

$$x^4 - 4px^3 + 4p^2x^2 = 2qx^2 - 4pqx + 2p^2q + p^4 + 8rx - 8pr + g,$$

$$x = p - a + \sqrt{(p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a})}$$

$$x = p + a \pm \sqrt{(p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a})},$$

$$\& \quad a^6 = (p^2 + q) a^4 - \left(\frac{1}{4}g + \frac{1}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2q + \frac{1}{4}q^2\right) a^2 + r^2.$$

Denique fac

$$g = 4s - q^2 + 8pr - p^4 - 2p^2q,$$

& fiunt æquationes præcedentes

$$x^4 = 4px^3 + 2q \quad \quad \quad - 4p^2x^2 + 8r \quad \quad \quad - 4pqx + 4s$$

&amp;c

&amp;c

$$a^6 = p^2 a^4 - \frac{2pr}{s} a^2 + r^2.$$

Scilicet omnia evadunt ut supra sunt posita.

§. 3. Hactenus de æquationum cubicarum & biquadraticarum resolutione analytica. Quoniam autem earundem *effectio geometrica* per parabolam vulgo tradi solet, & nonnullis in pretio est, ipsam *συνοπτικῶς*, & quidem universalius non pigebit hic exhibere.

Data æquatione quavis vel cubica vel biquadratica, instituenda est comparatio inter terminos ejus, terminosque respondententes hujus æquationis

$$\begin{aligned} x^4 &= \frac{2p}{q} x^3 + \frac{4pr}{q} x^2 + \frac{2p^2}{q} x + p^2 \\ &- 4e x^3 - 4r^2 x^2 - \frac{2ps}{q} x - q^2, \\ &\quad + 2s \quad + 4rs \quad - s^2 \\ &\quad - 1 \quad - 2g \quad + t^2 \end{aligned}$$

quo pacto facile satis eruentur ipsæ  $p, q, r, s, t$ ; earum interim una aliqua utcunque pro lubitu assumpta. Tum in parabola quavis data AVB, cujus vertex principalis V, axis VS, & axi perpendicularis VT, capiatur VS =  $p$  versus interiora parabolæ, & in angulo SVT inscribatur ST =  $q$ , quæ producta parabolam secet in punctis binis N & O. Bisecetur ON in M, & per M agatur MA axi parallela & parabolæ occurrens in A. Ipsi ON parallela ducatur AL, ut sit AL latus rectum parabolæ ad diametrum AM, sitque hæc eadem unitas. In AL (utrinque, si opus est, producta) capiatur AG =  $r$ , & a puncto G ducatur GR axi parallela, quæ parabolam secet in B, a quo capiatur BR =  $s$ . A novissime invento puncto R ducatur RE ipsi VT parallela & æqualis, quæ sinistram versus jaceat, respectu ipsius R, si  $q$  sit quantitas affirmativa, at versus dextram si  $q$  sit negativa. Atque idem de ipsis AG & BR intelligatur, quæ ad contrarias itidem partes duci debent, si modo valores ipsarum  $r$  &  $s$  prodeant negativi. Denique centro E & radio EC =  $t$  describatur circulus CK&c, qui parabolam in totidem secabit punctis, quot sunt æquationis datæ radices reales. Etenim a punctis istis C, K, &c. ducantur CP, Kp &c. ipsi ST parallela, & ad rectam GR (si opus est, productam) terminatæ, eritque harum quævis  $x$ , seu æquationis datæ radix quæsitæ; eæ scilicet ad dextram jacentes erunt radices affirmativæ, quæ vero ad sinistram sunt positæ, erunt radices negativæ. Punctum contactus, si quod fuerit, hic sumitur pro intersectionis punctis duobus ad invicem vicinissimis.

Inter æquationes cubicas & biquadraticas ita constructas hoc tantum intercedit discriminis, quod in prioribus, ob terminum ultimum\* in præcedente æquatione deficientem, semper sit

$$p^2 - q^2 - s^2 + t^2 = 0,$$

five

$$t = \sqrt{s^2 + q^2 - p^2}.$$

Igitur centro C & radio

$$EB (= \sqrt{(BRq + (ERq) STq - VSq)})$$

descripto circulo CK $\lambda$ c, radicem una CP in priore constructione in nihilum abit.

Hæc autem demonstrantur ad modum sequentem. Manentibus jam constructis, & producta CP, si opus est, donec fecerit AM in H, erit CH ordinata parabolæ ad diæmetrum AH, & proinde CHq = AL . AH = AH, ob AL = 1. At CH = CP + AG, & AH = GB + BP, & propterea

$$CPq + 2AG . CP + AGq = GB + BP;$$

sed ob naturam parabolæ erit AGq = GB, unde

$$CPq + 2AG . CP = BP.$$

Jam a puncto C ad ipsam BP demittatur norma CD, quæ occurrat etiam ipsi EI, ad BP actæ parallelæ, in puncto I. Propter similia triangula CDP

& TVS, erit  $DP = \frac{VS . CP}{ST}$  &  $CD = \frac{VT . CP}{ST}$ , & proinde

$$CPq + 2AG . CP = BP = DP + BD = \frac{VS . CP}{ST} + BR - IE,$$

Sive

$$CPq + 2AG . CP - \frac{VS}{TS} CP - BR = -IE.$$

Ast

$$IEq = CEq - CIq =$$

$$CEq - CDq - VTq - 2CD . VT =$$

$$CEq - \frac{VTq . CPq}{STq} - VTq - \frac{2VTq . CP}{ST}$$

$$(ob VTq = STq - SVq)$$

$$= CEq - CPq + \frac{SVq}{STq} CPq - STq + \\ SVq - 2ST \cdot CP + \frac{2SVq}{ST} CP,$$

quæ igitur æqualis crit quadrato ex latere

$$CPq + 2AG \cdot CP - \frac{VS}{ST} CP - BR.$$

Atque hæc æquatio ad terminos  $p, q, r, s, t$  revocata ipsissima fit æquatio proposita.

Hinc liquet, quod eadem quævis æquatio biquadratica innumeras per parabolam constructiones fortiri possit, pro indefinito valore quantitatis istius, quam ad arbitrium assumi posse jam diximus. Sed casus est simplicissimus faciendo  $VS = p = 0$ , & migrat constructio, si rem ipsam spectes, in vulgarem istam, in qua radicum repræsentatrices rectæ  $CP$ , &c., sunt ad axem perpendiculares. Æquatio autem fit

$$x^4 = -4rx^3 - 4r^2x^2 + 4rsx - q^2, \\ + 2s x^2 - 2q s^2, \\ - t^2 + t^2,$$

quæ facile construitur ut supra.

§. 4. Sed ne parabolæ descriptio organica difficilis nimium videatur, in promptu est artificium quoddam mechanicum, ope fili penduli pondere instructi peractum, cuius auxilio quam exactissime & facillime æquatio novissima constructui potest, & proinde æquationum quarumcunque cubicarum & biquadraticarum radices inveniri, idque sine ullo linearum ductu nisi rectarum & circuli. Constructio autem, quam appellare libet *mechanicam*, est ad hunc modum.

Contra parietem erectum, vel planum aliud quodvis horizonti perpendicularare, ad punctum aliquod  $F$  suspendatur filum tenuissimum & flexile  $FP$ ; pondere quovis  $P$  ad extremitatem  $P$  appenso. In hoc filo notetur punctum aliquod  $N$ , a puncto suspensionis  $F$  satis remotum; vel filo parvulus, si id mavis, innectatur nodus  $N$ . Et sumpta utcumque  $NO$  pro unitate ad punctum medium  $A$  ducatur (in plano prædicto) recta  $AQ$  horizonti parallela, & utrinque quantum satis producta. Hisce generaliter paratis, pro particulari jam applicatione fac  $AQ = r$ ; ipsi  $q, r, s, t$ , ut sæpius inculcatum, vel arithmetice vel geometricè, pro datæ cujusvis æquationis exigentia, in æquatione novissima prius determinatis. Tunc acu vel stylo tenuissimo, aut etiam cuspidè circini admodum gracili, flectatur filum a loco suo ad punctum quoddam  $B$ , ita ut punctum  $N$  cadat in novissime invento puncto  $Q$ . In  $BQ$  ab isto  $B$  capiatur  $BR = s$ , & in  $R$  ad ipsam  $BR$  perpendicularis erigatur  $ER = q$ . Verum enim vero istæ  $AQ, BR, RE$ , ad contrarias partes ab earum initiis cadere debent, si

TAB. XII.  
Fig. 2.

forte valores ipsarum  $r, s, q$ , prodeant negativi. Denique in puncto invento E figatur circini crus unum, &, ad distantiam  $EZ = r$  extensum, agatur crus alterum in orbem, secumque circumducatur filum FZP. Hac fili circulatione pondus P nunc ascendet nunc descendet motu reciproco, ut & nodus N nunc supra rectam AQ extabit, nunc vero infra eandem deprimetur. Quoties autem reperietur nodus ille N in ipsa AQ, puta in punctis D,  $d, \Delta, \delta$ , abscindet is rectas DQ,  $dQ, \Delta Q, \delta Q$ , quæ erunt æquationis datæ radices omnes reales; hæ nempe ad dextram erunt radices affirmativæ, illæ vero ad sinistram radices negativæ. Demonstratio est manifesta ex præcedentibus, habita tantum ratione parabolæ, per puncta B, C,  $c, k, K$ , transcuntis. Nam posito F foco parabolæ, (cujus distantia a vertice est  $\frac{1}{4} ON$ ,) notum est quod lineæ omnes ut  $FB + BQ$ ,

$FC + CD$ , &c, eandem ubique conficiant summam.

Atque ex principiis hic positis proclive erit instrumentum haud inconcinnum & quantumvis accuratum fabricari, cujus beneficio hujusmodi æquationum quarumcunque radices nullo fere negotio inveniri possint, & præ oculis exhiberi. Hoc autem quilibet, si id curæ sit, variis modis pro ingenio suo efficere potest, & de his jam satis.



## ÆQUATIONUM QUARUNDAM

*Potestatis tertiæ, quintæ, septimæ, nonæ, & superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicis, quæ vocantur Cardani, resolutio analytica.*

Per AB. DE MOIVRE, R. S. S.

Sit  $n$  numerus quicunque,  $y$  quantitas incognita, sive æquationis radix quæsita, sitque  $a$  quantitas quævis omnino cognita, sive ut vocant homogeneum comparationis; atque horum inter se relatio exprimat per æquationem

$$ny + \frac{nn-1}{2 \cdot 3} ny^3 + \left(\frac{nn-1}{2 \cdot 3}\right) \left(\frac{nn-9}{4 \cdot 5}\right) ny^5 +$$

$$\left(\frac{nn-1}{2 \cdot 3}\right) \left(\frac{nn-9}{4 \cdot 5}\right) \left(\frac{nn-25}{6 \cdot 7}\right) ny^7, \&c. = a.$$

Ex hujus serici natura manifestum est, quod si  $n$  sumatur numerus aliquis impar (integer scilicet, nec refert utrum sit affirmativus vel negativus) tunc series sponte sua terminabitur, & æquatio fiet una ex supra præfinitis, cujus radix est

$$(1) y = \frac{\frac{1}{2} V(V(1+aa) + a)}{V(V(V(1+aa) + a) + a)} - \frac{\frac{1}{2}}{V(V(V(1+aa) + a) + a)}$$

Vel

$$(2) y = \frac{\frac{1}{2} V(V(1+aa) + a)}{V(V(V(V(1+aa) + a) - a) + a)} - \frac{\frac{1}{2}}{V(V(V(V(1+aa) + a) - a) + a)}$$

Vel

$$(3) y = \frac{\frac{1}{2}}{V(V(V(V(V(1+aa) - a) + a) + a) + a)} - \frac{\frac{1}{2} V(V(V(1+aa) - a) + a)}{V(V(V(V(V(V(1+aa) - a) + a) + a) + a) + a)}$$

Vel

$$(4) y = \frac{\frac{1}{2}}{V(V(V(V(V(V(1+aa) - a) + a) + a) + a) + a)} - \frac{\frac{1}{2}}{V(V(V(V(V(V(V(1+aa) + a) - a) + a) + a) + a) + a)}$$

Exem-

Exempli gratia, fit hujus æquationis potestatis quintæ

$$5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$$

radix invenienda, quo in casu erit  $n = 5$  &  $a = 4$ . Radix juxta formam primam erit

$$y = \frac{1}{2} \sqrt[5]{(V17+4)} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{(V17-4)}}$$

quæ in numeris vulgaribus expeditissime explicari potest ad hunc modum. Est  $\sqrt{17+4} = 8.1231$ , cujus logarithmus 0.9097164, & hujus pars quinta 0.1819433, huic respondens numerus est 1.5203 =  $\sqrt[5]{(V17+4)}$ . Ipsi vero 0.1819433 complementum arithmeticum est, 9.8180567, cui respondet numerus 0.6577 =  $\sqrt[5]{(\frac{1}{V17+4})}$ . Igitur horum numerorum semidifferentia 0.4313 =  $y$ .

Hic venit observandum quod loco radicis generalis, non incommode sumeretur  $y = \frac{1}{2} \sqrt[n]{2a} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{2a}}$ , quando numerus  $a$  respectu unitatis, est satis magnus, ut si æquatio fuerit

$$5y + 20y^3 + 16y^5 = 682,$$

erit log.  $2a = 3.1348143$ , cujus pars quinta 0.6269628, & huic respondens numerus 4.236. Complementi autem arithmetici 9.3730372 numerus est 0.236 & horum numerorum semidifferentia 2 =  $y$ .

Atqui præterea, si in æquatione præcedenti signa alternatim sint affirmantia & negantia, vel quod eodem redit, si series obvenerit hujusmodi

$$ny + \frac{1-nn}{2.3} ny^3 + \left(\frac{1-nn}{2.3}\right) \left(\frac{9-nn}{4.5}\right) ny^5 + \left(\frac{1-nn}{2.3}\right) \left(\frac{9-nn}{4.5}\right) \left(\frac{25-nn}{6.7}\right) ny^7, \text{ \&c.} = a$$

erit hujus radix

$$(1) y = \frac{1}{2} \sqrt[n]{(a + V(a^2 - 1))} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{(a + V(a^2 - 1))}}$$

vel

vel

$$(2) y = \frac{1}{2} \sqrt[n]{a + \sqrt{aa - 1}} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}$$

vel

$$(3) y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}$$

vel

$$(4) y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a - \sqrt{aa - 1}}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{a + \sqrt{aa - 1}}}$$

Hic autem notandum, quod si  $\frac{n-1}{2}$  numerus extiterit impar, radicis inventæ signum in ei contrarium permutandum est.

Proponatur æquatio

$$5y - 20y^3 + 16y^5 = 6,$$

unde  $n = 5$  &  $a = 6$ . Erit radix  $= \frac{1}{2} \sqrt[5]{6 + \sqrt{35}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{6 + \sqrt{35}}}$

Vel, quoniam  $6 + \sqrt{35} = 11.916$ , erit hujus logarithmus 1.0762804 & ejus pars quinta 0.2152561, complementum vero arithmeticum 9.7847439. Horum logarithmorum numeri sunt 1.6415 & 0.6091 respective, quorum semisumma 1.1253 =  $y$ .

Verum si acciderit ut  $a$  sit minor unitate, tunc radicis forma secunda, ut quæ proposita est magis conveniens, præ reliquis seligenda est. Sic si æquatio fuerit

$$5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64},$$

erit

$$y = \frac{1}{2} \sqrt[5]{\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{375}{4096}}} + \frac{1}{2} \sqrt[5]{\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{375}{4096}}}.$$

Fm. II.

c

Et

Et quidem si binomialium radix quintana ullo pacto extrahi queat, prodibit radix proba & possibilis, etsi expressio ipsa impossibilitatem mentiatur.

Binomialis vero  $\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{375}{4096}}$  radix quintana est  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{15}$ , &c

binomialis  $\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{375}{4096}}$  radix itidem quintana est  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{15}$ ,

quorum binomialium semisumma  $= \frac{1}{4} = y$ .

Si autem extractio ista vel non peragi posset, vel etiam difficilior videretur, res ubique confici potest per tabulam sinuum naturalium ad modum sequentem.

Ad radium 1 sit  $a = \frac{61}{64} = 0.95312$  sinus arcus cujusdam, qui proinde erit  $72^\circ: 23'$  cujus pars quinta (eo quod  $n = 5$ ) est  $14^\circ: 28'$ ; hujus sinus  $0.24981 = \frac{1}{4}$  proxime. Nec secus procedendum in æquationibus graduum superiorum.

# DE CONSTRUCTIONE PROBLEMATUM

*Solidorum, sive æquationum tertiæ vel quartæ potestatis, unica data parabola ac circulo efficienda; dissertatiuncula.*

Authore EDM. HALLEY.

Quo pacto æquationes omnes cubum vel quadrato-quadratum quantitatibus incognitæ involventes, ope parabolæ cujuscunque datæ & circuli, contrui possint, clare tradit ac liquide demonstrat præclarus ille *Cartesius* in Lib. III. Geometriæ suæ. Sed primum jubet secundum æquationis terminum, si adfuerit, tollere, ac deinde reductæ æquationis radices regula ibidem exposita elicere. Cum vero operatio ista nimis laboriosa videatur, nonnullis visum est constructionem similem etiam absque ulla prævia reductione comminisci; inter quos *Franciscus a Schooten* methodum valde facilem ac simplicissimam pro construendis cubicis quomodo libet affectis prodidisset, si modo, exposito principio unde regulam derivavit, Lectoris memoriæ, quam plurimis ac intricatis cautionibus obruit, melius studuisset. Nuper vero Vir Cl. D. *Thomas Baker* nostras, integro libello de constructionibus hîcæ conscripto, non solum cubicas, sed etiam biquadraticas omnes cujuscunque generis unica generali regula complexus est, eamque demonstrationibus ac exemplis per omnes casus abunde satis illustravit; nec non sub finem modum proponit unde regula ista generalis investigari possit. Haud tamen illum ipsum ostendit, cujus ope (uti suspicor) clavem suam geometricam catholicam obtinuit, vel, saltem multo facilius obtinere potuit. Cumque perplexis cautionibus de signis + & -, regula hæc D. *Bakeri* non minus obnoxia fuit quam illa *Schooteni*, ut vix absente libro constructiones illas quis tuto peragat; haud injucundum nec tyronibus incommodum fore visum est, utriusque fundamentum exponere, ac simul, emendata methodo, in re tam difficili, lucem quantum valeam afferre.

Constructio quam tradit *Cartesius*, quæque facillime radices æquationum omnium cubicarum vel biquadraticarum, ubi deficit secundus terminus, eruit, ut nota, supponi potest; attamen cum cardo sit a quo subsequenti pendet, ne dissertatiuncula hæc capite truncata videatur, ex illius Geometria desumptam placuit regulam adjungere, pauculis nonnullis in melius, uti reor, transpositis.

Deficiente secundo termino omnes æquationes cubicæ reducuntur ad hanc formam

$$x^3 + ax = 0,$$

ac biquadraticæ ad hanc

$$x^4 + ax^2 + c = 0$$

x.

$$z^4 \cdot *. apzz. aqz. a^3r = 0.$$

(ubi  $a$  designat. latus rectum parabolæ cujusvis datæ, quam in constructione adhibere licet,) vel sumendo  $a$  pro unitate, ad hanc

$$z^4 \cdot *. pz. q = 0,$$

vel ad hanc

$$z^4 \cdot *. pzz. qz. r = 0.$$

TAB. XII. Jam data parabola FAG cujus axis sit ACDKL ac latus rectum  $a$  vel 1, Fig. 3. fiat AC ejus dimidium, ac collocetur semper a vertice A versus interiora figuræ: dein sumatur  $CD = \frac{1}{2}p$  in linea illa AC continuata versus

C, si in æquatione fuerit  $-p$ , vel versus alteram partem si habeatur  $+p$ . Porro e puncto D, aut ex puncto C si non habeatur quantitas  $p$ , erigenda est ad axem perpendicularis DE æqualis  $\frac{1}{2}q$ , dextrorsum quidem si fue-

rit  $-q$ , ad alterum vero axis latus si fuerit  $+q$ ; ac circulus centro E radio AE descriptus, si æquatio fuerit tantum cubica, parabolam tot punctis F & G interfecabit quot veras habet radices, quarum quidem affirmativæ ut GK erunt ad dextram axis partem, negativæ ut FL ad sinistram.

At si æquatio biquadratica fuerit, augeri vel minui debet circuli radius AE, addendo, si fuerit  $-r$ , vel subducendo, si sit  $+r$ , ex ejus quadrato rectangulum  $ar$ , seu contentum sub latere recto & quantitate datæ  $r$ ; id quod nullo fere negotio efficitur geometricè. Hujus vero circuli intersectiones cum parabola omnes veras biquadraticæ æquationis radices dimissis ad axem perpendicularis exhibebunt; affirmativas quidem ad dextram axis; negativas vero ad sinistram. Totius demonstrationem *Cartesio* ejus inventori relinquo.

Notandum hic me operam dare ut semper habeantur radices affirmativæ ad dextrum axis latus, ut evitetur confusio a pluribus cautionibus, quarum causa minime evidens est, necessario oritura.

His præmissis, ut aditus pateat ad constructionem etiam earum æquationum ubi reperitur terminus secundus, consideranda venit regula pro tollendo termino secundo, ac reducenda æquatione ad aliam, quæ methodo præcedente construi possit. Omnes vero hujus classis æquationes cubicæ ad hanc formam

$$z^3. bzz. apz. aaq = 0,$$

vel ad hanc

$$z^3. bzz. *. aaq = 0;$$

biquadraticæ vero ad hanc

$$x^4. bz^3. apzx. aqz. a^3r = 0,$$

vel hanc

$$x^4. bz^3. *. aqz. a^3r = 0,$$

vel

$$x^4. bz^3. apzx. *. a^3r = 0$$

vel denique ad hanc

$$x^4. bz^3. *. *. a^3r = 0$$

reduci possunt: e quibus omnibus, prout signis + & — diversimode connectantur, ingens oritur varietas, unde regula generalis omnibus inserviens obscura ac maxime difficilis redditur, nisi methodo quam subjungimus illustrata nodisque extricata tractetur.

Tollitur in biquadraticis secundus terminus, ponendo  $x = z + \frac{1}{4}b$ , si fuerit +  $b$  in æquatione vel  $x = z - \frac{1}{4}b$  si fuerit —  $b$ : hinc  $x - \frac{1}{4}b$  in primo casu, & +  $\frac{1}{4}b$  in altero æquatur  $z$ ; & in æquatione quavis proposita, substituta loco  $z$  quantitate æquali prodibit nova æquatio termino secundo carens, cujus radices omnes  $x$  data differentia  $\frac{1}{4}b$  vel excedunt vel deficiunt a radice quæsita  $z$ . Cum vero in rebus istiusmodi plus exempla quam præcepta valere soleant, proponatur una vel altera æquatio construenda.

*Exemplum I.*

$$x^4 + bz^3 - apzx - aqz + aaar = 0.$$

Sit

$$x - \frac{1}{4}b = z$$

Et erit

$$xx - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb = zx$$

&

x 3

x 3

$$x^3 - \frac{3}{4} bx^2 + \frac{3}{16} b^2 x - \frac{1}{64} b^3 = x^3$$

&amp;c

$$x^4 - bx^3 + \frac{3}{8} b^2 x^2 - \frac{1}{16} b^3 x + \frac{1}{256} b^4 = x^4$$

hinc

$$x^4 - bx^3 + \frac{3}{8} b^2 x^2 - \frac{1}{16} b^3 x + \frac{1}{256} b^4 = x^4$$

$$+ bx^3 - \frac{3}{4} b^2 x^2 + \frac{3}{16} b^3 x - \frac{1}{64} b^4 = + bx^3$$

$$- ap^2 x^2 + \frac{1}{2} ap^3 x - \frac{1}{16} ap^4 = - ap^2 x^2$$

$$- aaqx + \frac{1}{4} aaqb = - aaqx$$

$$+ aaar$$

Harum omnium summa fit æquatio nova secundo termino carens, quæque proinde juxta regulam cartesianam construi possit, sumendo loco  $\frac{1}{2} p$  dimidium coefficientis termini tertii per  $a$ , sive latus rectum, divisi, hoc est  $-\frac{3bb}{16a} - \frac{1}{2} p$ ; ac loco  $\frac{1}{2} q$ , dimidium coefficientis termini quarti per  $aa$  divisi, sive  $+\frac{bbb}{16aa} + \frac{pb}{4a} - \frac{1}{2} q$ . Cujus partes signo + notatæ sinistrorsum ab axe, signo — notatæ dextrorsum collocandæ sunt, ut habeatur centrum circuli ad constructionem requisiti, ac cujus intersectiones cum parabola, dimissis in axem perpendiculis, radices omnes veras  $x$  designent, affirmativas quidem ad dextram axis, negativas vero ad sinistram. Cum vero  $x - \frac{1}{4} b = z$ , ducendo lineam axi parallelam, ad dextrum

ejus latus &c ad distantiam  $\frac{1}{4} b$ , perpendiculara illa ad hanc parallelam terminata designabunt omnes radices quæsitæ  $z$ , affirmativas ad dextram, negativas vero ad sinistram. Radium circuli quod attinet, habetur ille addendo partes negativæ ac auferendo partes affirmativas termini quinti per  $aa$  divisi, e quadrato lineæ  $AE$ , a centro invento  $E$  ad verticem parabolæ  $A$  ductæ: id quod maxima ex parte efficitur capiendo, loco lineæ  $AE$ , lineam, quæ ad intersectionem parabolæ ac parallelæ prædictæ terminatur; ejus enim quadratum omnes termini quinti partes ex ablatione termini secundi æquationi novæ ingestas complectitur (uti facile probabitur:) ac restat solummodo ut hujus lineæ quadratum augeatur, si in æquatione habeatur



tur —  $r$ , vel minuatur si sit +  $r$ , additione vel subtractione rectanguli  $ar$ , unde conflatur quadratum radii circuli quæsit.

Hæc est methodus investigandi regulam centalem Dni *Bakeri* omnibus cautionibus libera ac satis facilis; ac sola differentia ex eo venit, quod ego juxta axem, ille vero juxta axi parallelam circuli ejusdem centrum determinat: quodque ego semper radices affirmativas ex axis dextro latere invenio, quas ille nunc dextro nunc sinistro constituit.

Æquationes cubicas quod attinet, ex reduci debent ad biquadraticas, antequam eadem regula generali construi possint; id quod fit ducendo æquationem propositam in radicem suam  $z$ , unde provenit æquatio biquadratica in qua deficit terminus ultimus sive  $r$ : quapropter sublato secundo termino & invento centro  $E$ , circulus ducendus est per ipsam intersectionem parabolæ & parallelæ ad axem superius memoratæ; cum scilicet  $ar$  sit  $= 0$ , & in nova æquatione totus terminus quintus ex ipsa ablatione termini secundi oriatur. Construenda sit hæc æquatio.

### Exemplum II.

$$z^3 - bzx + apz + aaz = 0:$$

Quæ ducta in  $z$  fit

$$z^4 - bz^3 + apz^2 + aaz = 0,$$

Ad tollendum secundum terminum ponatur  $x + \frac{1}{4}b = z$ , & fiet

$$\begin{aligned} x^4 + bx^3 + \frac{3}{8}bbxx + \frac{1}{16}b^3x + \frac{1}{256}b^4 &= + z^4 \\ - bx^3 - \frac{3}{4}bbxx - \frac{3}{16}b^3x - \frac{1}{64}b^4 &= - bz^3 \\ + apxx + \frac{1}{2}apx + \frac{1}{16}apbb &= + apz^2 \\ + aax + \frac{1}{4}aagb &= + aaz \end{aligned}$$

In hac nova æquatione, tertii termini semicoefficientis per  $a$  divisa, id est  $\frac{3bb}{16a} + \frac{1}{2}p$ , loco  $\frac{1}{2}p$  usurpanda est; ac coefficientis termini quarti dimidium, divisum per  $aa$ , lateris recti quadratum, id est  $\frac{bb}{16aa} + \frac{pb}{4a} + \frac{1}{2}q$ , vicem ipsius  $\frac{1}{2}q$  in constructione *Cartesii* subit; unde centrum  $E$  determinatur. Deinde ducta axi parallela ad distantiam  $\frac{1}{4}b$  ad sinistram ejus latus (ob  $x + \frac{1}{4}b = z$ ) cujus intersectio cum parabola sit  $O$ ; circulus centro  $E$ , radio  $EO$  descriptus parabolam secabit vel

vel tanget in tot punctis quot æquatio veras habet radices: quæ quidem radices, seu  $z$ , sunt perpendiculara de punctis illis in axi parallelam demissa, ad dextram quidem affirmativæ, negativæ ad sinistram.

Si in æquatione defuerit terminus tertius, vel quartus, vel uterque, in investiganda regula centrali nulla omnino observanda est methodi differentia, sed deficiente quantitate  $p$  vel  $q$ , deerunt partes illæ linearum CD ac DE ex quantitate illa aliquo modo deductæ, ac procedendum est cum reliquis coefficientibus termini tertii & quarti in æquatione nova, sicut in præmissis exemplis præscriptum est.

Hactenus Cl. *Bakeri* methodum generalem pertractavimus, qua quidem nulla alia facilior ac paratior expectanda est, assumpta ad constructionem sive parabola, sive alia quævis linea curva, cum scilicet æquatio ad biquadraticam ascendit. Etenim dum hæc scribo mihi occurrit regulæ centralis effectio geometrica præter omnem spem expedita, ac harum rerum curiosis abunde satisfactura.

TAB. XII. Descripta parabola NAM, cujus vertex A, axis ABC ac latus rectum  
Fig. 4  $a$ , reducatur æquatio ad hanc formam

$$z^4. az^3. apzz. aaqz. a^3r. = 0$$

vel ad hanc

$$z^3. bzz. apz. aaq = 0$$

si cubica tantum fuerit: dein ad distantiam  $BD = \frac{1}{4} b$  ducatur linea DH axi parallela, ad sinistram quidem si fuerit  $-b$ , ad dextram si  $+b$ , parabola occurrens in puncto D; de quo dimittatur perpendicularum in axem BD. In linea AB continuata versus B fiat  $BK = \frac{1}{2} a$ , & ducatur linea DK utrinque interminata. Porro sit  $KC = 2AB$  in axe semper ultra K continuato; ac si habeatur quantitas  $p$  signo  $-$  affecta, versus eadem partes etiam sumatur  $CE = \frac{1}{2} p$ , vel in contrarias, si habeatur  $+p$ , ac e puncto E erigatur axi perpendicularum EF (vel e puncto C si defuerit quantitas  $p$ ) lineæ DK, si opus est continuatæ, occurrens in puncto F; quod quidem circuli requisiti centrum est, si defuerit quantitas  $q$ . At si habeatur  $q$ , sumenda est in FE, si opus est continuata, linea  $FG = \frac{1}{2} q$ , sinistrorsum quidem si fuerit  $+q$ , dextrorsum si  $-q$  collocanda: & punctum G erit centrum circuli ad constructionem propositam idonei, ejusque radius, si defuerit quantitas  $r$ , hoc est si tantum cubica fuerit, erit linea GD; cujus quadratum in biquadraticis augendum est, si fuerit  $-r$ , vel minuendum si  $+r$ , additione vel subtractione rectanguli sub  $r$  & latere recto. Descripto sic circulo, ab intersectionibus ejus cum parabola de-

missis

missis in lineam DH perpendicularis, quæ ad sinistram sunt, ut NO, radices æquationis negativas semper designant, quæ ad dextram, ut ML, affirmativas.

Aliter ac paulo simplicius æquationes cubicæ juxta Schooteni regulam construuntur, quaque etiam radices ad axem referuntur: quoniam vero ipse inventor nec modum inveniendi nec demonstrationem inventi exponit, non abs re erit ejusdem fundamentum hic adjicere, simulatque effectiorem geometricam concinniores reddere, atque cautionibus, quibus implicatur, extricare.

Hæc regula derivatur ex eo quod omnis æquatio cubica reduci possit ad biquadraticam, in qua deficiet terminus secundus. Hoc fit ducendo æquationem propositam in  $z - b = 0$ , si fuerit  $+b$  in æquatione, vel in  $z + b = 0$ , si fuerit  $-b$ ; & æquatio nova producta easdem habebit radices cum cubica, atque insuper alteram ipsi  $-b$  æqualem, si fuerit  $-b$  in æquatione; vel contra.

Proponatur construenda

$$z^3 - z^2b + apz + aaq = 0.$$

Hæc ducta in  $z + b$  fit

$$z^4 - z^3b + apz^2 + aaqz + z^3b - bbz + abpz + aaqb.$$

Hic deficit secundus terminus, ac coefficientis tertii  $-bb + ap$  dat  $-\frac{bb}{2a} + \frac{1}{2}p$  loco  $\frac{1}{2}p$  vel CD in constructione Cartesii, & ex dimi- Fig. 3:

dio coefficientis termini quarti fit  $+\frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$  loco  $\frac{1}{2}q$  vel DE usur-

panda; adeoque determinatur centrum circuli quæsitum: atque ob datam unam ex radicibus æquationis novæ, id est  $-$  vel  $+b$ , dabitur etiam punctum in circumferentia, id est radius ejus. Denique descripto circulo, ab intersectionibus ejus cum parabola demissa in axem perpendiculari æquationis radices exhibebunt, affirmativas & negativas, eadem lege ac supra.

Investigatur autem centrum circuli constructione perquam facili, ceterisque omnibus cubicis præferenda. Descriptæ parabolæ AMD sit ver- TAB. I.  
tex A, atque axis AF: ad distantiam ipsi  $b$  æqualem ducatur axi paral- Fig. 1.  
lela DK, ad dextram si fuerit  $+b$  in æquatione, ad sinistram si  $-b$ , quæ parabolæ occurrat in puncto D. Centris D & A describantur radiis æqualibus arcus occulti utrinque sese interfecantes, ac per sectionum puncta ducatur linea interminata BC, quæ medio lineæ suppositæ AD perpendiculariter insilât, & axi occurrat in puncto E. Ab E, inferne quidem si in æquatione habeatur  $-p$ , vel superne versus A si fuerit  $+p$ ,  
Tom. II. f pona.

ponatur  $EF = \frac{1}{2}p$ ; & ex F (vel ex E si defuerit  $p$ ) educatur perpendicularum FG, lineæ BC occurrens in puncto G; & in GF producta fiat  $GH = \frac{1}{2}q$ , dextrorsum quidem si in æquatione habeatur —  $q$ , aliter sinistrorsum, applicanda: ac punctum H erit centrum quæsitum, HD vero circuli radius, qui demissis in axem perpendicularis ab intersectionibus suis cum parabola, ut LM, radices omnes, ut prius, commonstrabit. Quomodo vero constructio hæc ex præmissis consequatur, per se satis evidens est, nec opus est ut in eadem demonstranda diutius immorer.

Ne in his edendis frustraneam navasse operam, & ex aliorum inventis gloriolam captare videar, consulat Lector Cl. *Bakeri* librum Anno 1684. *Londini* editum, & quæ de hoc argumento scripsit a *Schooten* in commentario suo in Librum III. Geometriæ cartesianæ. Brevi concessio otio tractatulum alium de numero radicum in hujusmodi æquationibus, earumque limitibus, ex contemplatione constructionum præcedentium, aggregandi ac in lucem proferre statuo.

## DE NUMERO RADICUM

*In æquationibus solidis ac biquadraticis, sive tertiæ ac quartæ potestatis, earumque limitibus, tractatulus.*

Authore E. HALLEY.

Cum in tractatulo, quem nuper publici juris feci in actis Philosophicis, Num. 188; methodum aperuissim, qua problemata solida utcumque affecta minimo negotio, unica data parabola & circulo, simplicissime construi possint; sub finem mihi sese obtulit contemplatio jucunda satis, nempe ex his constructionibus numerum radicum in quavis æquatione, earumque limites ac signa facile consequi ac determinari: quocirca fidem dedi me brevi de hac materia dissertatiunculam aliquam scripturum, in qua si non Principibus, saltem secundæ classis Geometris, me non ingratum nec inutile præstiturum omnino persuasum habui.

Propius vero inspicienti mihi compertum est, me imprudentem inter ardua geometrica illapsum, ac jam iis tractandis designatum, quibus olim laboravere Viri illustres *Harriottus* nostras, ac *Cartesius*; in quibus pari facto utrique paralogismum, (forsan in eorum scriptis geometricis unicum) diverso tamen modo, admisere, uti posthac probabitur: sed *Quandoque bonus dormitat*. Quapropter agnita rei tum difficultate tum præstantia, totis viribus incumbere statui, ne promissis exequendis impar crederer, ac ne geometriæ pars tam eximia, tamque parum culta, diutius tenebris involuta lateret; sed ope nostra lucide his paucis exposita daretur.

Imprimis vero Lectorem monitum velim, quod dum his legendis operantur, oportet prædictam dissertationem Num. 188. editam, ad manum habere, ac constructiones ibidem traditas probe callere; quia quæ sequuntur ab illis maxima ex parte pendent, quas tamen hic repetere vix integrum esset.

Ex *Cartesio* & ex ibi dictis constat, tam in cubicis, quam in biquadraticis æquationibus, radices exponi posse demittendo perpendicularia in axem, datamve diametrum parabolæ datæ, ab intersectionibus curvæ illius cum circulo. Cumque circulus parabolam secans, vel in quatuor vel duobus punctis eam interfecare necesse est, constat in biquadraticis vel duas vel quatuor radices veras, affirmativas vel negativas, semper haberi; uti etiam si forte circulus illam tangat, quo in casu æqualitas duarum radicum ejusdem signi concluditur. In cubicis autem, quoniam una ex intersectionibus ad constructionem requiritur, non nisi una vel tres reliquæ radices designant unam vel tres; uti in casu contactus, unde constat duas æquales reperiri radices, problemaque, unde resultat æquatio, revera planum est.

Cubicæ itaque omnes, quomodocunque affectæ, una vel triplici radice explicabiles sunt, utique semper possibiles, nempe si radices negativas pro veris admiseris: sed biquadraticæ, quarum terminus ultimus  $r$  signo — affectus est, duabus vel quatuor. Aut si habeatur  $+r$  in æquatione, eaque tanta sit, ut  $\sqrt{GDg - ar}$ , minor sit quam ut circulus, eo radio ac centro G descriptus, parabolam contingere in aliquo puncto possit, æquatio data omnino impossibilis est, nec ulla radice negativa vel affirmativa explicabilis. Sed de his plura in sequentibus.

TAB. XII.  
Fig. 4.

Quoniam vero tanta intercedit differentia inter casus cubicarum & biquadraticarum, ut simul comprehendi nequeant; primum cubicæ deinde alteras tractabimus. Cubicæ vero infinitis circulis in data parabola construuntur, biquadraticæ autem unico tantum, saltem his methodis: id adeo quia ponendo  $z = e$ , sive indeterminata aliqua, æqualem nihilo, æquatio cubica reducitur ad biquadraticam easdem radices cum cubica habentem, atque insuper aliam ipsi  $e$  æqualem; unde fit ut tot circulis diversis construi possit cubica, quot imaginari velis quantitates  $e$ , id est infinitis. Inter has vero constructiones, illa quam superius (§. ult.) dedi, longe facillima est. Huic tamen non multum cedit alia, quæ ad enucleationem numeri radicum, earumque limitum magis accommodata videtur, quæque ortum trahit ex ablatione secundi termini, ponendo modo vulgari  $x = z +$  vel  $-$  tertia parte coefficientis termini secundi. Hæc autem est. Data parabola ABY ejusque vertice A, axe AE & latere recto  $a$ , reducatur æquatio ad formam consuetam, id est

TAB.  
XIII.  
Fig. 2.

$$x^3. bx^2. apx. aqx = o.$$

Deinde ad distantiam  $\frac{1}{3}b$  ducatur axi parallela BK, dextrorsum quidem si fuerit  $+b$ , aliter sinistrorsum, parabolæ occurrens in B; ac lineæ suppositæ AB erigatur perpendicularis utrinque interminata DP, axi occurrens in puncto G. De B in axem demitte perpendicularum BC, & ipsi AC fiat GE semper æqualis, ac versus inferiora ponatur. Ab E fiat  $EH = \frac{1}{2}p$ , sursum quidem, si in æquatione fuerit  $+p$ , deorsum vero si  $-p$ , ac e puncto H (vel ex E si defuerit quantitas  $p$ ) educatur perpendicularum HQ interminatæ DP occurrens in puncto O. Denique in linea HQ interminata, fiat  $OR = \frac{1}{2}q$ , ab O dextrorsum si fuerit  $-q$ , sinistrorsum si  $+q$ , collocanda: ac circulus centro R, radio RA descriptus, tot punctis secabit parabolam, quot æquatio proposita veras habet radices; eaque erunt perpendiculara ZY a punctis intersectionum Y in axi parallelam BK demissa; quarum quæ ad dextram lineæ BK affirmativæ sunt, ad sinistram negativæ.

Hujus constructionis commoditas in eo consistit, quod circulo per verticem transeunte peragitur, perinde ac si defuisset secundus terminus; ideoque

que ad radicem numerum determinandum, sufficit loci sive lineæ curvæ proprietates perspectas habere, quæ spatia discriminat, ubi si ponatur centrum circuli qui per parabolæ verticem transeat, circumferentia ejus vel uno vel tribus aliis punctis eam secabit; hoc est lineæ curvæ, in quam incidunt centra omnium circulorum per verticem transeuntium ac deinde parabolam tangentium, naturam definire.

Locus autem ille est parabolis, quam cum *Cl. Walliso* semicubicalem appellare licet, sive in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis. Hujus latus rectum est  $\frac{27}{8}$  lateris recti datæ parabolæ, vertex vero punctum V existente AV dimidium lateris recti ejusdem parabolæ. Hoc est, si ponatur unitas pro latere recto datæ parabolæ,  $\frac{8}{27}$  cubi ordinatim applicatæ æquabuntur quadrato partis diame-

tri, sive cubus ex  $\frac{2}{3}$  VH quadrato ex HR, si scilicet R sit centrum circuli qui per verticem parabolæ transeat, eamque deinde contingat. Hæc est curva illa quam primus mortalium *Nelius* nostras rectæ datæ æqualem demonstravit, eaque occasione apud principes Geometras dudum celebris; ejusque proprietates *Cl. Wallisus* sub finem libri de *Cissoide*, & *Hugenius Prop. 8. & 9. de linearum curvarum Evolutione*, aliique acri ingenio disquisivere, quorum scripta consulat Lector. Hæc curva utrinque ab axe parabolæ descripta, id est VNL, VPX, spatium complectitur, in quo si ponatur centrum circuli, qui per verticem A transeat, interfecabit ille parabolam in tribus aliis punctis; spatia vero ab axe remotiora centra præbent circulis non nisi uno præter verticem puncto parabolam secantibus.

His probe intellectis, jam ad determinandum radicem numerum accingimur. Ac primum deficiat secundus terminus; sitque latus rectum 1, vel

$AV = \frac{1}{2}$ ; in constructione VH est  $\frac{1}{2}p$ , HR vero  $\frac{1}{2}q$ ; cumque si

fuerit  $+p$ , ab V versus superiora ponenda sit  $\frac{1}{2}p$ , centrum

circuli extra spatium LVX semper constituitur; ideoque una tantum radice explicabilis est, affirmativa si  $-q$ , negativa si  $+q$ : quæ quidem ra-

dices *Cardani* regulis investigantur. Si vero fuerit  $-p$ ,  $VH = \frac{1}{2}p$

inferne ponitur, ac fieri potest ut HR cadat inter axem & curvam VX vel

VL, si scilicet cubus ex  $\frac{2}{3}VH$ , sive ex  $\frac{1}{3}p$ , major sit quam quadra-

tum ex  $\frac{1}{2}q$ , sive  $\frac{1}{27}p^3$  major quam  $\frac{1}{4}qq$ , quo in casu tres dantur ra-

dices, duæ negativæ, si fuerit  $-q$ , ac una affirmativa earum summæ æqua-

æqualis; vel  $fi + q$ , duæ affirmativæ unaque negativa. Quod si  $\frac{1}{27}p^3$  minor sit quam  $\frac{1}{4}qq$  una tantum reperitur radix, affirmativa  $fi - q$ , negativa  $fi + q$ . Atque hæc passim docentur ab iis qui hanc geometriæ partem tractarunt.

Jam adsint omnes termini, ac primum poponatur, c. g. æquatio hæc

$$z^3 - z^2b + zp - q = 0;$$

cui etiam Figuram 2. adaptavimus. In cujus constructione  $BC = \frac{1}{3}b$ ,  $VG = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{18}bb$ ,  $VE = \frac{1}{6}bb$ ,  $VH = \frac{1}{6}bb - \frac{1}{2}p$ ,  $GH = \frac{1}{9}bb - \frac{1}{2}p$  vel  $\frac{1}{2}p - \frac{1}{9}bb$ , hinc  $HO = \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$ , vel  $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3$ , atque HR, sive distantia centri circuli R ab axe, est semper differentia inter  $\frac{1}{6}bp$  &  $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ ; quæ si æquantur, centrum cadit in axe; si  $\frac{1}{6}bp$  major sit quam  $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$  ad sinistram axis, sin minor ad dextram. Si itaque cubi ex  $\frac{2}{3}VH$ , (hoc est ex  $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$  quam nominemus  $d$ ) latus quadratum sive  $Vdd$ , majus sit quam HR, sive differentia inter  $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$  &  $\frac{1}{6}bp$ ; reperitur centrum R intra spatium NPV, paraboloidibus VPX, VNL, ac recta interminata DNP, circumscriptum; ac proinde circulus parabolam secabit in tribus punctis Y, Y, Y, ad dextram lineæ BK sitis, atque adeo æquatio tres habet radices affirmativas. Centro vero extra hoc spatium NVP constituto, non nisi una radice affirmativa explicari potest. Hic obiter notandum rectam DP paraboloidem VPX tangere in puncto P, existente  $EP = \frac{1}{27}b^3$ , alteram vero VNL secare in puncto N, ita ut demisso in axem perpendiculari NF, VF sit pars quarta ipsius EV, sive  $\frac{1}{24}bb$ , NF vero  $\frac{1}{108}b^3$ , VW autem, quæ e puncto V axi perpendiculariter erecta lineæ DP occurrit in W, æqualis est  $\frac{1}{54}b^3$  sive  $\frac{1}{2}EP$ .

Hinc tuto concluditur, si in æquatione vel  $p$  major sit quam  $\frac{1}{3}bb$ , vel  $q$  ma-



$q$  major quam  $\frac{1}{27} b^3$ , non nisi unam eamque affirmativam radicem reperiri.

Fallit itaque regula *Cartesii* (Edit. *Amst.* 1659. pag. 70.) ubi tot veras dari radices quot sunt in æquatione mutationes signorum + & — pronunciat, frustra etiam in commentariis suis sphalma hoc excusante *Schootenio*. Ringi enim possunt infinite plures æquationes præcedentis formulæ tres signorum mutationes habentis, quæ unam tantum, quam quæ tres habeant radices. *Propositio etiam quinta sectionis quintæ Artis Analyticæ Harriotti Nosfri*, uti *Prob.* 18. *Numerosæ Potest. Resol. Vietæ*, vix satis firma est, cum ex limitationibus quas ibi posuerunt, toti parallelogrammo PIVW id conveniat, quod soli spatio NVP jam competere probavimus, hoc est ut centrum præbeat circulo tribus aliis punctis, præter verticem, parabolam secante.

Quantitas autem  $q$ , sive terminus ultimus, datis  $b$  &  $p$  ea lege ut  $p$  minor sit quam  $\frac{1}{3} bb$ , accurate limitatur ex præcedente æquatione

$\sqrt{ddd} = (\frac{2}{27} b^3 + \frac{1}{2} q) \pm \frac{1}{6} bp$ ; cum scilicet circulus parabolam contin-

gat. Itaque  $\frac{1}{2} q$  minor esse debet quam  $\frac{1}{6} bp - \frac{1}{27} b^3 + \sqrt{ddd}$ ; at

si  $p$  major fuerit quam  $\frac{1}{4} bb$ , majorem etiam esse oportet  $\frac{1}{2} q$  quam

$\frac{1}{6} bp - \frac{1}{27} b^3 - \sqrt{d^3}$ , ne cadat centrum in spatiolo NVW. Atque

his conditionibus æquatio semper triplici radice explicabilis erit, aliter non nisi una. Semper vero, sive tres sive una, affirmativæ sunt, ob positionem centri R, ad dextram lineæ DP.

Atque hic est casus maxime difficilis, ita ut quicumque præmissa bene calleat, sequentia facili negotio intelliget. Detur jam æquatio

$$x^3 - bx^2 + px + q = 0.$$

Hic ut tres habeantur radices, oportet centrum circuli alicubi intra spatium PNA, rectis PN, PA, & curva paraboloidis NA, definitum, reperi-

ri; quapropter cum EF sit  $= \frac{1}{2} bb$ ,  $p$  minor esse debet quam  $\frac{1}{4} bb$ :

jam ad determinationem quantitatis  $q$ , existente  $d = \frac{1}{9} bb - \frac{1}{3} p$ , ut

antea,  $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27} bbb - \frac{1}{6} bp$  semper major esse debet quam  $\frac{1}{2} q$ , ut

constituatur centrum circuli in spatio prædicto PNA: quod cum sit, æquatio talis duas habet radices affirmativas ac unam negativam. Si vero  $p$  major

major est quam  $\frac{1}{3}bb$ , vel  $\frac{1}{2}q$  major quam  $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$ , non nisi una eaque negativa radice explicabilis est.

Proponatur jam æquatio

$$x^3 - bx^2 - px - q = 0.$$

Ut hæc æquatio tres habeat radices, oportet centrum circuli alicubi inveniri in spatio indefinito, inter rectam DPD & curvam paraboloidis PX; hic quantitas  $p$  non est obnoxia limitationibus,  $\frac{1}{2}q$  vero semper minor esse debet quam  $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$ , posito  $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$ . Hoc

pacto duæ dantur radices negativæ, ac una affirmativa, aliter vero si  $\frac{1}{2}q$  major sit quam  $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$ , posito  $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$ : unica tantum affirmativa exponi potest.

Quarto loco fit æquatio

$$x^3 - bx^2 - px + q = 0,$$

quæ duas affirmativas habet radices ac unam negativam si centrum circuli reperiatur in spatio indefinito inter rectas PA, PD, ad curvam paraboloidis ΔL; hoc est, (posito  $d = \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}p$ ) si  $\frac{1}{2}q$  minor sit quam  $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb + \frac{1}{6}bp$ ; si vero  $\frac{1}{2}q$  major hac quantitate fuerit, una tantum negativa inest radix.

Quatuor autem æquationes reliquæ, in quibus habetur  $+b$ , quoad limitationem numeri radicum non differunt a prædictis, si signum termini ultimi mutetur, servato signo terminis tertii; quæ vero affirmativæ erunt radices in illis, hic sunt negativæ, & vice versa. Sic in æquatione,

$$x^3 - bx^2 + px - q = 0,$$

una vel tres erant affirmativæ radices; in hac vero,

$$x^3 + bx^2 + px + q = 0,$$

vel una vel tres negativæ sunt, sub iisdem conditionibus; nulla vero omnino affirmativa. Sic in

$$x^3 + bx^2 + px - q = 0,$$

duæ

duæ sunt negativæ & una affirmativa, si  $p$  minor sit quam  $\frac{1}{3}bb$ , ac  $\frac{1}{2}q$  minor quam  $\sqrt[3]{d^3 + \frac{1}{27}b^3} - \frac{1}{6}bp$ , quemadmodum in

$$x^3 - bx^2 + px + q = 0,$$

duæ erant affirmativæ & una negativa; excedentibus autem leges præscriptas  $p$  vel  $q$ , una tantum hic est radix affirmativa, quæ ibi negativa erat. Pari modo in

$$x^3 + bx^2 - px + q = 0,$$

vel duæ sunt affirmativæ ac una negativa, vel una negativa tantum. Denique iisdem de causis in æquatione

$$x^3 + bx^2 - px - q,$$

duæ sunt negativæ & una affirmativa, vel una affirmativa tantum, quibus in æquatione

$$x^3 - bx^2 - px + q,$$

duæ erant affirmativæ & una negativa, vel una negativa tantum, nempe prout  $\frac{1}{2}q$  major vel minor fuerit quam  $\sqrt[3]{d^3 + \frac{1}{27}b^3} + \frac{1}{6}bp$ .

Si defuerit terminus tertius, sive  $px$ , centrum  $R$  semper cadit in linea  $IPE\Delta$ , quocirca si fuerit

$$x^3 - bx^3. * - q,$$

vel

$$x^3 + bx^3. * + q,$$

una tantum esse potest radix, si  $-b$ , affirmativa; si  $+b$ , negativa. At si fuerit

$$x^3 - bx^3. * + q,$$

vel

$$x^3 + bx^3. * - q,$$

duæ possunt esse affirmativæ ac una negativa in priore, vel una affirmativa & duæ negativæ in posteriore, cadente centro in linea  $PA$  inter  $P$  ac  $\Delta$ ,  
Tom. II. hoc

hoc est si  $\frac{1}{4}q$  minor sit quam  $\frac{1}{27}b^3$ . Sin major fuerit, una tantum negativa in priore, vel una affirmativa in posteriore, dari potest.

Haftenus numerum radicum in cubicis æquationibus plenius assequuti sumus, restat ut nonnulla adjiciam de quantitate radicum. Hic primum notandum quod omnis æquatio tres habens radices ope tabulæ sinuum, trisectione scilicet anguli, satis expedite resolvi possit; ponendo scilicet  $\sqrt[3]{(\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p)}$ , vel  $\sqrt[3]{4d}$ , si fuerit  $+p$  in æquatione, vel  $\sqrt[3]{(\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p)}$ , si  $-p$ , pro radio circuli; angulum vero trifecandum qui sinum habeat

in tabula sinuum  $\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q}{\sqrt[3]{d}}$ . Invento hoc angulo, sinus tertiæ partis ejus, ut & sinus tertiæ partis complementi ad semicirculum, eorumque summa, ex tabula sinuum dabuntur. Hi vero sinus in radium

$\sqrt[3]{(\frac{4}{9}bb \pm \frac{4}{3}p)}$  ducendi sunt, & habebuntur quantitates ( $Y\mathcal{C}$ ,  $Y\mathcal{C}$ ,  $Y\mathcal{C}$ ,

in Fig.) quarum &  $\frac{1}{3}b$  vel summa vel differentia, prout casus postulat, veras radices æquationis exhibebunt. Hæc omnia ex inventis *Cartesii* derivantur. Ut vero casus omnes, quantum fieri possit, breviter complectar, dico quod centro R, in prima æquationum formula, cadente in spatio VGP, sectiones duæ Y, Y, cadunt inter A & B, ac proinde utraque ex minoribus radicibus minor est quam  $\frac{1}{3}b$ , tertia autem & major semper superat  $\frac{1}{3}b$ , superatur vero a  $b$ . Quod si cadat in spatio GNV, duæ

maiores sunt quam  $\frac{1}{3}b$ , minores vero quam  $\frac{2}{3}b$ , tertia vero est  $b$  —

duabus alteris, ac proinde minor quam  $\frac{1}{3}b$ . Sed adhibita limitatione quantitatis  $p$ , arctioribus terminis radices includuntur. Maxima enim radix

minor est quam  $\sqrt[3]{(\frac{4}{9}bb - \frac{1}{3}p)} + \frac{1}{3}b$ , major vero quam  $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}bb - p)} + \frac{1}{2}b$ ;

at cum  $\frac{1}{4}bb$  minor est quam  $p$ , limes ille fit  $\sqrt[3]{(\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p)} + \frac{1}{3}b$ ;

radix media semper minor est quam  $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}bb - p)} + \frac{1}{2}b$ ; major vero

quam  $\frac{1}{3}b - \sqrt[3]{(\frac{4}{9}bb - \frac{1}{3}p)}$ ; hunc vero litem nunquam excedit radix minima, sed cum quantitate  $q$  evanescit.

In secunda formula præscriptis legibus duæ sunt affirmativæ ac una negativa, ac cadente centro in spatio GPE, altera ex affirmativis major est, altera minor quam  $\frac{1}{3}b$ , major vero non excedit  $b$ , negativa autem major non esse potest quam  $\sqrt{\frac{1}{3}bb - \frac{1}{3}b}$ , est autem differentia ipsius  $b$  & summæ affirmatarum. Centro autem in spatio EGNa posito, utraque affirmativa major est quam  $\frac{1}{3}b$ , minor vero quam  $\sqrt{\frac{1}{3}bb + \frac{1}{3}b}$ , negativa vero semper minor est quam  $\frac{1}{3}b$ . Limites autem propiores ex data  $p$  evadunt, radicis quidem maximæ affirmativæ  $\sqrt{\frac{1}{4}bb - p} + \frac{1}{2}b$ , quæ semper minor est, ut & major quam  $\sqrt{\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p} + \frac{1}{3}b$ ; hoc tamen limite minor est altera affirmativa, quæ cum quantitate  $q$  minuitur. Negativa vero semper minor est quam  $\sqrt{\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p} - \frac{1}{3}b$ , ac deficiente quantitate,  $q$  evanescit.

In tertia formula duæ negativæ sunt ac una affirmativa: in hac, ut & in quarta, radices non limitantur a quantitate  $b$ ; affirmativa vero semper minor est quam  $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p} + \frac{1}{3}b$ , major tamen quam  $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} + \frac{1}{2}b$ . Maxima vero ex negativis semper major est quam  $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$ , minor vero quam  $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$ . Minor autem ex negativis semper minuitur cum minuta quantitate  $q$ .

In quarta formula cadente centro intra spatium LAPD; si duæ sint affirmativæ ac una negativa, maxima ex affirmativis major esse nequit quam  $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} + \frac{1}{2}b$ , nec minor quam  $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} + \frac{1}{3}b$ ; minor vero radix ab hoc limite minuitur, minuta quantitate  $q$ . Negativa autem minor est quam  $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p} - \frac{1}{3}b$ ; major vero quam  $\sqrt{p + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b$ .

Notandum vero hic radices negativas ubique signo affirmativo notari, quia hæ sunt radices affirmativæ quatuor æquationum illarum, in quibus habetur  $+b$ , ac  $q$  signo contrario notatur; ut supra monui. Horum omnium demonstratio ex eo consequitur, quod ubicunque centrum circuli  $R$  incidit in lineas curvas VPX, vel VΔL, circumferentia ejus parabolam tangit in puncto, cujus distantia ab axe est  $\sqrt{\frac{1}{3}} VH$ , camque secat ex

altera axis parte, ad distantiam  $2\sqrt{\frac{2}{3}}VH$ ; cum vero centrum cadit in lineam DPD, altera ex radicibus fit  $= 0$ , ac proinde cubica reducit ad quadraticam, five ad  $z^2 - bz + p = 0$ , cujus radices limites designant, ubi evanescit quantitas  $q$ : ac quo minor est  $q$ , eo propius ad has limites accedunt radices. Quadratica est etiam cum centrum cadit in axe; hoc est, cum  $\frac{1}{2}q = \frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3$ , in prima formula; vel  $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$ . in secunda; in tertia impossibile est; at in quarta cum  $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp$ ; quo in casu minor ex radicibus affirmativis est  $\frac{1}{2}b$ , major  $\sqrt{(\frac{1}{2}bb + p) + \frac{1}{3}b}$ , negativa vero  $\sqrt{(\frac{1}{3}bb + p) - \frac{1}{2}b}$ . In prima radices sunt  $\frac{1}{3}b$ , &  $\frac{1}{3}b \pm \sqrt{(\frac{1}{3}bb - p)}$ . In secunda vero formula,  $\frac{1}{3}b$ , &  $\sqrt{(\frac{1}{3}bb - p) + \frac{1}{3}b}$ , sunt affirmativæ: negativa autem  $\sqrt{(\frac{1}{3}bb - p) - \frac{1}{3}b}$ .

Atque hæc in cubicis sufficere posse videntur; ob eximium vero usum methodi, qua ope tabulæ sinuum radices harum æquationum inveniuntur, placuit unum vel alterum exemplum adjungere, ut praxis illius compendium inde innotescat.

Proponatur æquatio

$$z^3 - 39z^2 + 479z - 1881 = 0;$$

quærentur radices  $z$ .  $\sqrt{(\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p)} = \sqrt{9\frac{1}{3}} = \sqrt{d}$ , cujus duplum

$\sqrt{37\frac{1}{3}}$  radius est circuli; &

$$\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6}bp}{\sqrt{d^3}} = \frac{2197 + 940\frac{1}{2} - 3113\frac{1}{2}}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}},$$

sive  $\frac{24}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$  est sinus tabularis anguli, hoc est, facta divisione ope logarithmorum, Log. 9, 9251560, cui respondet angulus 57 gr. 19 m. 11  $\frac{1}{2}$  s.

Hujus.

Hujus tertia pars 19 gr. 6 m. 24 s. & complementi 40 gr. 53 m. 36 s. sinus dant Log. 9. 514983, & 9. 816011, qui ducti in radium  $\sqrt{37} \frac{1}{3}$  producunt Y &, & Y &, Log. 0. 301030. = 2, & Log. 0. 602059 = 4, tertia vero Y &, æqualis est eorum summæ five 6. Ideoque radices sunt 13 — 4 = 9, 13 — 2 = 11, & 13 + 6 = 19, ex quibus singulis conflat prædicta æquatio. Ubi notandum duas minores radices non excedere  $\frac{1}{3} b$  vel 13, quia centrum R in constructione cadit ad dextram axis, id est  $\frac{1}{6} bp$  minor est quam  $\frac{1}{27} b^3 + \frac{1}{2} q$ .

Exemplum alterum fit

$$x^3 - 15x^2 - 229x - 525 = 0,$$

& quarantur radices.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}bb + \frac{1}{3}p\right)} = \sqrt{101 \frac{1}{3}} = \sqrt{d},$$

$$\& \text{radius circuli } \sqrt{405 \frac{1}{3}} \cdot \frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q}{\sqrt{d^3}} = \frac{125 + 572 \frac{1}{2} + 262 \frac{1}{2}}{101 \frac{1}{3} \sqrt{101 \frac{1}{3}}} =$$

$$\frac{960}{101 \frac{1}{3} \sqrt{101 \frac{1}{3}}} = \text{sinui tabulari arcus, cujus Log. 9. 9736426, \& arcus}$$

ipse 70 gr. 14 m. 22 s. hujus pars tertia est 23 gr. 24 m. 47 s. & complementi 36 gr. 35 m. 12  $\frac{1}{2}$  s; quorum sinus Log. sunt 9. 599183, & 9. 775275.

quibus addito Log.  $\sqrt{405 \frac{1}{3}}$ , fiunt Log. 0. 903089 = 8, & Log.

1.079181 = 12, & eorum summa = 20. Hinc concluditur  $20 + \frac{1}{3} b$ ,

vel 25, æquari radici affirmativæ, & 8 &  $12 - \frac{1}{3} b$ , five 3 & 7, negativis. Quod si æquatio fuisset

$$x^3 + 15x^2 - 229x + 525 = 0,$$

3 & 7 fuissent affirmativæ; 25 vero negativa. Ceteræ autem cubicæ, unice tantum radice explicabiles, juxta regulas Cardani resolvendæ sunt, postquam demptus fuerit secundus terminus; nec video quo pacto minori calcu-

lo hoc negotium peragi possit. At si desideretur radix hæc in quantitativibus  $b$ ,  $p$ ,  $q$ , expressa, dico eam esse in prima formula,  $\frac{1}{3}b +$  vel  $-$  summa vel differentia radicum cubicarum ex

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{108}p^3b^3 + \frac{1}{27}b^3q - \frac{1}{6}bpq + \frac{1}{27}p^3\right) \pm \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6}bp}$$

id est  $+$ , si  $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$  major sit quam  $\frac{1}{6}bb$ , aliter  $-$ ; summa vero quoties  $\frac{1}{3}bb$  major est quam  $p$ ; sin minor fuerit  $\frac{1}{3}bb$ , differentia. Inque ceteris formulis radix semper conflatur ex iisdem elementis, variatis tamen signis  $+$  &  $-$ , ut facile percipiet qui velit experiri.

Ope vero tabulæ logarithmicæ sinuum verforum radices hæc satis prompte inveniuntur; nempe si coefficientes numeri sint surdi vel fracti, ac radices numeris ineffabiles; ut plerumque fit. Hæc autem est regula: in prima ac secunda formula, si  $\frac{1}{3}bb$  minor sit quam  $p$ ; sit  $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb = d$ , &

posita differentia inter  $\frac{1}{6}bp$  &  $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ , hoc est HR, in prima, ac inter  $\frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q$  &  $\frac{1}{27}b^3$ , in secundâ, pro radio; inveniatur angulus cujus tangens est  $d \vee d$ . Deinde ut co-sinus hujus anguli, ad ejusdem sinum versum, ita differentia pro radio habita, ad quartum; cujus latus cubicum trisecando logarithmum habebitur: ac diviso  $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb$  per hoc latus cubicum e quoto subducatur divisor, residuum erit quantitas Y&. Hujus residui ac  $\frac{1}{3}b$  summa, si centrum cadit ad dextram axis, aliter differen-

tia earundem, radix erit quæsitâ. Quod si  $\frac{1}{3}bb$  major sit quam  $p$ , posito HR pro radio, sit  $d \vee d$ , sive distantia paraboloidis ab axe, sinus arcus cujusdam. Hujus sinus versus ducatur in radium sive  $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 \pm \frac{1}{2}q$ , ac trisecto producti logarithmo, habebitur ejus latus cubicum, per quod dividatur  $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$ . Dico quoti ac divisoris summam eadem lege additam vel ablatam ex  $\frac{1}{3}b$ , radicem quæsitam exhibere. Ac par est ratio in tertia ac quarta formulis, nisi quod  $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp \pm \frac{1}{2}q$  pro radio as-

su-



sumenda est, ac  $\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$  in  $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p}$  five  $d\sqrt{d}$  pro sinu. Sed hæc præcepta exemplis fortasse melius percipiuntur.

Sit æquatio cubica,

$$xxz - 17zz + 54z - 350,$$

ac quæraturs radix  $z$ . Hic  $\frac{1}{3}bb$  major est quam  $p$ , sed  $q$  major est quam

cubus ex  $\frac{1}{3}b$ , ideoque una tantum affirmativa radice explicabilis est. Jam

$\frac{289}{9} - \frac{54}{3}$  est  $d$ , ac  $\frac{127}{9} \sqrt{\frac{127}{9}}$  pro sinu habenda est, ad radium

$4213 \frac{27}{27} + 175 - 153$ , hoc est  $\frac{5507}{27}$ : arcus vero competens fit  $15^{\circ} 37'$

$m. 49 s.$  Hujus sinus versi Log. 8. 5362376, additus Log. Radii 2. 3095913, dat 0. 8457889, cujus tertia pars 0. 2819276 est Log. radice cubicæ

1. 91394, quo divisore diviso,  $\frac{127}{9}$  five  $d$ , fit quotus 7. 37281; quoti ac

divisoris summa, aucta additione  $\frac{1}{3}b$ , fit radix quæsitæ, nempe 14. 9534,

&c.

Exactis cubicis biquadraticas jam aggrediamur. Hæc semper vel nullam, vel duas, vel quatuor radices veras habent, quarum determinatio, partim a coefficientibus, partim a signo & magnitudine numeri absoluti dati, pendet. Harum omnium constructionem generalem superius satis <sup>TAF.</sup> concinnam podidi, quam lector jam vidisse supponitur. In constructione <sup>XII.</sup> æquationis <sup>Fig. 3.</sup>

$$z^4 - bz^3 + pzz - qz + r = 0,$$

fit  $BD = \frac{1}{4}b$ ,  $AB = \frac{1}{16}bb$ ,  $BK = \frac{1}{2}$ , five dimidio lateris recti,

$KC = 2AB = \frac{1}{8}bb$ ,  $KE = \frac{1}{8}bb - \frac{1}{2}p$ ,  $AE = \frac{1}{2} = \frac{3}{16}bb - \frac{1}{2}p$ ,

$FE = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp$ , ac  $EG = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp + \frac{1}{2}q$ ; quo facto cir-

culus, centro  $G$ , radio  $\sqrt{GD^2 - r}$ , interfecabit parabolam vel nullo, duobus, aut quatuor punctis, quæ perpendicularis in lineam  $HD$  radices omnes  $z$  exhibent. Ut autem quatuor sint, evidens est centrum circuli alicubi constitui debere intra spatium, de cujus puncto quovis tria perpendiculara in curvam parabolæ demitti possint; atque simul radium minorem

rem esse maximo ex illis perpendicularis, majorem vero medio. Quod si centrum constituatur extra hoc spatium, ut non nisi una perpendicularis in parabolam demitti possit, qua major sit radius; vel si minor sit media ex tribus perpendicularibus, major vero quam minima ex illis, duæ tantum possunt esse radices; nulla vero omnino datur, quoties radius  $\sqrt{GD^2 - r}$ , minor est minima ex tribus, vel una illa, quoties una tantum est. Jam quale spatium hoc sit, quibusque limitibus discernitur, ac quibus conditionibus radius circuli minor vel major sit prædictis perpendicularibus, nobis restat inquirendum; ac primum quo pacto perpendicularis in parabolam demitti possit ostendendum est.

TAB.  
XIII.  
Fig. 4.

Sit ABC parabola, AE axis ejus, AV semi-latus rectum, G punctum de quo demittenda est perpendicularis. Ducatur axi perpendicularis GE, ac bisecetur VE in F, & erecta perpendiculari FH ad idem axis latus,

fiat  $FH = \frac{1}{4} GE$ ; dico quod circulus, centro H, radio HA descriptus, parabolam interfecabit in punctis tribus, vel uno, Z; ad quæ ductæ rectæ GZ curvæ parabolicæ perpendiculariter insunt.

Fig. 2.

Ut autem tres sint hujusmodi intersectiones, oportet centrum circuli H ita collocari, ut sit intra spatium paraboloidibus inclusum; hoc est ut FH minor sit quam  $\sqrt{\frac{8}{27} VF^3}$ , sive FH<sup>3</sup> minus quam cubus ex  $\frac{2}{3} VF$ : atque adeo  $GE = 4FG$ , minor erit quam  $4\sqrt{\frac{8}{27} VF^3}$ , sive  $4\sqrt{\frac{1}{27} VE^3}$ , hoc est quadratum ex GE minus erit quam  $\frac{16}{27} VE^3$ : coincidunt itaque hi limites cum paraboloidibus duabus ejusdem generis cum iis, quibus in cubicis usus sumus, sed quarum latus rectum duplo minor est; id est  $\frac{27}{16}$  lateris recti

parabolæ, hoc est  $\frac{27}{8}$  ipsius AV: ideoque ea ipsa est linea curva cujus evolutione generatur parabola, sic demonstrante *Hugenio*; quamque semper contingit linea DF, quæ parabolæ perpendiculariter insistit in puncto D. Punctum autem P, sive in quo contingit recta DF paraboloidem, centrum est circuli, qui radio DP descriptus cum parabola in puncto D coïncidit, sive ejusdem curvatis est; ut per se satis constet.

Fig. 3.

Descriptis itaque hujusmodi paraboloidibus VXP, VNΔ, utrinque ab axe; perspicuum est quod, nisi centrum circuli constituatur intra hos limites, non possit ille pluribus quam duobus in punctis parabolam interfecare: unde determinare licet quibus sub conditionibus coefficientes terminorum intermediorum coercentur, in æquationibus biquadraticis, ut habeantur quatuor radices. Ac prima fronte clarum est p majorem esse non posse quam  $\frac{3}{8} bb$ , (scilicet in formulis ubi habetur + p) nec q quam  $\frac{1}{16} b^3$ . Ge-

ne-

neraliter vero  $\frac{1}{16} b^3 \mp \frac{1}{4} pb \mp \frac{1}{2} q$ , id est distantia centri ab axe EG, minor esse debet quam  $EH = 4\sqrt{\frac{1}{27}VE^3}$ , hoc est (ob  $VE = \frac{3}{16}bb \mp \frac{1}{2}p$ ) quam  $(\frac{1}{4}bb \mp \frac{2}{3}p) \sqrt{(\frac{1}{16}bb \pm \frac{1}{6}p)}$ ; signis + & — in dubio relictis, ut secundum æquationis cujusvis naturam variari possint; quemadmodum in cubicis superius ostensum est.

Termini autem ultimi  $r$  limitatio eadem facilitate inveniri nequit; id adeo, quia problema est solidum, in curvam parabolæ demittere perpendiculararem, quodque non sine solutione æquationis cubicæ resolvi potest. Itaque primo loco deficiat secundus terminus, vel, si adfuerit, tollatur, ut æquatio habeat formulam,

$$x^4. *. pz^2. qz. r. = 0.$$

Ac si fuerit —  $r$ , semper duabus vel quatuor radicibus explicari potest; ut autem quatuor sint, oportet centrum circuli intra paraboloides prædictas constitui, sive ut sit —  $p$ , ac  $qq$  minus quam  $\frac{8}{27}p^3$ , sive cubo ex  $\frac{2}{3}p$ .

Deinde habeantur radices æquationis hujus  $y^3. *. \frac{1}{2}py. \frac{1}{4}q = 0$ , quantitibus  $p$  &  $q$  iisdem signis annexis quibus in biquadratica. Hæ autem radices auxilio tabulæ sinuum satis expedite inveniuntur. Inventis autem tribus illis  $y$ , quæ sunt ordinatim applicatæ ad axem parabolæ, de punctis ubi incidunt perpendiculara in curvam ejus, scilicet ZY (Fig. 4.)  $pyy - 3y^4$  ex minore  $y$ , quantitatem maximam  $r$  designabit, si fuerit —  $r$ ; quæ si minor fuerit  $r$ , æquatio quatuor habebit radices, aliter duas. Ast si fuerit +  $r$ , oportebit eam minorem esse quam  $3y^4 - pyy$  ex media  $y$ , nam si major sit, non nisi duas habere potest radices, saltem si minor sit  $r$ , quam  $3y^4 - pyy$  ex minima  $y$ . Hac vero si major sit, nulla omnino radice vera explicabilis est æquatio. Hi vero iidem limites aliter designantur ex quantitate  $q$ , scilicet  $\frac{1}{2}qy - y^4$  in prima casu,  $y^4 - \frac{1}{2}qy$  in secundo, ac  $y + \frac{1}{2}qy$  in tertio.

Fieri autem potest ut duæ minores quantitates  $y$  non longe distent ab invicem, unde evenit quod utraque ex perpendicularibus major sit quam recta GA, scilicet cum  $qq$  majus sit quam  $\frac{4}{27}p^3$ , minus vero quam  $\frac{8}{27}p^3$ ; cadente centro intra spatium paraboloidibus (utriusque Figuræ 2 & 3) interjectum. Hoc in casu, si fuerit +  $r$ , non nisi duæ possunt esse radices, existente  $y^4 + \frac{1}{2}qy$  ex maxima  $y$ , major quam  $r$ ; aliter nulla. At si  $\frac{1}{2}qy - y^4$

ex minima  $y$ , major fuerit quam  $r$  signo — notata,  $r$  vero major quam  $\frac{1}{2} qy — y^4$  ex media  $y$ , tunc habentur quatuor radices; at duæ tantum, si vel major priore vel minor posteriore inventa sit  $r$ .

Si vero in æquatione fuerit  $+p$ , vel si sit —  $p$  &  $qy$  majus fuerit quam  $\frac{8}{27} p^3$ , æquatio  $y^3$ . \*.  $\frac{1}{2} py. \frac{1}{4} q$ , unica tantum explicatur radice  $y$ ; hoc est, una tantum perpendicularis de centro circuli demitti potest: unde certo concluditur duas tantum radices haberi posse in æquatione data, quarum summa, si fuerit —  $r$ , cum quantitate  $r$  augetur; at si habeatur  $+r$ , ob tenta quantitate  $y$ , quantitas illa  $r$  minor esse debet quam  $y^4 + \frac{1}{2} qy$ ; nam si ea major sit, æquatio proposita absurda & impossibilis est.

Longum & superfluum esset omnes hujus sensus æquationes percurrere, cum ex jam dictis attendenti satis evidens sit, quæ negativæ quæ affirmativæ sint; atque, quod radicum harum limites ex quantitatibus inventis  $y$  petantur. In exemplum vero, quod cuivis in ceteris imitari licet, proponantur indagandi limites five conditiones, sub quibus in æquatione biquadratica quatuor radices affirmativæ dari possint. Hoc autem fit quoties centrum circuli  $G$ , ponitur in spatio  $VPK$  (Fig. 3.), ac simul habetur  $+r$ , five circuli radius minor quam  $GD$ . Unde patet, æquationem de qua agitur hujus esse formulæ,

$$x^4 — bz^3 + pz^2 — qz + r = 0;$$

$p$  vero majorem esse non posse quam  $\frac{3}{8} bb$ , nec  $\frac{1}{4} pb$ , hoc in casu, quam  $\frac{1}{16} b^3 + \frac{1}{2} q$ ; deinde opus est ut  $\frac{1}{4} bb — \frac{2}{3} p$  in  $\sqrt{(\frac{1}{16} bb — \frac{1}{6} p)}$  major sit quam  $\frac{1}{16} b^3 + \frac{1}{2} q — \frac{1}{4} pb$ ; & ex his limitibus certo constabit centrum intra spatium  $VPK$  inveniri. Ut vero definiatur quantitas  $r$ , solvenda primum est cubica,

$$y^3. *. — (\frac{3}{16} b^2 — \frac{1}{2} p)y = \frac{1}{32} b^3 + \frac{1}{4} q — \frac{1}{8} pb;$$

& habebuntur puncta, in quæ perpendiculares de centro in curvam parabolæ cadunt.

Inventis autem tribus valoribus hujus  $y$ ,  $r$  minor esse debet quam

$$\frac{3}{256} b^4 + \frac{1}{4} bq — \frac{1}{16} bbp + 3y^4 — \frac{3}{8} b'yy + p'yy$$

ex media  $y$ , major vero quam

$$\frac{3}{256} b^4 + \frac{1}{4} bq - \frac{1}{16} bbp + 3y^4 - \frac{3}{8} byy + pyy$$

ex minima  $y$ . Hos vero limites si excedat  $r$ , non nisi duæ radices haberi possunt. Denique si

$$\frac{3}{256} b^4 + \frac{1}{4} bq - \frac{1}{16} bbp + 3y^4 - \frac{3}{8} bbyy + pyy$$

ex maxima  $y$ , minor fuerit quam  $r$ , æquatio proposita impossibilis est.

Accidit etiam ut quatuor sint affirmativæ, cum centrum  $G$  constituitur in spatiolo  $VTS$ , ducta scilicet  $RTS$  perpendiculari in medium suppositæ lineæ  $AD$ : hoc autem fit cum  $p$  major est quam  $\frac{5}{16} bb$ ,

ac  $(\frac{1}{4} bb - \frac{2}{3} p) \vee (\frac{1}{16} bb - \frac{1}{6} p)$  major quam  $\frac{1}{8} bp - \frac{5}{128} bbb - \frac{1}{2} q$ . Quo in casu semper duæ, aliquando tres, ex radicibus fiunt majores quam  $\frac{1}{4} b$ .

Notandum vero hic limitem illum ex minima  $y$  productum, aliquando negativum fieri, siue minorem nihilo; quoties scilicet maxima ex tribus perpendicularibus major est quam  $GD$  (*Fig. 3.*) Hoc, si acciderit quantitas  $+r$ , a limite præscripto ex media  $y$ , in nihilum minui potest. Defectus vero limitis ex minima  $y$  monstrat quanta possit esse  $-r$  in æquatione, si habeantur tres radices affirmativæ ac una negativa; quam si excedat, non nisi duæ, altera affirmativa, altera negativa, dari possunt. Hæc autem omnia demonstrantur ex eo quod prædicti limites quantitatis  $r$ , sint differentię quadratorum lineæ  $GD$  & perpendicularium in curvam parabolæ.

Ob perplexas vero cautiones, quas parit in æquationibus hisce signorum diversitas, præstat semper secundum terminum tollere, ac deinde juxta præcepta jam tradita radicum numerum ac signa inquirere; præsertim si quantitates illæ  $y$  non multum distent ab invicem. Ex quatuor autem hisce

radicibus affirmativis, duæ semper sunt minores quam  $\frac{1}{4} b$ , duæ vero majores; nempe si  $DG$  minor sit quam  $AG$ , siue  $\frac{1}{4} pb$  quam  $\frac{3}{64} b^3 + q$ .

Tres autem minores sunt quam  $\frac{1}{4} b$  quoties perpendicularis media, siue ex

media  $y$  inventa, major est quam  $AG$ , five  $\frac{3}{8} bby$  major quam  $3y^3 - pyy$  ex eadem media  $y$ . Quarta vero & maxima radix major est quam maxima  $y + \frac{1}{4}b$ ; æquatur autem differentiæ ipsius  $b$  & summæ ceterarum trium radicum, ideoque minor est  $b$ . Sed jam *Manum de Tabula*. Fortassis illi qui naturam parabolæ penitus perspectam habent, majori compendio hæc omnia peragere valebunt; at si quantitates hæc omnes  $b$ ,  $p$ ,  $q$ , &  $r$ , absque resolutione cubicæ æquationis rite determinari possint, non sine causa ambigitur; quæcunque enim æquationibus planis hæc in re fiunt, non veros limites, sed approximationes tantum exhibent.

EPISTOLA DOMINI  
COLIN MAC LAURIN

*Matheseos Professoris in Academia Edimburgensi,*

& R. S. S.

DATA

D<sup>no</sup>. MARTINO FOLKES, R. S. V. Pr.

*De æquationibus, in quibus dantur radices impossibiles.*

**P**ræterita hyme ad te scripsi me cogitasse de facillima & simplicissima methodo demonstrandi NEWTONI regulam, qua sæpe cognoscitur num æquatio aliqua habeat radices impossibiles, nec ne: quæ methodus spero fore ut non displiceat, cum communi tantum nitatur Algebra, fundeturque obviis quantitatum proprietatibus, quæ sequentibus Lemmatibus demonstrantur, nec opus habeat curvarum consideratione, quod non ita convenire videtur subiecto mere algebraico.

LEMMA I.

*Summa quadratorum duarum quantitatum realium semper major est duplo eorundem producto.*

Sic  $a^2 + b^2$  majus est quam  $2ab$ ; nam eorum differentia  $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ , idcirco positiva; cum sit semper positivum quadratum cujusvis quantitatis, sive positivæ, sive negativæ.

LEMMA II.

*Summa quadratorum trium quantitatum realium, semper major est quam summa productorum, quæ fiunt multiplicando binas illas quantitates inter se.*

Sic  $a^2 + b^2 + c^2$  majus semper est quam  $ab + ac + bc$ : patet enim quod

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc &= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{2} \\ &= \frac{aa - 2ab + bb + aa - 2ac + cc + bb - 2bc + cc}{2} = \end{aligned}$$

h 3

$\frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2}$ , id est semisummæ quadratorum differentiarum quantitatum  $a, b, c$ ; cum vero hæc quadrata sint positiva, sequitur quod excessus ipsorum  $a^2 + b^2 + c^2$  supra  $ab + ac + bc$  est etiam positivus; &c summa quadratorum trium quantitatum major est summa productorum, quæ fiunt multiplicando binas quantitates inter se.

## L E M M A I I I.

*Tripla summa quadratorum quatuor quantitatum major est quam dupla summa productorum, quæ fiunt multiplicando binas quantitates ex his inter se.*

Nam

$$\begin{aligned} 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2 - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd &= a^2 \\ &- 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2bd + d^2 + b^2 \\ &- 2bc + c^2 + c^2 - 2cd + d^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-d)^2 \\ &+ (b-c)^2 + (c-d)^2, \text{ id est summa quadratorum differentiarum quan-} \\ &\text{titarum } a, b, c, d, \text{ ideo} \end{aligned}$$

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2$$

major est quam

$$2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd,$$

cum excessus sit semper positivus.

## L E M M A I V.

*Sit m numerus quantitatum  $a, b, c, d, e$  &c., summa quadratorum  $= A$ , summa productorum ex binis quibuscunque illarum quantitatum in se ductis  $= B$ , erit semper  $(\frac{m-1}{2}) A$  major quam  $B$ .*

Addendo enim quadrata differentiarum  $a-b, a-c, a-d, b-c, b-d, c-d$  &c.,  $a^2$  sumitur tot vicibus, quot dantur quantitates præter  $a$ , idem dicendum de  $b^2, c^2$ , &c. Rectangula autem  $2ab - 2ac - 2ad - 2bc$  &c. semel tantum oriuntur; ergo summa omnium quadratorum

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \text{ &c.}$$

$$= (m-1) a^2 + (m-1) b^2 + (m-1) c^2 + \text{&c.} - 2ab - 2ac - 2bc - \text{&c.}$$

$= (m-1) A - 2B$ ; sed  $(a-b)^2, (a-c)^2, (a-d)^2$  &c., sunt semper positiva, ergo  $(m-1) A - 2B$  est etiam positivus, ac proinde  $(\frac{m-1}{2}) A$  major est quam  $B$ .

COROL-



## COROLLARIUM.

Patet ex hac demonstratione excessum ipsius ( $m - 1$ ) A supra 2B semper esse æqualem summæ quadratorum differentiarum harum quantitatum  $a, b, c, d$  &c.; & ubi hæ quantitates sunt omnes æquales, est ( $m - 1$ ) A — 2B = 0, aque cum hac modificatione intelligenda sunt præcedentia Lemmata.

Observandum, quod licet supposuerim quantitates,  $a, b, c, d$  &c. esse positivas, propositiones etiam veræ sunt de quantitativis negativis, quarum quadrata eadem sunt, ac si essent positivæ; productorum vero summa vel eadem vel minor, quam si essent positivæ.

## PROPOSITIO I.

*In æquatione quadratica, cujus radices sunt reales, quadratum secundi termini semper majus esse debet, quam quater productum ex primo & tertio*

Sint radices  $+a, +b, x$  incognita. Æquatio erit

$$\begin{aligned} x^2 - ax + ab &= 0. \\ - bx \end{aligned}$$

Jam cum  $a^2 + b^2$  sit majus quam  $2ab$  per Lem. I, erit  $a^2 + b^2 + 2ab$  majus quam  $4ab$ ; ideoque  $(a + b)^2 \cdot x^2$ , quadratum secundi termini, majus quam  $4ab \cdot x^2$ , quater productum ex primo & tertio termino.

## PROPOSITIO II.

*In omni cubica æquatione cujus omnes radices sunt reales, quadratum secundi termini semper majus est quam triplum productum ex primo & tertio.*

Æquatio cubica cujus omnes radices sunt reales sic potest exprimi

$$\begin{aligned} y^3 - ay^2 + aly - abc &= 0. \\ - by^2 + acy \\ - cy^2 + bcy \end{aligned}$$

Per Lem. 2.  $a^2 + b^2 + c^2$  majus est quam  $ab + ac + bc$ ; addendo utrinque  $2ab + 2ac + 2bc$ , erit

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

majus quam  $3ab + 3ac + 3bc$ , ac proinde  $(a + b + c)^2 \cdot y^2$ , quadratum secundi termini, majus quam  $(3ab + 3bc + 3bc) y^2$ , triplum productum ex primo & tertio termino.

COROL.

## COROLLARIUM I.

In genere patet ex demonstratione, quod quadratum summæ trium quantitatum realium  $(a + b + c)^2$  semper majus est, quam tripla summa omnium productorum, quæ sunt multiplicando binas quascunque ex illis quantitatibus inter se.

## COROLLARIUM II.

Ex hac propositione sequitur, quod si quadratum secundi termini non sit majus triplo producto ex primo & tertio, radices æquationis non possint omnes esse reales, sed duæ erunt impossibiles. Quod plane coincidit cum una parte regulæ NEWTONI, qua detegitur num æquationis cubicæ radices sint impossibiles.

Cupit enim Vir Celeberrimus scribi supra medios terminos æquationis fractionem hanc  $\frac{1}{3}$ , & signum + poni sub primum & ultimum terminum, ut hic vides;

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \\ x^3 & + & px^2 & + & qx & + & r = 0 \\ + & & - & & * & & + \end{array}$$

deinde multiplicat quadratum secundi termini per fractionem, quæ supereminet, & si productum illud majus sit producto ex terminis adjacentibus, ponit signum + sub secundo termino; si vero illud productum minus inveniatur, ponit signum —, atque affirmat tot dari radices impossibiles, quot dantur mutationes inter signa. Jam per hanc Propositionem, si

$p^2x^4$  non est majus quam  $3qx^4$ , vel  $\frac{1}{3}p^2x^4$  non majus quam  $qx^4$ , radices non possunt omnes esse reales; eadem suppositio duas dat inter signa mutationes, quodcunque signum sit sub tertio termino, cum signa sub primo & ultimo sint ambo +; hæc ergo Propositio demonstrat primam partem regulæ newtonianæ, quantum spectat cubicas æquationes.

## COROLLARIUM III.

Si secundus terminus desit in cubica æquatione & tertius terminus sit positivus, æquatio habebit duas radices impossibiles; quadratum enim secundi termini (in hoc casu = 0) minus erit triplo producto ex terminis adjacentibus. Sed hoc clarius patebit considerando, quod ubi secundus terminus evanescit in æquatione, radices positivæ & negativæ sunt æquales, & se mutuo destruunt; pone radices esse +a & —b — c; in hoc casu  $a = b + c$ , & tertii termini coefficientis erit

$$-ab - ac + bc = -bb - 2bc - cc + bc = -bb - bc - cc, \quad \text{idco-}$$

ideoque negativus; vel si ponas duas radices positivas, & unam negativam, sintque  $-a, +b, +c$ , erit nihilominus tertii termini coefficientis negativus, nempe erit  $-bb - bc - cc$ . Quare si radices sint reales, tertii termini coefficientis semper est negativus (deficiente scilicet secundo termino) si vero coefficientis ille sit positivus, certum est indicium duas dari radices impossibiles.

### PROPOSITIO III.

*In omni æquatione cubica, cujus omnes radices sunt reales, quadratum termini tertii, semper majus esse debet, quam ter productum ex secundo, & quarto.*

In cubica æquatione, cujus radices sunt  $a, b, c$ , quadratum coefficientis tertii termini est  $(ab + ac + bc)^2$ ; productum ex coefficientibus secundi & quarti est  $(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ , ut patet ex sola inspectione æquationis; porro clarum est,  $a^2bc + ab^2c + abc^2$  esse summam productorum ex binis quantitatibus  $ab, ac, bc$ ; ideo, per Cor. I. Propos. II., quadratum summarum harum quantitatuum (id est,  $(ab + ac + bc)^2$ ) majus esse debet quam  $3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2$ ; itaque  $(ab + ac + bc)^2 y^2$ , id est quadratum tertii termini, majus esse debet quam  $(3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2) y^2$ , id est, quam triplum productum ex secundo & quarto termino.

### COROLLARIUM I.

Sequitur ex hac demonstratione, quod  $(ab + ac + bc)^2$  majus est quam  $3abc(a + b + c)$ .

### COROLLARIUM II.

Si quadratum tertii termini minus inveniatur, quam triplum productum ex secundo & quarto termino, radices æquationis non possunt omnes esse reales; quod convenit cum secunda parte regulæ newtonianæ; hic enim, casus dat — ponendum sub termino. Itaque duæ sunt mutationes signorum, quodcunque sit signum sub secundo termino.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3} \qquad \qquad \frac{1}{3} \\ x^3 + \frac{px^2}{3} + \frac{qx}{3} + v = 0 \\ + \quad + \quad \quad + \end{array}$$

### SCHOLIUM.

Eodem modo demonstrari potest, quod si in cubica æquatione secundus terminus desit, cubus tertiæ partis tertii termini positive sumti, semper major est quadrato ultimi termini dimidiati.

Sint æquationis radices  $+a, -b, -c$ , vel  $-a, +b, +c$ , sit-  
Tom. II. que

que  $a = b + c$ . in hoc casu deficiet secundus terminus, ipsaque æquatio hanc formam induet,

$$\begin{aligned} y^3 * & \text{--- } b^2y \text{ --- } bc(b+c) = 0. \\ & \text{--- } bcy \\ & \text{--- } c^3y \end{aligned}$$

Quadratum ipsius  $b - c$  semper est positivum, cum  $b$  &  $c$  sint quantitates reales. Ponamus illud quadratum ( $bb - 2bc + cc$ ) æquale  $D$ , erit

$$b^2 + bc + c^2 = D + 3bc, \text{ \& } (b+c)^2 = D + 4bc;$$

$$\frac{(b^2 + bc + c^2)^3}{27} = \frac{D^3}{27} + \frac{D^2bc}{3} + Db^2c^2 + b^3c^3,$$

&

$$b^3c^2 \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{Db^3c^2}{4} + b^3c^3.$$

Jam clarum est quod

$$\frac{D^3}{27} + \frac{D^2bc}{3} + Db^2c^2 + b^3c^3 \text{ majus est } \frac{Db^3c^2}{4} + b^3c^3,$$

(totum majus parte), cum  $D$  sit positivum ut etiam  $bc$ ; nam  $b$  &  $c$  sunt radices eodem signo affectæ. Idcirco cubus tertiæ partis tertii termini, signo mutato, ( $\frac{b^2 + bc + c^2}{27}$ ) semper major est quadrato ultimi ter-

mini dimidiati ( $b^3c^2 \frac{(b+c)^2}{4}$ ). In cubica æquatione  $x^3 + qx + r = 0$ ,

si  $q$  sit positivum, vel si  $\frac{q^3}{27}$  minus sit quam  $\frac{1}{4}r^2$ , patet æquationem duas habere radices impossibiles si hoc Corol. conferatur cum Cor. III. Prop. II.

#### PROPOSITIO IV.

In æquatione quadrato-quadratica, cujus omnes radices sunt reales,  $\frac{3}{8}$  quadrati termini secundi semper superant productum ex primo & tertio termino;

&  $\frac{3}{8}$  quadrati quarti termini semper superant productum ex tertio & quinto.

1. Sit æquatio

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0.$$

Cum

Cum omnes radices ponantur reales, vocentur  $a, b, c, d$ . Erit

$$p = a + b + c + d$$

$$q = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Sed patet per Lem. 3. quod

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2$$

majus est quam

$$2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

addendo utrinque

$$6ab + 6ac + 6ad + 6bc + 6bd + 6cd,$$

$$\text{patebit } 3(a + b + c + d)^2$$

majus esse quam

$$8ab + 8ac + 8ad + 8bc + 8bd + 8cd;$$

id est  $3p^2$  majus esse quam  $8q$ , ideoque  $\frac{3}{8} p^2 x^6$  majus quam  $qx^6$ .

2. Cum sit  $r = abc + abd + acd + bcd$ ; &  $s = abcd$ ; & cum

$$qs = a^2 b^2 cd + a^2 c^2 bd + a^2 d^2 bc + b^2 c^2 ad + b^2 d^2 ac + c^2 d^2 ab;$$

quæ summa componitur ex productis quæ oriuntur multiplicando inter se binas quascunque ex quantitatibus  $abc, abd, acd, bcd$ , quarum summa  $= r$ ; sequitur  $3r^2$  semper majus esse, quam  $8qs$ . Ita ut  $\frac{3}{8}$  quadrati secundi vel quarti termini semper superent productum ex terminis utrinque adjacentibus.

### COROLLARIUM.

Multiplicetur quadratum secundi vel quarti termini in æquatione quadrato-quadratica per fractionem  $\frac{3}{8}$ , & si productum illud non excedat productum ex terminis adjacentibus, æquatio habebit quasdam radices impossibiles.

## PROPOSITIO V.

*Sit æquatio cujuscunque dimenfionis, ut m, fiatque coefficientes fecundi, tertii, ultimi, penultimi, antepenultimi, termini refpectivæ A, B, E, D, C; fi radices fint omnes reales, erit  $(m-1) A'$  femper majus, quam  $2mB$ , &  $(m-1) D'$  femper majus quam  $2mCE$ .*

1. Nam pone radices effe  $a, b, c, d, e$ , &c. erit per Lem. 4.  $(m-1) a^m + (m-1) b^m + (m-1) c^m$  &c. majus quam  $2ab + 2ac + 2ad$  &c.; addendo utrinque  $(2m-2) ab + (2m-2) ac + (2m-2) ad$ , &c. fumma  $(m-1) a^m + (2m-2) ab + (m-1) b^m +$  &c. =  $(m-1) (a^m + b^m + c^m +$  &c.) . major erit quam  $2mab + 2mac + 2mad +$  &c. id eft  $(m-1) A'$  majus erit quam  $2mB$ .

2. In genere fequitur ex hac demonstratione, quod quadratum fummae quarumvis quantitatum, quarum numerus eft  $m$ , ductum in  $(m-1)$ , majus eft quam fumma productorum, quæ fiunt multiplicando binas quas- cunque ex illis quantitibus inter fe, ducta in  $2m$ . Sed facile cognofci- tur ex formatione æquationum, quod CE eft fumma productorum quæ fiunt ex multiplicatione binarum quantitatum, quarum fumma eft D. Qua- re fequitur etiam  $(m-1) D'$  majus effe quam  $2mCE$ .

## SECUNDA EPISTOLA EJUSDEM AD EUNDEM,

*De radicibus æquationum, cum demonstratione aliarum quarundam regula- rum Algebrae.*

Anno 1725. ad te fcripti me habere methodum demonftrandi NEWTO- NI regulam de radicibus impoffibilibus in æquationibus, quæ methodus ex hoc claro principio deducitur; quadrata fcilicet differentiarum quanti- tatum realium femper effe pofitiva. Deinde prima hujus methodi princi- pia tibi mifi, quæ in Transactionibus Philofophicis Menfis Maji Anni 1726. in lucem fuere edita. Propofitum, quod ante aliquod tempus habui, edere Tractatum de Algebra, in quo & hunc & quosdam alios fubjectos tractarem nova via, in caufa fuit cur non operæ pretium putarem reliqua tibi mittere; fed quædam me jam movent rationes, ut una cum continua- tione præcedentis methodi, parvum tibi mittam fpecimen duarum aliarum methodorum, quas in eodem fubjecto fum fecutus, cum quibusdam in æquationes obfervationibus, quas novas effe opinor; & quæ forfan magis tibi placebunt, quam quod pertinet ad ipfas radices impoffibiles. Præter NEWTONI regulam, & fequentibus generalibus Propofitionibus multæ variaque oriuntur regulæ inveniendi radices imaginarias, diverfæ tum ab ea, quam NEWTONUS edidit, tum ab omnibus aliis, quæ jam in lu- cem prodierunt; unam fpeciatim exponam, omnibus huc ufque notis uti- liorem.

Ponamus dari æquationem dimensionum  $n$ , & hujus formæ

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - Gx^{n-7} + Hx^{n-8} - Ix^{n-9} + Kx^{n-10} \&c. = 0.$$

Sintque hujus æquationis radices  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$  &c. erit  $A = a + b + c + d + e + \&c.$  Voco itaque  $a, b, c, \&c.$  *Partes* seu *Terminos* coefficientis  $A$ ; eandem ob causam voco  $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be$  &c. *Partes* seu *terminos* coefficientis  $B$ ;  $abc, abd, abe, bcd, \&c.$  *Partes* seu *terminos* coefficientis  $C$ , & sic de ceteris. Per *dimensionem* alicujus termini intelligo numerum radicum, quæ in ejus partibus inter se sunt multiplicatæ, qui numerus semper æqualis est numero terminorum, qui in æquatione hunc coefficientem præcedunt. Sic  $A$  est coefficientis unius dimensionis,  $B$  duarum,  $C$  trium, & sic de ceteris. Partem seu terminum coefficientis  $C$  dico *similem* parti seu termino coefficientis  $G$ , ubi illa pars ipsius  $G$  continet omnes radices partis ipsius  $C$ , sic  $abc$  &  $abcdefg$  sunt partes similes ipsorum  $C$  &  $G$ ; eodem modo  $abcd$ , &  $abcdef$  sunt partes similes ipsorum  $D$  &  $F$ ; cum pars ipsius  $F$  contineat omnes radices partis ipsius  $D$ . *Dissimiles* voco partes, quæ communem radicem non habent, sic  $abc$ , &  $defgh$  sunt partes dissimiles coefficientium  $C$  &  $F$ . Summam omnium productorum, multiplicando partes alicujus coefficientis, ut  $C$ , per similes partes alius coefficientis, ut  $G$ , sic exprimo  $C' \cdot G'$ , ducendo lineolam supra utrumque coefficientem: eodem modo  $D' \cdot F'$  exprimit summam omnium productorum, quæ fieri possunt multiplicando partes similes ipsorum  $D$  &  $F$  inter se, &  $C' \cdot C'$  exprimit summam quadratorum omnium partium coefficientis  $C$ ; sed  $C' \cdot C$ , exprimit summam omnium productorum quæ fiunt multiplicando binos quoscunque terminos ipsius  $C$  inter se. (unde sequitur  $C^2 = C' \cdot C' + 2C' \cdot C$ .) Hisce signis intellectis, & quinque Propositionibus præcedentis epistolæ præmissis, sequitur jam.

### PROPOSITIO VI.

Si differentia dimensionum duorum quorumvis coefficientium ut  $C$  &  $G$ , vocetur  $m$ , erit productum horum coefficientium æquale  $C' \cdot G' + (m+2) B \cdot H' + (\frac{m+3}{1}) (\frac{m+4}{2}) A' \cdot I' + (\frac{m+4}{1}) (\frac{m+5}{2}) (\frac{m+6}{3}) I \cdot K$ .

Ubi  $B$  &  $H$  sunt coefficientes adjacentes ipsis  $C$  &  $G$ ,  $A$  &  $I$  coefficientes adjacentes ipsis  $B$  &  $H$ ,  $I$  &  $K$  coefficientes adjacentes ipsi  $A$  &  $I$ .

Notum est  $C$  esse æquale

$$abc + abd + abe + ahf + abg + \&c.$$

$$G = abcdefg + abcdefh + abcdefi + lcdesgh + \&c.$$

Patet ulterius

19. Quod in producto CG unusquisque terminus ipsius C' G semel oritur, ut  $a^b c^d e^f g^h$ . Sed

20. Quivis terminus ipsius B' H', ut  $a^b c^d e^f g^h$ , potest esse productum vel ex  $abc$  in  $abdefgh$ , vel ex  $abd$  in  $abcefg^h$ , vel ex  $abe$  in  $abcd^fgh$ , vel ex  $abf$  in  $abcdegh$ , vel ex  $abg$  in  $abcdefh$ , vel tandem ex  $abb$  in  $abcdefg$ ; itaque potest esse productum ex quovis termino ipsius C qui cum radicibus,  $ab$ , contineat unam ex reliquis  $c, d, e, f, g, h$ , multiplicato per illum terminum ipsius G, qui cum  $ab$  ceteras quinque radices continet; id est productum illud  $a^b c^d e^f g^h$  tot dabitur vicibus, quot continet radices præter  $a$ , &  $b$ ; vel in genere toties quoties unitas datur in differentia dimensionum ipsorum B & H., id est  $m + 2$  vicibus, quia  $m$  exprimit differentiam dimensionum ipsorum C & G; idcirco, in expressione valoris ipsius CG, coefficientis secundi termini B' H' erit  $m + 2$ .

30. Unusquisque terminus, ipsius A' I', ut  $a^b c^d e^f g^h i$ , potest esse productum ejusvis partis ipsius C, quæ cum radice  $a$  contineat duas quascunque c reliquis  $b, c, d, e, f, g, h, i$ , (quarum numerus æqualis est differentie dimensionum ipsorum A & I, id est in genere  $= m + 4$ ) multiplicata cum illa parte ipsius G quæ cum  $a$  reliquis sex radices continet; itaque  $a^b c^d e^f g^h i$  (vel quivis alius alius ipsius A' I' terminus) tot dabitur vicibus, quot dari possunt diversa producta ex binis quantitatibus, quarum numerus est  $m + 4$ , id est vicibus  $(m + 4) \left( \frac{m+4-1}{2} \right)$ , vel  $\left( \frac{m+3}{1} \right) \left( \frac{m+4}{2} \right)$ ; ideo ad exprimendum valorem ipsius CG, coefficientis tertii termini A' I' debet esse  $\left( \frac{m+3}{1} \right) \left( \frac{m+4}{2} \right)$ .

40. Unusquisque terminus ipsius I in K, ut  $a^b c^d e^f g^h i k$ , potest esse productum ex quavis parte ipsius C, quæ continet tres radices ipsius K, in illam partem ipsius G, quæ alias omnes continet radices; ideo I in K tot orietur vicibus in producto CG, quot fieri possunt diversa producta ex ternis quantitatibus, quarum numerus est  $m + 6$ , id est vicibus  $(m + 6) \left( \frac{m+5}{2} \right) \left( \frac{m+4}{3} \right)$ ; ideoque coefficientis quarti termini in expressione valoris ipsius CG, erit  $\left( \frac{m+4}{1} \right) \left( \frac{m+5}{2} \right) \left( \frac{m+6}{3} \right)$ .

In genere, ad exprimendum valorem producti duorum quorumvis coefficientium, ut C & G; si  $x$  exprimat ordinem alicujus termini hujus valoris, ut ex: gr: ipsius A' I', id est, si  $x$  sit æqualis numero terminorum qui præcedunt A' I', ipsius A' I' coefficientis erit  $\left( \frac{2x+m}{1} \right) \left( \frac{2x+m-1}{2} \right) \left( \frac{2x+m-2}{3} \right)$  &c. tot sumendo fractiones in hac progressionem, quot dantur unitates in  $x$ .



## COROLLARIUM I.

Si per hanc Propositionem quærat quadratum alicujus coefficientis, ut  $E$ , erit  $m = 0$ , differentia dimensionum coefficientium in hoc casu evanescente, & habebimus

$$E^2 = E' \cdot E' + 2D'F' + 3 \cdot \frac{4}{2} C'G' + 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot B'H' \&c. =$$

$$E' \cdot E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K:$$

idcirco, si (ut in definitione)  $E' \cdot E$ , exprimat summam productorum ex binis partibus quibuscunque ipsius  $E$ , erit  $E^2 = E' \cdot E' + 2E' \cdot E$ , ideoque

$$E' \cdot E = D'F' + 3C'G' + 10B'H' + 35A'I' + 126K.$$

## COROLLARIUM II.

Sequitur ex hac Propositione, quod

$$\begin{array}{rcl} E^2 & = & E' \cdot E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K. \\ DF & = & - - - D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K. \\ CG & = & - - - - - C'G' + 6B'H' + 28A'I' + 120K. \\ BH & = & - - - - - - - B'H' + 8A'I' + 45K. \\ AI & = & - - - - - - - - - A'I' + 10K. \\ K & = & - - - - - - - - - - - K. \end{array}$$

## COROLLARIUM III.

Facile quoque patet ex Corol. præcedente, quod

$$\begin{array}{rcl} E' \cdot E' & = & E^2 - 2DF + 2CG - 2BH + 2AI - 2K. \\ D'F' & = & - - DF - 4CG + 9BH - 16AI + 25K. \\ C'G' & = & - - - CG - 6BH + 20AI - 50K. \\ B'H' & = & - - - - - BH - 8AI + 35K. \\ A'I' & = & - - - - - - - AI - 10K. \end{array}$$

## PROPOSITIO VII.

Sit  $1 = n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \&c.$ , sumendo tot fractiones, quot coefficientis

$E$  habet dimensiones, erit semper  $\left( \frac{1-1}{21} \right) E^2$  majus quam  $DF - CG + BH -$

$AI + K$ , si radices æquationis sunt omnes reales.

Patet  $1$  exprimere numerum partium seu terminorum qui dantur in coefficienten-

ficiente E; patet quoque ex Prop. V. quod  $(\frac{l-1}{2l}) E^2$  semper majus esse debet, quam summa productorum, quæ sunt multiplicando binas partes quascunque ipsius E inter se, id est majus quam  $E'.E$ ; Sed  $2E'.E = E^2 - E'.E' =$  (per Theor. 1. Corol. ultimi)  $2DF - CG + 2BH - 2AI + 2K$ ; idcirco, cum  $(\frac{l-1}{2l}) E^2$  semper majus quam  $E'.E$ , sequitur quod  $(\frac{l-1}{2l}) E^2$  etiam majus est quam  $DF - CG + BH - AI + K$ , si æquationis radices sint omnes reales.

## S C H O L I U M.

Hæc prima fuit generalis propositio, quæ sequendo methodum meam mihi occurrebat. Cum enim primo observarem, quod, si  $l$  exprimat numerum quarumvis quantitatum, quadratum illarum summæ ductum in  $\frac{l-1}{2l}$  semper majus esset summa productorum quæ sunt multiplicando binas quascunque ex illis inter se, & quod excessus esset æqualis summæ quadratorum differentiarum harum quantitatum divisæ per  $2l$ , facile inde patebat, quod si in æquatione

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \&c. = 0,$$

ubi B est summa productorum quæ oriuntur ex multiplicatione binarum radicum inter se, si  $l$  exprimat numerum radicum in æquatione,  $(\frac{l-1}{2l}) A^2$  semper esse majus quam B; atque hæc est una pars Prop. V. Deinde comparavi summam productorum ex binis partibus ipsius B, cum producto AC, illamque summam inveni æqualem non ipsi AC, sed  $AC - D$ ; unde collegi quod, si  $l$  exprimat numerum partium ipsius B, tunc  $(\frac{l-1}{2l}) B^2$  semper est majus quam  $AC - D$ , hæcque facile me duxerunt ad hanc generalem Propositionem.

## P R O P O S I T I O V I I I.

*Exprimat  $r$  dimensiones coefficientis C, &  $s$  differentiam dimensionum coefficientium C & G, sint B & H coefficientes adjacentes ipsis C & G, erit semper  $(n-r-s) \cdot C'G'$  majus quam  $(s+1)(s+2)BH$ , si omnes æquationis radices sint quantitates reales, eodem signo affectæ.*

Nam sumendo differentias omnium harum partium ipsius C, quæ habent omnes

omnes radices communes præter unam, ut  $abc$ ,  $abb$ ,  $abi$ , &c. & multiplicanda quadrata harum differentiarum per illas partes coefficientis  $D$ , quæ sunt dissimiles utrique parti summat differentiæ, (requiritur ut coefficientis  $D$  sit dimensionum  $s$ ), summa omnium horum quadratorum ita multiplicatorum consistet ex terminis ipsius  $C'G'$  positive sumtis, & ex terminis ipsius  $B'H'$  negative sumtis. Multiplicando hoc modo

$$\begin{aligned} & (abc - abb)^2 + (abc - abi)^2 + (abc - abk)^2 \&c. \\ & + (abc - ach)^2 + (abc - aci)^2 + (abc - ack)^2 \&c. \\ & + (abc - bch)^2 + (abc - bci)^2 + (abc - bck)^2 \&c. \end{aligned}$$

per  $defg$ , (terminum ipsius  $D$ , qui est dissimilis omnibus hisce partibus ipsius  $C$ ), patebit quod  $a^2b^2c^2defg$  dabitur in summa productorum vicibus  $r$  ( $n - r - s$ ); hæc enim producta possunt etiam sic exprimi

$$\begin{aligned} & defga^2b^2 ((c - b)^2 + (c - i)^2 + (c - k)^2 + \&c.) \\ & + defga^2c^2 ((b - h)^2 + (b - i)^2 + (b - k)^2 + \&c.) \\ & + defgb^2c^2 ((a - h)^2 + (a - i)^2 + (a - k)^2 + \&c.) \end{aligned}$$

ubi numerus differentiarum  $c - b$ ,  $c - i$ ,  $c - k$ , &c. quarum quadrata ducuntur in  $defga^2b^2$ , manifeste æqualis est numero radicum æquationis, quæ non dantur in  $a^2b^2c^2defg$ , vel in  $abcdefg$ , id est, æqualis excessui numeri radicum æquationis, supra dimensiones ipsius  $abcdefg$ , qui est terminus ipsius  $G$ , id est tandem æqualis  $n - r - s$ . Sed colligendo in unam summam omnia illa producta, terminus ( $n - r - s$ )  $a^2b^2c^2defg$  toties dabitur, quoties unitas datur in  $r$ ; quia termini, qui subtrahuntur ex  $abc$ , possunt ab illo differre vel per defectum radicis  $c$ , ut  $abb$ ,  $abi$ ,  $abk$ , &c., vel per defectum radicis  $b$ , ut  $ach$ ,  $aci$ ,  $ack$  &c., vel per defectum radicis  $a$ , ut  $bch$ ,  $bci$ ,  $bck$  &c. id est terminus ( $n - r - s$ )  $a^2b^2c^2defg$  tot vicibus debet oriri, quot dantur dimensiones in  $abc$ , uno ex terminis ipsius  $C$ , vel quot dantur unitates in numero  $r$ , qui exprimit dimensiones ipsius  $C$ ; ideoque terminus  $a^2b^2c^2defg$  dabitur in summa dictorum productorum vicibus  $r$  ( $n - r - s$ ).

Pars negativa consistet ex terminis ipsius  $B'H'$  duplicatis, quorum unusquisque, ut  $a^2b^2cdefgh$ , tot oriri debet vicibus, quot dari possunt differentiæ  $c - d$ ,  $c - e$ ,  $c - f$ ,  $c - g$ ,  $d - e$  &c. inter terminos  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  &c., quorum numerus est æqualis  $s + 2$ ; id est, terminus  $2a^2b^2cdefgh$  dari debet vicibus  $(s + 2) \left( \frac{s + 1}{2} \right)$ ; ideoque  $a^2b^2cdefgh$ , vel quivis alius ipsius

$B'H'$  terminus dari debet in parte negativa  $(s + 1)(s + 2)$ ; cum autem tota summa sit positiva, sequitur quod ( $n - r - s$ )  $r C'G'$  semper majus est quam  $(s + 1)(s + 2) B'H'$ .

## COROLLARIUM I.

Sit comparandum  $E'E'$ , summa quadratorum partium ipsius  $E$ , cum  $D'F'$  summa productorum ex partibus similibus ipsorum  $D$  &  $F$ ; in hoc casu  $s$  evanescit, &  $(n-r)r$   $E'E'$  debet esse majus quam  $2D'F'$ . Sit  $(n-r)r = m$ , erit

$$(n-r-1)(r-1) = m - n + 1;$$

&amp;

$$(n-r-2)(r-2) = m - 2n + 4;$$

&amp;

$$(n-r-3)(r-3) = m - 3n + 9;$$

&amp;

$$(n-r-4)(r-4) = m - 4n + 16,$$

patet enim in genere, quod

$$(n-r-q)(r-q) = (n-r)r - qn + qq = m - qn + qq$$

Tunc, per hanc propositionem, supponendo

$$\begin{array}{rcl} mE'E' & = & 2D'F' = a' \\ (m-n+1)D'F' & = & 12C'G' = b' \\ (m-2n+4)C'G' & = & 30B'H' = c' \\ (m-3n+9)B'H' & = & 56A'I' = d' \\ (m-4n+16)A'I' & = & 90K' = e' \end{array}$$

Quantitates  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$ , semper debent esse positivæ, ubi omnes æquationis radices sunt quantitates reales eodem signo affectæ; coefficientes partibus negativis præfixi sunt numeri 2, 12, 30, 56, quarum differentia crescunt per 8 in progressionem arithmetica.

## COROLLARIUM II.

Ponendo ut supra  $(n-r)r = m$ , ut etiam  $m(m-n+1) = m'$ ,  $m'(m-2n+4) = m''$ ,  $m''(m-3n+9) = m'''$ , potest demonstrari eodem modo, quo hæc Propositio demonstrata fuit, quod si sit

$$\begin{array}{rcl} mE'E' & = & 2D'F' = a' \\ m'E'E' & = & 2 \cdot 12C'G' = a'' \\ m''E'E' & = & 2 \cdot 12 \cdot 30B'H' = a''' \\ m'''E'E' & = & 2 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 56A'I' = a'''' \text{ \&c.} \end{array}$$

Erunt

Erunt  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$ , &c. semper positiva, si radices æquationis sint reales, sive iisdem signis afficiantur sive diversis. Coefficientes negativi sunt ducendo coefficientes 2, 12, 30, 56, 90, Cor. præcedentis in se invicem.

## PROPOSITIO IX.

Exprimant  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$ , &c. in easdem quantitates ac in Corollariis ultimæ Propositionis, &c. erit  $mE^2 = (m+n+1) DF$   
 $= a' + b' + c' + 5d' + 14e'.$

Nam per Cor. 2. Prop. VI.

$$E^2 = E'E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K,$$

& per idem Cor.

$$DF = \dots D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K;$$

Ergo

$mE^2 = (m+n+1) DF = mE'E' + (m-n-1) D'F' + (m-2n-2) 2C'G' + (m-3n-3) 5B'H' + (m-4n-4) 14A'I' + (m-5n-5) 42K =$  (substituendo successive pro  $mE'E'$ ,  $(m-n+1) D'F'$ ,  $(m-2n+4) C'G'$ ,  $(m-3n+9) B'H'$ ,  $(m-4n+16) A'I'$ , ipsorum valores deductos ex primo Corol. Propositionis præcedentis)  $a' + b' + 2c' + 5a' + 14e'$ , ubi coefficientes præfixi ipsius  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ ,  $e'$ , sunt differentię coefficientium ipsorum  $E'E'$ ,  $D'F'$ ,  $C'G'$ ,  $B'H'$ ,  $A'I'$ , &  $K$  in valoribus ipsorum  $E'$  &  $DF$  desumptis ex Corol. 2. Prop. VI. suntque  $1-0$ ,  $2-1$ ,  $6-4$ ,  $20-15$ ,  $70-56$ , &  $252-210$ .

## COROLLARIUM.

Cum sit  $m = (n-r)r$ , ideoque  $m+n+1 = (n-r+1)(r+1)$ , sequitur, quod  $(\frac{r}{r+1})(\frac{n-r}{n-r+1}) E^2$  semper debet esse majus quam  $DF$ , productum ex coefficientibus adjacentibus ipsi  $E$ ; atque inde deducuntur fractiones, quæ in NEWTONI regula scribuntur supra terminos æquationis, & quæ multiplicatæ per quadrata terminorum, quibus supereminent, semper debent efficere productum majus producto ex terminis adjacentibus; si radices æquationis si reales. Manifestum enim est, quod fractio scribenda super terminum  $E^{n-r}$  est quotus divisionis ipsius  $\frac{n-r}{r+1}$  per  $\frac{n-r+1}{r}$ .

PROPOSITIO X.

*Iisdem notis servatis ac in Propositionibus præcedentibus, eodem modo  
invenietur, quod, ut*

$$\begin{array}{lcl}
 m^2 & \text{---} & (m + n + 1) \text{ DF} = a' + b' + 2c' + 5d' + 14e' \text{ jita} \\
 (m - n + 1) \text{ DF} & \text{---} & (m + 2n + 4) \text{ CG} = -b' + 3c' + 9d' + 28e' \\
 (m - 2n + 4) \text{ CG} & \text{---} & (m + 3n + 9) \text{ BH} = -c' + 5d' + 20e' \\
 (m - 3n + 9) \text{ BH} & \text{---} & (m + 4n + 16) \text{ AI} = -d' + 7e' \\
 (m - 4n + 16) \text{ AI} & \text{---} & (m + 5n + 25) \text{ K} = -e'
 \end{array}$$

Hæc theorematà facile deducuntur ex iis, quæ habentur in Cor. 2. Prop. VI. & in Cor. 1. Prop. VIII. & coefficientes præfixi ipsis  $a, b, c, d, e$ , sunt differentię coefficientium terminorum respondentium in valoribus ipsorum  $E^2, DF, CG, BH, AI$ , &  $K$ , in Corol. 2. Prop. VI.

COROLLARIUM.

Inde producta duorum quorumvis coefficientium inter se possunt conferri, ut DF & AI, si summa dimensionum ipsorum D & F sit æqualis summæ dimensionum ipsorum A & I. Sint dimensiones ipsorum A & F respective æquales ipsis  $s$ , &  $m$ , sitque  $p = \left(\frac{m-s}{s+1}\right) \left(\frac{m-s-1}{s+2}\right) \left(\frac{m-s-2}{s+3}\right)$  &c. tot sumendo fractiones, in eadem progressionē, quot dantur unitates in differentia dimensionum ipsorum D & A. Sit  $q = \left(\frac{m-m}{m+1}\right) \left(\frac{m-m-1}{m+2}\right) \left(\frac{m-m-2}{m+3}\right)$  &c., tot sumendo fractiones, quot sumtæ fuerunt in valore ipsius  $p$ . Erit semper  $\frac{q}{p}$  in DF majus quam AI si omnes radices æquationis sint quantitates reales, eodem signo affectæ. Hæc regula etiam locum habet, licet radices diversis afficiantur signis, si modo coefficientes D & F sint æquales.

PROPOSITIO XI.

*Iisdem positis ac in Propositionibus præcedentibus;*

[illegible]

Hæc theorematata facile deducuntur ex Cor. 3. Prop. VI. Primum clare patet hoc modo,  $a' = mE'E' - 2D'F' =$  (per dictum Corollarium)

$$\left. \begin{aligned} mE^3 - 2mDF + 2mCG - 2mBH + 2mAI - 2mK \\ - 2DF + 8CG - 18BH + 32AI - 50K \end{aligned} \right\} = mE^3 - (m+1)2DF + (m+4)2CG - (m+9)2BH + (m+16)2AI - (m+25)2K.$$

Reliqua theorematata deducuntur ex eodem Corollario collato cum Cor. 1. Prop. VIII.

## PROPOSITIO XII.

*Isdem positis ac in Cor. 2. Prop. VIII. erit*

$$1. \left. \begin{aligned} mE^3 - (m+1)2DF + (m+4)2CG - (m+9)2BH + (m+16)2AI \\ - (m+25)2K \end{aligned} \right\} = a'.$$

$$2. \left. \begin{aligned} m'E^3 - 2m'DF + (m'-12)2CG - (m'-72)2BH + (m'-240)2AI \\ - (m'-600)2K \end{aligned} \right\} = a'.$$

$$3. \left. \begin{aligned} m''E^3 - 2m''DF + 2m''CG - (m''+360)2BH - (m''+360)8 \cdot 2AI \\ - (m''+360)35 \cdot 2K \end{aligned} \right\} = a''.$$

$$4. \left. \begin{aligned} m'''(E^3 - 2DF + 2CG - 2BH) + (m''' - 750 \cdot 28)2AI \\ - (m''' - 7200 \cdot 28)2K \end{aligned} \right\} = a'''.$$

Hæc theorematata fluunt ex Cor. 3. Prop. VI. collato cum Corol. 2. Prop. VIII. Primum idem est ac primum in Propositione præcedente. Secundum demonstratur substituendo in  $mE'E' - 24C'G' = a'$  valores ipsorum  $E'E'$  &  $C'G'$  ex Corol. 3. Prop. VI. Tertium invenitur substituendo in  $m'E'E' - 720B'H' = a''$  valores ipsorum  $E'E'$  &  $B'H'$ ; atque simili substitutione continuari possunt hæc theorematata.

## COROLLARIUM GENERALE.

Ex hisce Propositionibus, magna deducitur varietas regularum, quibus inveniri potest, num æquatio aliqua habeat radices imaginarias, nec ne; Fundamentum regulæ NEWTONIANÆ demonstratur Prop. IX. & ipsius Corollariis. Septima Propositio ostendit, quod si  $(\frac{l-1}{2l})E'$  non sit majus quam  $DF - CG + BH - AI + K$ , quædam æquationis radices debent esse imaginariæ; atque hæc regula aliquando detegit radices imaginarias, quæ per NEWTONI regulam non apparent. Huc usque nulla regula præter hæc duas publicata fuerat. Sed regulæ, quæ ex theorematibus propositionum XI. & XII. deducuntur, utrique præcedenti sunt præ-

præferendæ; quia quæ radices imaginariæ possunt cognosci propositionibus VII. & IX., hæ semper patebunt per propositiones XI. & XII., & sæpe per has propositiones deteguntur radices impossibiles, quæ non apparent, si æquationes per propositiones VII. & IX. tantum examinentur. Utilitas, quam habent regulæ ex prop. XI. deductæ, præ illis, quæ ex præcedentibus deducuntur, plane patebit, si consideretur, quod per prop. XI. habemus valores quantitatum  $a', b', c', d', e'$  separatim, cum per propositiones præcedentes habeamus tantum valores quarundam summarum earundem quantitatum eodem signo unitarum. Jam facile patet, quod si hæ quantitates separatim sumtæ inveniuntur positivæ, aggregatum quodcumque quarumvis illarum quantitatum debet etiam esse positivum; sed illud aggregatum potest esse positivum, licet quædam ex hisce quantitativibus,  $a', b', c', d', e'$  sint negativæ. Unde sequitur si radices æquationis afficiantur omnes eodem signo, nullaque appareat per prop. XI. radix impossibilis, nullam quoque apparere per propositiones præcedentes; quasdam vero radices imaginarias per XI. detegi posse ubi nullæ per propositiones, quæ hanc præcedunt, apparent. Si quædam æquationis radices sint positivæ, & quædam negativæ, (quod facile patebit considerando signa terminorum) tunc in multis casibus XII. propositio utilior erit ad detegendas radices imaginarias, quam quævis ex præcedentibus.

Regula, quæ sequitur ex primo theoremate prop. XII. locum habet, siue radices æquationis diversis afficiantur signis, siue eodem. Multiplicetur numerus, qui exprimit, quot termini in æquatione datum terminum, ut  $Ex^{n-r}$ , præcedunt, per numerum terminorum qui sequuntur in eadem æquatione, dicaturque productum illud  $m$ ; sintque  $+D, -C, +B, -A, +I$  coefficientes terminorum, qui præcedunt ipsum  $Ex^{n-r}$ , sintque  $+F, -G, +H, -I, +K$ , coefficientes terminorum sequentium; si  $\frac{1}{2}mE^2$  non sit majus quam

$$(m+1)DF - (m-4)CG + (m-9)BH - (m+16)AI + (m+25)K,$$

æquatio habebit aliquas radices imaginarias; coefficientes  $m+1, m+4, m+9$ , &c. oriuntur addendo ipsi  $m$  quadrata numerorum 1, 2, 3, 4, &c., qui denotant distantias coefficientium, a coefficiente  $E$ . Secundum theorema prop. XII. ostendit, quod si  $\frac{1}{2}m'E^2$  non sit majus quam

$$m'DF - (m'-12)CG + (m'-72)BH - (m'-240)AI + (m'-600)K$$

æquatio habebit aliquas radices imaginarias. Exempli gratia

Si quatuor radices æquationis quadrato quadraticæ, ut

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

sint



sint quantitates reales, deduci potest ex quavis propositionum V, VII, IX, & XI, quod  $\frac{3}{8} A^2$  debet esse majus quam B, &  $\frac{3}{8} C^2$  majus quam BD. Prop. VII. ulterius ostendit, quod  $\int_{12} B^2$  debet esse majus quam AC—D;

nona demonstrat, quod  $\frac{4}{9} B^2$  debet excedere AC; sed regula nostra, deducta ex prop. XI. ostendit quod  $2B^2$  debet excedere  $\int AC—8D$ , cum excessus sit  $\frac{1}{2} a'$ , & regula deducta ex secundo theoremate prop. XII. ostendit, quod  $B^2$  debet semper esse majus quam  $2AC+4D$ , cum excessus sit  $\frac{1}{4} a''$ . Patet ex plurimis præcedentibus propositionibus, quod si radices æquationis habeant omnes idem signum, AC debet esse majus quam  $16D$ . Sint dicti excessus  $\int B^2—12AC+12D=p$ ,  $4B^2—9AC=q$ ,  $AC—16D=s$ . patet, quod  $a' (=4B^2—10AC+16D)=q-s=\frac{2}{5} \cdot (2p—s)$ , & quod  $a''=q+s=\frac{2}{5} \cdot 2p+4s$ . Ponamus nunc,

1. Quod  $s$  est positivum, & patebit, quod si sit vel  $p$ , vel  $q$  negativum,  $a'$  debet etiam esse negativum; per consequens ubi VII. vel IX. propositio ostendit radices aliquas esse imaginarias, prop. XI. easdem quoque detegit; sed quia  $a' = q—s = \frac{2}{5} (2p—s)$ , potest inveniri negativum, ubi tamen  $p$  &  $q$  est utrumque positivum, sequitur, quod regula, ex prop. XI deducta, possumus in data æquatione detegere radices imaginarias, quæ per propositiones præcedentes non apparent; sic si per NEWTONI regulam, vel per prop. VII. examinemus hac æquationem,

$$x^4—6x^3+10x^2—7x+1=0,$$

nulla apparebit radix imaginaria; sed cum  $2B^2—\int AC+8D (= \frac{1}{2} a') = 200—210+8=—2$ , fiat in hac æquatione negativum, patet duas hic dari radices imaginarias. Ponamus

2. Quod  $s$  sit negativum, & quod pateat ex signis æquationis aliquas radices esse positivas, aliquas negativas; in hoc casu, ut sciamus an æquatio habeat radices imaginarias, utilissima est regula quam deduximus ex 2 theor. prop. XII; scilicet, quod, si  $B^2$  non sit majus quam  $2AC+4D$ , quædam æquationis radices debent esse imaginariæ; cum enim excessus ipsius  $B^2$  supra  $2AC+4D$  sit  $=$

$$\frac{1}{4} a'' = \frac{1}{4} (q+s) = \frac{1}{10} (2p+4s), \text{ atque } s \text{ sit negativum, manifestum est,}$$

quod si  $q$  vel  $p$  sit negativum,  $\frac{1}{4} a'$  debet esse negativum; potest etiam  $\frac{1}{4} a''$  esse

esse negativum, licet utrumque  $p$  &  $q$  sit positivum. Hæc itaque regula semper detegit, quasdam dari radices imaginarias, si quædam detegantur per Prop. VII. vel IX.; & sæpe ubi per hæc Propos. nullæ tales deteguntur radices, quædam tamen deteguntur per dictam regulam. Exemp. gr. Si examinetur hæc æquatio

$$x^4 + 7x^3 + 6x^2 - x - 12 = 0$$

nullæ deteguntur radices imaginariæ per Prop. VII. vel IX., & licet  $AC - 16D (= 5)$  sit negativum, non tamen inde sequitur dari in æquatione radices impossibiles, quia patet ex signis terminorum radices hujus æquationis diversis affici signis; sed quia  $B^2 - 2AC + 4D (= 36 + 10 - 48 = -2)$  est negativum, patet per nostram regulam hanc æquationem habere aliquas radices imaginarias.

Possẽm ostendere præterea, quomodo ope regularum ex propositionibus XI. & XII. deductarum detegi possit, num æquatio habeat plus quam duas radices impossibiles, & in genere, quomodo hisce regulis determinetur numerus radicum impossibilium; sed ut hoc strictè demonstretur, longa nimis explicatione, & quibusdam Lemmatibus indigerem: hoc tantum observandum, quod hæc propositiones XI. & XII. utilissimæ inveniuntur inter omnes, quas in hunc usum explicavi; Ex. gr. si æquatio hæc

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & - & 4ax^3 & + & 6a^2x^2 & - & 4ab^2x + b^4 = 0 \\ + & & & & + & & + \end{array}$$

examinetur per regulam NEWTONI, inveniuntur habere quatuor radices impossibiles, si  $a$  sit majus quam  $b$ ; licet enim quadratum secundi termini ductum in fractionem  $\frac{3}{8}$  sit æquale producto ex primo & tertio termino, in hoc casu tamen signum — ponendum est sub secundum terminum. Idem dicendum de quarti termini quadrato.

Regula deducta ex Prop. VII. ostendit quatuor dari radices imaginarias, si  $a$  sit majus quam  $b$ , vel si  $b^4$  sit majus quam  $15a^4$ . Sed regula deducta ex Prop. XI. ostendit quatuor radices esse semper imaginarias, ubi  $a$  est majus quam  $b$ , vel  $b^4$  majus quam  $9a^4$ ; unde patet regulæ hujus excellentia præ duabus hisce aliis. Tam multa dixi de æquationibus quadrato-quadraticis, ut observationes, quæ in æquationes plurium dimensionum fieri possunt, iis relinquere cogar, qui hoc sibi pensum inponere volent.

Dum præcedentes Propositiones investigarem, supputationes tam intricatas mihi fuit ineundum, ut sæpe conatus fuerim faciliorem detegere methodum hanc tractandi materiam. Hæc, quæ sequitur, multum mihi profuit, nec tibi forte injucunda videbitur; per hanc *maxima* quædam investigo facillima via, quæ vulgari methodo non ita commode possent demonstrari.

LEM.

## L E M M A V.

Data linea AB in duas partes ad libitum sc̄cta ut in P, dico rectangulum ex partibus AP & PB fore *maximum*, si hæ partes sint æquales. TAB.  
XIII.  
Fig. a.  
tet ex Elementis *Euclidis*.

## L E M M A V I.

Si linea AB dividatur in partes quotcunque AC, CD, DE, EB, productum ex omnibus hisce partibus erit *maximum*, ubi hæ partes sunt æquales inter se. TAB.  
XIII.  
Fig. b.

Sit enim punctum D ubi placeat, manifestum est, quod si DB secetur in duas partes æquales in E, productum AC . CD . DE . EB majus erit, quam AC . CD . DE . EB, quia per Lemma præcedens DE . EB majus est quam DE . EB. Eandem ob rationem AD & CE debent æqualiter secari in C & D, per consequens necesse est ut omnes partes AC, CD, DE, EB sint æquales, ut productum ex iis omnibus sit *maximum*.

## L E M M A V I I.

Summa productorum, quæ fieri possunt ex binis partibus ipsius AB est *maxima*, ubi hæ partes sunt æquales. Summa horum productorum est AC . CB + CD . DB + DE . EB. Jam ut DE . EB sit *maximum*, DB debet æqualiter secari in E, per Lem. V. Eandem ob causam AD & CE debent æqualiter secari in C & D, idest omnes partes AC, CD, DE, EB debent esse æquales, ut summa omnium horum productorum sit *maxima*.

## L E M M A V I I I.

Summa productorum ex ternis partibus lineæ AB est *maxima*, ubi omnes partes sunt æquales. Hæc summa est AC . CD . DE + EB (AC . CD + AC . DE + CD . DE). Sit punctum E datum, manifestum est, quod AE debet æqualiter secari in C & D ut AC . CD . DE sit *maximum* per Lem. VI. & ut AC . CD + AC . DE + CD . DE sit *maximum* per Lem. VII. Unde sequitur, quod omnes hæ partes AC, CD, DE, EB debent esse æquales, ut summa productorum ex ternis illis sit *maxima*.

## L E M M A I X.

Manifestum est hanc ratiocinandi methodum esse generalem, &, quod si summa quarumvis quantitatum sit data, summa omnium productorum, quæ fieri possunt multiplicando datum illarum numerum inter se, debet esse *maxima*, ubi hæ quantitates sunt æquales; sed summa quadratorum, cuborum, vel in genere, singularum harum quantitatum ad quamvis potentiam elevatorum, est *minima* ubi hæ quantitates sunt æquales.

## T H E O R E M A.

Ponamus  $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$  esse  
æquationem cujus omnes radices non sunt æquales: exprimat  $r$  dimensionem  
alicujus coefficientis, ut ipsius  $D$ ; sitque  $1 = n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \left( \frac{n-3}{4} \right) \&c.$  tot

sumendo factores, quot dantur unitates in  $r$ . erit semper  $\frac{1}{n^r} \cdot A^r$  majus quam

$D$ , si radices æquationis sint quantitates reales, eodem signo affectæ.

Hoc potest demonstrari per Prop. præcedentes; sed ut demonstremus  
per postrema Lemmata, sumamus æquationem, cujus omnes radices sint  
æquales, illarumque radicum summa  $= A$ , summa radicum æquationis  
propositæ, æquatio assumpta erit  $(x - \frac{1}{n} A)^n = 0$ ,

vel

$$x^n - Ax^{n-1} + n \left( \frac{n-1}{2} \right) \frac{A^2}{n^2} x^{n-2} - n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \frac{A^3}{n^3} x^{n-3} \&c. = 0;$$

& si  $r$  exprimat dimensionem coefficientes alicujus termini hujus æquationis  
(idest numerum terminorum, qui illum coefficientem præcedunt) mani-  
festum est quod ipse terminus erit  $l \cdot \frac{A^r}{n^r} \cdot x^{n-r}$ ; sed per suppositionem

$Dx^{n-r}$  est terminus correspondens in æquatione proposita, &  $D$  debet  
esse summa omnium productorum, quæ fieri possunt multiplicando tot  
radices æquationis inter se, quot dantur unitates in  $r$ . &  $\frac{A^r}{n^r}$  debet esse  
summa similium productorum, ex radicibus æquationis assumptæ, quæ ul-  
tima summa maxima est, per Lem: præcedens, quia æquationis assumptæ  
radices sunt omnes æquales, earumque summa æqualis summa radicum  
æquationis propositæ, & summa ejusmodi productorum est maxima, ubi  
quantitates sunt æquales inter se.

Sequendo eandem methodum potest demonstrari, quod  $\frac{2B}{n(n-1)} \cdot \frac{r}{2} l$   
semper majus esse debet quam coefficientis termini  $x^{n-r}$  in æquatione, cujus  
radices sunt quantitates reales, eodem signo affectæ, dummodo  $r$  sit nu-  
merus major quam 2. Eodem modo  $\left( \frac{2 \cdot 3C}{n(n-1)(n-2)} \right) \frac{r}{3} l$  debet esse  
majus

maius dicto coefficiente, si  $r$  sit numerus major quam 3. Hæc theorema-  
ta facile possunt continuari.

Tertia methodus, de qua initio hujus epistolæ mentionem feci, deducitur ex consideratione limitum radicum æquationis, & licet, quod ad hos limites adtinet, jam ab aliis auctoribus fuerit explicatum, quia tamen illud diversa via demonstro, atque huic materiæ applico, breviter hujus methodi dabo rationem.

### LEMMA X.

Si transformetur æquatio quadrato-quadratica

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

in aliam quæ habeat omnes suas radices respectivé minores valoribus ipsius  $x$ , data quantitate  $e$ , ponendo  $y = x - e$ , vel  $y + e = x$ , æquatio transformata, inverso terminorum ordine, hanc induet formam.

$$\begin{array}{r} e^4 + 4e^3y + 6e^2y^2 + 4ey^3 + y^4 = 0. \\ - Ae^3 - 3Ae^2y - 3Aey^2 - Ay^3 \\ + Be^2 + 2Be y + By^2 \\ - Ce - Cy \\ + D \end{array}$$

Ubi manifestum est

1°. Quod primus terminus  $e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$ , est quantitas, quæ oritur substituendo  $e$  pro  $x$  in æquatione proposita,

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D.$$

2°. Quod coefficientis secundi termini

$$4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$$

est quantitas, quæ oritur multiplicando unamquamque partem primæ

$$e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$$

per indicem ipsius  $e$  in illa parte, & dividendo productum per  $e$ .

3°. Coefficientis tertii termini  $6e^2 - 3Ae + B$  oritur ex præcedente,

$$4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$$

multiplicando unamquamque partem per indicem ipsius  $e$ , & dividendo productum per  $2e$ .

4. Coefficientis quarti termini oritur eodem modo ex præcedente, ubi productum dividendum est per  $3e$ . Et in genere coefficientis cujusvis ter-  
mi-

mini deduci potest ex coefficiente termini præcedentis, multiplicando unamquamque partem per indicem ipsius  $e$ , & dividendo productum per  $e$ , & per indicem ipsius  $y$  in termino, qui quæritur.

### LEMMA XI.

Si quævis æquatio transformetur eodem modo, ut

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0,$$

supponendo  $y = x - e$ , vel  $x = e + y$ , & per consequens  $x^n = (e + y)^n$ ,  $Ax^{n-1} = A(e + y)^{n-1}$ ,  $Bx^{n-2} = B(e + y)^{n-2}$  &c. æquatio transformata, inverso terminorum ordine hanc induet formam.

$$\begin{aligned} & e^n + n \cdot e^{n-1} y + n \cdot \frac{n-1}{2} e^{n-2} y^2 + \&c. \\ & - Ae^{n-1} - (n-1) Ae^{n-2} y - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) Ae^{n-3} y^2 + \&c. \\ & + Be^{n-2} + (n-2) Be^{n-3} y + (n-2) \left( \frac{n-3}{2} \right) Be^{n-4} y^2 + \&c. \\ & - Ce^{n-3} - (n-3) Ce^{n-4} y - (n-3) \left( \frac{n-4}{2} \right) Ce^{n-5} y^2 + \&c. \\ & \&c. \qquad \qquad \&c. \qquad \qquad \&c. \end{aligned}$$

Ubi patet

1°. Quod primus terminus  $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3}$  &c. est quantitas, quæ oritur substituendo  $e$  loco ipsius  $x$  in æquatione

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c.$$

2°. Quod coefficientis secundi termini

$$ne^{n-1} - (n-1) Ae^{n-2} + (n-2) Be^{n-3} - (n-3) Ce^{n-4} + \&c.$$

deducitur ex præcedente, multiplicando quasvis ejus partes per indicem ipsius  $e$  in illa parte, & dividendo productum per  $e$ ,

3°. Quod coefficientis tertii termini deducitur ex coefficiente secundi, multiplicando eodem modo quamvis ejus partem per indicem ipsius  $e$  in illa parte, & dividendo per  $2e$ . In genere, coefficientis cujusvis termini, ut  $y^r$ , deducitur

citur ex coefficiente termini præcedentis, videlicet  $y^{r-1}$ , multiplicando quamvis partem hujus coefficientis, per indicem ipsius  $e$  in illa parte, & dividendo productum per  $re$ , id est per  $e$  ductum in indicem ipsius  $y$ .

## L E M M A XII.

Si substituatur per vices duæ quælibet quantitates K & L loco ipsius  $x$  in æquatione

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

& quantitates, quæ ex hisce substitutionibus oriuntur, sint affectæ diversis signis, erunt K & L limites unius vel plurium radicum realium æquationis propositæ; id est una harum quantitatū debet esse major, altera minor, quam una aut plures radices reales hujus æquationis.

Si enim supponas  $a, b, c, d$  esse radices hujus æquationis, pater, ex æquationum generi, quod

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d);$$

ideoque si substituatur K & L pro  $x$ , in

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

& productum sit in uno casu positivum, & in altero negativum, sequitur quod unus ex dictis factoribus, si K pro  $x$  substituatur, debet habere signum diversum ab eo, quod habet, si L pro  $x$  substituatur. Ponamus illum factorem esse  $x - b$ , cum K  $= b$ , & L  $= b$  sint quantitates, quarum una est positiva, & altera negativa, sequitur quod  $b$ , una e radicibus æquationis, debet esse minor quam una, & major quam altera harum quantitatū K & L. Id est K & L erunt limites hujus radices.

Dico porro, quod radix cujus K & L sunt limites, debet esse radix realis propositæ æquationis. Producti enim ex factoribus, qui radices impossibiles continent in æquatione nunquam potest signum mutari, quævis quantitas realis substituatur pro  $x$ , quia numerus ejusmodi radicem semper est par; & productum e duabus talibus radicibus, ut  $(x - m - \sqrt{m^2 - n^2})(x - m + \sqrt{m^2 - n^2})$  est  $(x - m)^2 + n^2$ , quod semper est positivum, quæcunque quantitas pro  $x$  substituatur, dum  $n^2$  manet positivum, id est, dum hæ duæ radices manent impossibiles.

## L E M M A XIII.

Si substituantur K & L per vices pro  $x$  in æquatione  $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$  &c, & quantitates, quæ inde oriuntur, diversis afficiantur signis, erunt K & L limites unius vel plurium radicum æquationis propositæ: hoc Lemma eodem modo ac præcedens potest demonstrari.

## THEOREMA I.

Si  $a, b, c, d$  sint radices æquationis

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

erunt hæc limites æquationis

$$4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0.$$

Ponamus  $a$  esse minimam e radicibus æquationis quadrato-quadraticæ

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

$b$  secundam,  $c$  tertiam,  $d$  quartam; erunt valores ipsius  $y$  in æquatione Lemmatis X,  $a - e, b - e, c - e, d - e$ ; deinde substituendo successively  $a, b, c, d$  pro  $e$  in dicta æquatione ipsius  $y$ , unus e valoribus hujus evanescet in una quaque substitutione; & primo termino æquationis ipsius  $y$ , videlicet  $e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$ , evanescente, æquatio reductetur ad cubicam hujus formæ,

$$\begin{array}{r} 4e^3 + 6e^2y + 4ey^2 + y^3 = 0. \\ - 3Ae^2 - 3Aey - Ay^2 \\ + 2Be + B \\ - C \end{array}$$

Per consequens  $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$  debet esse productum ex reliquis tribus radicibus ipsius  $y$ , mutato signo; id est hoc productum debet esse æquale

$$-(b - a)(c - a)(d - a),$$

quando  $e$  supponitur æquale  $a$ ; debet esse

$$-(a - b)(c - b)(d - b),$$

quando  $e = b$ ; debet esse

$$-(a - c)(b - c)(d - c)$$

quando  $e = c$ ; tandem debet esse

$$-(a - d)(b - d)(c - d)$$

quando  $e = d$ . Jam patet, quod hæc producta

$(b - a)(c - d)(d - a)$ ;  $(a - b)(c - b)(d - b)$ ;  $a - c)(b - c)(d - c)$ ;  $(a - d)(b - d)(c - d)$ ; debent affici respective signis +, -, +, -; cum pri-



primum sit productum ex tribus quantitativibus positivis; secundum, ex una negativa & duabus positivis; tertium ex duabus negativis & una positiva; quartum ex tribus negativis: ideo, cum substituendo  $a, b, c, d$ , per vices pro  $e$  in quantitate  $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$ , hæc quantitas alternatim fiat positiva & negativa, sequitur ex ultimo Lemmate,  $a, b, c, d$  esse limites æquationis  $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C = 0$ , vel  $4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0$ .

## COROLLARIUM.

Sequitur ex hoc theoremate, quod si  $a', b', c$  sint radices æquationis  $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C = 0$ , debent eædem esse limites radicum  $a, b, c, d$  radices æquationis quadrato-quadraticæ  $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ ; si enim  $a, b, c, d$  sint limites radicum  $a', b', c$ , debent reciproce hæc esse limites inter  $a, b, c$ , &  $d$ .

## THEOREMA II.

Multiplicentur termini æquationis cujusvis quadrato-quadraticæ, ut  $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ , per arithmeticam seriem quantitatum  $l + 4m, l + 3m, l + 2m, l + m, l$ , erunt radices æquationis propositæ limites radicum æquationis, quæ ex dicta multiplicatione oritur, idest hujus æquationis

$$lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD = 0, \\ + 4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx$$

ponamus enim, quod substituendo  $a, b, c, d$ , radices æquationis datæ  $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ , successive pro  $x$  in  $4x^3 - 3Ax^2 + Bx - C$ , quantitates quæ inde oriuntur, sint  $-R, +S, -T, +Z$ ; si eædem substituuntur in æquatione

$$lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD = 0, \\ + 4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx$$

cum evanescat, in quavis substitutione,  $lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD$ , patet evidenter, quod reliquum evadet successive æquale  $-mRx, +mSx, -mTx, +mZx$ ; ubi, cum signa harum quantitatum sint alternatim negativa & positiva, patet  $a, b, c, d$  esse limites ultimæ æquationis, per Lem. XII.

## COROLLARIUM.

Hinc sequitur  $a, b, c$ , &  $d$  esse limites æquationis cubicæ

$$Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = 0.$$

& converſim radices hujus cubicæ eſſe limites radicum æquationis quadrato-quadraticæ

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0;$$

nam multiplicando hanc quadrato-quadraticam æquationem per progressionem arithmeticam, 0, - 1, - 2, - 3, - 4, oritur hæc cubica

$$Ax^3 - 2Bx^2 - 3Cx + D = 0.$$

### THEOREMA III.

In genere, radices æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0,$$

sunt limites radicum æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \&c. = 0,$$

vel cujusvis æquationis, quæ deducitur ex prima, multiplicando ipſius terminos per quamvis arithmeticam progressionem, ut  $(l+d)$ ,  $(l+2d)$ ,  $(l+3d)$ , &c; & converſim radices hujus novæ æquationis erunt limites radicum æquationis propoſitæ,

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c. = 0.$$

Hujus Theorematis demonſtratio deducitur ex Lemmatibus XI. & XIII, eodem modo, quo præcedentia Theoremata deducta fuere ex Lemmatibus X, & XII. atque per hæc Theoremata facile pervenitur ad ea, quæ ſuper hac materia tractantur ab algebraicis ſcriptoribus.

### THEOREMA IV.

Æquatio

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0,$$

tot habebit radices imaginarias, quot dantur in æquatione

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \&c. = 0,$$

vel in æquatione

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = 0.$$

Ponas aliquam radicem æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \&c. = 0,$$

ut  $p$ , fieri imaginariam; duæ radices æquationis  $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \&c. = 0$ , quæ hujus  $p$  sunt limites, non possunt ambæ esse quantitates reales; patet enim ex demonstratione Theorematis I, si hæ radices sint quantitates reales, & substituantur pro  $x$  in

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \&c.,$$

quantitates, quæ inde orientur, contrariis debere affici signis, & per consequens radix  $p$ , cujus illæ sunt limites, debet esse radix realis, contra suppositionem; idem locum habet, si agatur de æquatione

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = 0,$$

eandem ob rationem.

### COROLLARIUM I.

Æquatio quadrato-quadratica,

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

duas habebit radices imaginarias, si duæ dentur tales in æquatione

$$4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0;$$

vel in æquatione

$$Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = 0.$$

Sed duæ radices æquationis

$$4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0,$$

sunt imaginariæ, si sint imaginariæ ambæ radices æquationis quadraticæ

$$6x^2 - 3Ax + B = 0,$$

vel æquationis

$$3Ax^2 - 4Bx + 3C = 0,$$

quia radices harum æquationum quadraticarum sunt limites illius cubicæ æquationis, per Theor. III. Eandem ob causam duæ radices æquationis

$$Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = 0$$

Tom. II.

m

erunt

erunt imaginariæ si sint impossibiles radices quadraticæ

$$3Ax^2 - 4Bx + 3C =, \text{ vel hujus } Bx^2 - 3Cx + 6D = 0.$$

Ideo duæ ex radicibus æquationis

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

erunt imaginariæ, quando radices harum quadraticarum

$$6x^2 - 3Ax + B = 0, \quad 3Ax^2 - 4Bx + 3C = 0, \quad Bx^2 - 3Cx + 6D = 0$$

evadunt impossibiles, id est, per Prop. I. quando  $\frac{2}{3}A^2$  minus est quam  $B$ , vel  $\frac{4}{9}B^2$ , minus quam  $AC$ , vel  $\frac{3}{8}C^2$  minus quam  $BD$ .

### COROLLARIUM II.

Procedendo eodem modo ex quavis æquatione, ut

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \&c. = 0,$$

tot possunt deduci æquationes quadraticæ, quot dantur termini in æquatione proposita, primo & ultimo exceptis: & omnium harum æquationum quadraticarum radices debent esse reales, si proposita nullas habeat imaginarias. Quadratica deducta ex tribus primis terminis,  $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ , habebit hanc formam,

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \&c. x^2 -$$

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \&c. Ax -$$

$$(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \&c. B,$$

continuando seriem factorum donec tot dantur quot dantur unitates in  $n-2$ : deinde dividendo æquationem per factores  $n-2$ ,  $n-3$ , &c. qui in quovis coefficiente apparent, æquatio evadet ejusmodi,

$$n(n-1) \cdot x^2 - (n-1) \cdot 2Ax + 2 \cdot 1 \cdot B = 0;$$

Cujus radices erunt imaginariæ, per Prop. I, quando  $n(n-1)^2 \cdot 4B$  majus est quam  $(n-1)^2 \cdot 4A^2$ , vel quando  $B$  majus est quam  $\frac{n-1}{2n} A^2$ , ita ut proposita æquatio debeat habere aliquas radices imaginarias, si sit

B

B majus quam  $\frac{n-1}{2n} A^2$ , ut demonstratum fuit alio modo in Prop. VII.

Quadratica æquatio eodem modo deducta ex tribus primis terminis æquationis

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} \&c. = 0;$$

hanc induet formam  $(n-1)(n-2)(n-3) \&c. \cdot Ax^2 - (n-2)(n-3)(n-4) \&c. \cdot 2Bx + (n-3)(n-4)(n-5) \&c. \cdot 3C = 0$ ; quæ, dividendo per factores communes cuivis termino, reducitur ad hanc

$$(n-1)(n-2) Ax^2 - (n-2) \cdot 4Bx + 6C = 0;$$

cujus radices erunt imaginariæ, quando  $\frac{2}{3} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot B$  minus est quam  $AC$ ; ideoque in hoc casu, quædam e radicibus æquationis propositæ erunt etiam imaginariæ.

### COROLLARIUM III.

In genere sint

$$Dx^{n-r-1} - Ex^{n-r} + Fx^{n-r-1}$$

utcumque tres termini æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + \dots \&c. = 0,$$

se mutuo sequentes; multiplicentur hujus æquationis termini primo per progressionem  $n, n-1, n-2 \&c.$  deinde per  $n-1, n-2, n-3 \&c.$  tum per  $n-2, n-3, n-4 \&c.$  donec multiplicaveris per tot progressionem, quot dantur unitates in  $n-r-1$ . Porro termini, qui ex primis multiplicationibus oriuntur, multiplicentur toties per progressionem  $0, 1, 2, 3 \&c.$  quoties unitas datur in  $r-1$  & pervenietur tandem ad quadraticam æquationem hujus formæ

$$(n-r+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2) \&c. (r-1)(r-2)(r-3)(r-4) \&c. \cdot Dx^2 - (n-r)(n-r-1)(n-r-2)(n-r-3) \&c. \cdot r(r-1)(r-2)(r-3) \&c. \cdot Ex + (n-r-1)(n-r-2)(n-r-3)(n-r-4) \&c. \cdot (r+1)(r(r-1)(r-2) \&c. \cdot F = 0.$$

& dividendo per factores  $n-r-1, n-r-2 \&c.$  &  $r-1, r-2 \&c.$  qui in quovis coefficiente dantur, æquatio ad hanc formam reducetur,

$$(n-r+1)(n-r) 2 \cdot 1 \cdot Dx^2 - (n-r) 2 \cdot r \cdot 2Ex + 2 \cdot 1 \cdot (r+1) rF = 0,$$

cujus radices erunt imaginariæ (per Prop. I.) quando  $\left(\frac{n-r}{n-r+1}\right) \left(\frac{r}{r+1}\right) E$  minus est quam DF.

Unde patet si quis terminus hujus seriei fractionum

$$\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{4} \text{ \&c. } \frac{n-r+1}{r}, \frac{n-r}{r+1}, \frac{n-r-1}{r+2},$$

\&c. dividatur per terminum proxime antecedentem, & quotientes ponantur super terminos æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \text{ \&c. } = 0,$$

incipiendo a secundo termino, si hoc peracto, quadratum cujusvis termini ductum in fractionem supereminentem inveniatur minus quam productum ex terminis adjacentibus, quasdam hujus æquationis radices esse imaginarias.

Plura possent addi super hanc materiam, sed vereor ne putes me jam ea dixisse, quæ sufficiunt, ideo addam tantum demonstrationem quarundam regularum algebraicarum, & quorundam Theorematum, quæ facillime ex Lemmate XI. deducuntur.

I. Regula, qua cognoscitur, num duæ vel plures radices æquationis sint æquales, immediate sequitur ex dicto Lemmate. Pone duas radices æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \text{ \&c. } = 0,$$

esse æquales, erunt etiam æquales duo valores ipsius  $y$ , (quod semper est æquale  $x - e$ ). Ponamus  $e$  esse æquale uni ex duobus valoribus æqualibus ipsius  $x$ , & evanescant duo valores ipsius  $y$ ; ideoque primus & secundus terminus æquationis ipsius  $y$  in Lem. XI. debent evanescere; quia  $y^2$  debet dari in quovis termino: erunt ergo

$$e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3} \text{ \&c. } = 0,$$

&c

$$ne^{n-1} - (n-1) \cdot Ae^{n-2} + (n-2) Be^{n-3} \text{ \&c. } = 0,$$

per consequens duæ hæ æquationes habebunt unam radicem communem, quæ debet esse una ex radicibus ipsius  $x$ , quæ æquales supponebantur. Est ergo manifestum, quod ubi duò valores ipsius  $x$  sunt æquales in æquatione

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \text{ \&c. } = 0,$$

illorum unus debet esse radix æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1) Ax^{n-2} + (-2) Bx^{n-3} \&c. = 0.$$

Si tres valores ipsius  $x$  supponantur æquales, inter se & ipsi  $e$ , tres valores ipsius  $y$ , ( $=x-e$ ) evanescent, & tres primi termini æquationis ipsius  $y$  in Lem. XI. evanescent; ideoque erit.

$$n(n-1) \cdot e^{n-2} - (n-1)(n-2) \cdot Ae^{n-3} + (n-2) \cdot (n-3) \cdot Be^{n-4} \&c. = 0;$$

& unus ex æqualibus valoribus ipsius  $x$  erit una ex radicibus hujus ultimæ æquationis; & duo horum valorum æqualium erunt inter radices æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1) \cdot Ax^{n-2} + (n-2) Bx^{n-3} \&c. = 0.$$

In genere si æquatio.

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \&c. = 0$$

tot habeat radices æquales, quot dantur unitates in  $S$ , tot ex hisce radicibus dabuntur in æquatione

$$nx^{n-1} - (n-1) \cdot Ax^{n-2} + (n-2) \cdot Bx^{n-3} \&c. = 0,$$

quot dantur unitates in  $S-1$ . Eodem modo tot erunt ex valoribus æqualibus in æquatione

$$n(n-1) \cdot x^{n-2} - (n-1)(n-2) Ax^{n-3} + (n-2)(n-3) Bx^{n-4} \&c. = 0,$$

quot dantur unitates in  $S-2$ , & sic deinceps.

II. Generalis regula, quam dedit NEWTONUS in *Articulo de limitibus æquationum*, qua invenitur limes major quovis ex valoribus ipsius  $x$ , immediate deducitur ex Lem. XI. Patet enim, quod si  $e$  talis sit quantitas, ut posita in omnibus coefficientibus ipsius  $y$ , videlicet in

$$e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} \&c. ne^{n-1} - (n-1) \cdot Ae^{n-2} + (-2) Be^{n-3} \&c,$$

$$n\left(\frac{n-1}{2}\right)e^{n-2} - (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)Ae^{n-3} + (n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)Be^{n-4} \&c,$$

det omnes quantitates, quæ inde oriuntur, positivas, in hoc casu, cum nulla sit mutatio signorum in æquatione ipsius  $y$ , sequitur omnes ipsius  $y$  valores esse negativos; & cum sit semper  $y = x - e$ , patet  $e$  esse quantita-

titatem majorem quovis valore ipsius  $x$ , id est  $e$  debet esse majus quavis radice æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \&c. = 0.$$

III. Ex eodem Lem. XI. Theoremata quædam utilissima circa methodum Serierum & Fluxionum, & resolutionem æquationum facillime deducuntur. Patet enim, quod coefficientis secundi termini in æquatione ipsius  $y$  in dicto Lemmate est fluxio primi termini divisa per fluxionem ipsius  $e$ ; coefficientis tertii termini est secunda fluxio primi divisa per  $2e^2$ ; ponendo  $e$  fluere uniformiter; termini tertii coefficientis est tertia fluxio primi divisa per  $2 \cdot 3e^3$ , & sic deinceps: ideoque supponendo  $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} \&c. = e$ , æquatio qua  $y$  determinari debet, erit

$$e + \frac{\dot{e}}{e} y + \frac{\ddot{e}}{1 \cdot 2e^2} y^2 + \frac{\ddot{\ddot{e}}}{1 \cdot 2 \cdot e^3} y^3 \&c. = 0.$$

atque inde, quando  $e$  est propemodum valor ipsius  $x$ , Theoremata deduci possunt, quibus approximare possumus ad  $y$ , ac proinde ad  $x$ , quod supponitur æquale  $y + e$ .

TAB.  
XIII.  
Fig. 5.

IV. Si AP (=  $x$ ) abscissa, PM (=  $z$ ) ordinata cujusvis curvæ BLM; & ponamus aliam quamcunque abscissam AK =  $e$ , & ordinatam KL =  $e$ , erit

$$z (= PM) = e \mp \frac{\dot{e}}{e} y \mp \frac{\ddot{e}}{2e^2} y^2 \mp \frac{\ddot{\ddot{e}}}{2 \cdot 3e^3} y^3 \mp \frac{\ddot{\ddot{\ddot{e}}}}{2 \cdot 3 \cdot 4e^4} y^4 \&c.$$

Ponatur enim  $z$  æquale cuicunque seriei, quæ consistat ex datis quantitibus, & potentiis ipsius  $x$ , ut  $Ax^n + Bx^r + Cx^s \&c.$  & substituendo  $e \mp y$  loco ipsius  $x$  habebimus eodem modo ac in Lem. XI.

$$z = Ae^n \mp nAe^{n-1} y + n \left( \frac{n-1}{2} \right) Ae^{n-2} y^2 \&c.$$

$$+ Be^r \mp rBe^{r-1} y + r \left( \frac{r-1}{2} \right) Be^{r-2} y^2 \&c.$$

$$+ Ce^s \mp sCe^{s-1} y + s \left( \frac{s-1}{2} \right) Ce^{s-2} y^2 \&c.$$

&c. &c.

&c.

Sed ubi  $x = e$ , tunc

$z =$



$$x = e = Ae^n + Be^r + Ce^s \&c.$$

&c

$$\dot{e} = nAe^{n-1}\dot{e} + rBe^{r-1}\dot{e} + sCe^{s-1}\dot{e} \&c.$$

$$\ddot{e} = n(n-1)Ae^{n-2}\dot{e}^2 + r(r-1)Be^{r-2}\dot{e}^2 + s(s-1)Ce^{s-2}\dot{e}^2 \&c.$$

ideoque

$$x = e \pm \frac{\dot{e}}{e} y + \frac{\ddot{e}}{2e^2} y^2 \mp \frac{\dddot{e}}{2 \cdot 3e^3} y^3 \&c.$$

Eodem modo invenies

$$e = x \mp \frac{\dot{x}}{x} y + \frac{\ddot{x}}{2x^2} y^2 \pm \frac{\dddot{x}}{2 \cdot 3x^3} y^3 + \&c.$$

nam

$$e = Ae^n + Be^r + Ce^s = A(x \pm y)^n + B(x \pm y)^r + C(x \pm y)^s \&c.$$

$$= x \pm \frac{\dot{x}}{x} y + \frac{\ddot{x}}{2x^2} y^2 \pm \&c.$$

Area KLMP æqualis est fluenti ipsius  $xy$ , vel  $e\dot{y}$ . Sed

$$e\dot{y} = xy \pm \frac{\dot{x}}{x} y\dot{y} + \frac{\ddot{x}}{2x^2} y^2\dot{y} \pm \frac{\dddot{x}}{2 \cdot 3x^3} y^3\dot{y} \&c.$$

&c

$$xy = e\dot{y} \mp \frac{\dot{e}}{e} y\dot{y} + \frac{\ddot{e}}{2e^2} y^2\dot{y} \mp \frac{\dddot{e}}{2 \cdot 3e^3} y^3\dot{y} \&c.$$

Per consequens, fumendo fuentes,

$$KLMP = e\dot{y} \mp \frac{\dot{e}}{2e} y^2 + \frac{\ddot{e}}{2 \cdot 3e^2} y^3 \mp \frac{\dddot{e}}{2 \cdot 3 \cdot 4e^3} y^4 \&c.$$

vel

vel

$$KLMP = zy + \frac{\ddot{z}}{2x} y^2 + \frac{\ddot{z}}{2 \cdot 3x^2} y^3 \pm \frac{\ddot{z}}{2 \cdot 3 \cdot 4x^3} y^4 \&c.$$

Hoc ultimum Theorema illud est, quod Doctissimus Dominus *Bernoulli* in lucem dedit in Actis Lipsiensibus Anni MDCXCIV, sed jam tempus est longæ huic epistolæ finem imponendi, &c.

# METHODUS DETERMINANDI

*numerum radicum impossibilium in æquationibus affectis.*

Auctore GEORGIO CAMPBELL.

## LEMMA I.

**I**N omni affecta æquatione quadratica,  $ax^2 - Bx + A = 0$ , cujus radices sunt reales, quarta pars quadrati coefficientis secundi termini major est rectangulo ex coefficiente primi termini & numero absoluto. Id est  $\frac{1}{4}B^2$  majus est quam  $a \cdot A$ ; & vice versa si fit  $\frac{1}{4}B^2$  majus quam  $a \cdot A$ , radices æquationis erunt reales; sed si fit  $\frac{1}{4}B^2$  minus quam  $a \cdot A$ , radices erunt impossibiles; sunt enim radices æquationis

$$\frac{\frac{1}{2}B + \sqrt{\left(\frac{1}{4}B^2 - a \cdot A\right)}}{a} \quad \& \quad \frac{\frac{1}{2}B - \sqrt{\left(\frac{1}{4}B^2 - a \cdot A\right)}}{a}.$$

## LEMMA II.

Quicumque sit numerus radicum impossibilium in æquatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm \&c. \pm \&c. \pm Bx \mp A = 0,$$

tot exacte erunt radices impossibiles in æquatione

$$Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} + \&c. \pm Dx^3 \mp Cx^2 \pm Bx \mp A = 0.$$

Radices enim posterioris æquationis reciprocae sunt radicum prioris, ut patet ex vulgari Algebra. Sint radices æquationis quadrato-quadraticæ

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0,$$

$a, b, c, d, e$  quibus sint  $e, \& d$  impossibiles, radices æquationis

Tom. II.

n

A

$$Ax^4 - Dx^3 + Cx^2 - Bx + 1 = 0$$

erunt  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ ; ideoque harum duarum  $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ , etiam impossibiles.

LEMMA III.

In omni æquatione, ut

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} \&c.$$

$$\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0,$$

cujus omnes radices sunt reales, si unusquisque terminus multiplicetur per indicem ipsius  $x$ , productumque dividatur per  $x$ ; æquatio, quæ inde orietur,

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - (n-3)Dx^{n-4} + (n-4)$$

$$Ex^{n-5} \&c. \pm 4ex^3 \mp 3dx^2 \pm 2cx \mp b = 0,$$

habeat etiam omnes radices suas reales. Sic si omnes radices æquationis

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0.$$

sint reales, erunt etiam reales radices æquationis

$$4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0.$$

Lemma hoc conversionem non patitur, innumeri enim dantur casus ubi radices æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - (n-3)Dx^{n-4} + \&c.$$

$$\pm 3dx^3 \mp 2cx \pm b = 0$$

sunt reales, cum tamen æquatio

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm dx^4 \mp cx^3 \pm bx \mp A = 0$$

habeat vel aliquas, vel quandoque omnes radices impossibiles. Sed quicumque sit numerus radicum impossibilium in æquatione

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - \&c. \pm 2cx \mp b = 0,$$

tot ad minimum erunt radices impossibiles in æquatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm bx \mp A = 0.$$

Sic omnes radices æquationis

$$4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0$$

possunt esse reales, & tamen duæ vel forte omnes radices æquationis

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0$$

erunt impossibiles; sed si duæ radices æquationis

$$4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0$$

sint impossibiles, duæ etiam ad minimum erunt impossibiles in æquatione

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0.$$

Hæc omnia fuere demonstrata ab algebraicis scriptoribus, speciatim a Domino *Reyneau* in suo Gallico Tractatu cui Titulus est *L'Analyse Démontrée*, & facile apparent per Methodum de *Maximis & Minimis*.

# COROLLARIUM.

Sint omnes radices æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} + \&c. \pm \dots \mp A = 0$$

$$\pm fx^5 \mp ex^4 + dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$$

reales, erunt etiam, per hoc Lemma, reales omnes radices æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - (n-3)Dx^{n-4} + (n-4)$$

$$Ex^{n-5} - (n-5)Fx^{n-6} + \&c. \pm 5fx^4 \mp 4ex^3 \pm 3dx^2 \mp 2cx \pm 1b \mp A = 0$$

idcirco, per idem Lemma, reales erunt omnes radices æquationis

$$n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)Bx^{n-3} + (n-2)(n-3)Cx^{n-4}$$

$$- (n-3)(n-4)Dx^{n-5} + (n-4)(n-5)Ex^{n-6} - (n-5)(n-6)Fx^{n-7}$$

$$+ \&c. \pm 2cfx^3 \mp 12ex^2 \pm 6dx \mp 2c = 0,$$

vel (dividendo per 2)

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) x^{n-2} - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) Bx^{n-3} + (n-2) \left( \frac{n-3}{2} \right) Cx^{n-4} \\ - (n-3) \left( \frac{n-4}{2} \right) Dx^{n-5} + (n-4) \left( \frac{n-5}{2} \right) Ex^{n-6} - (n-5) \left( \frac{n-6}{2} \right)$$

$$Fx^{n-7} + \&c. \pm 10fx^3 \mp 6ex^2 \pm 3dx \mp c = 0.$$

Eodem modo reales erunt omnes radices æquationis

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) x^{n-3} - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) \left( \frac{n-3}{3} \right)$$

$$Bx^{n-4} + (n-2) \left( \frac{n-3}{2} \right) \left( \frac{n-4}{3} \right) Cx^{n-5} - \&c. \pm 10fx^3 \mp 4ex^2 \pm d = 0.$$

&c sic possumus descendere donec perveniamus ad æquationem quadraticam

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) x^2 - (n-1) Bx + C = 0.$$

Eadem æquationes sic ascendunt

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) x^2 - (n-1) Bx + C = 0$$

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) x^3 - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) Bx^2 + (n-2) Cx - D = 0$$

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \left( \frac{n-3}{4} \right) x^4 - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) \left( \frac{n-3}{3} \right) Bx^3 + (n-2) \left( \frac{n-3}{2} \right)$$

$$Cx^2 - (n-3) Dx + E = 0.$$

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \left( \frac{n-3}{4} \right) \left( \frac{n-4}{5} \right) x^5 - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) \left( \frac{n-3}{3} \right) \left( \frac{n-4}{4} \right) Bx^4 +$$

$$(n-2) \left( \frac{n-3}{2} \right) \left( \frac{n-4}{3} \right) Cx^3 - (n-3) \left( \frac{n-4}{2} \right) Dx^2 +$$

$$(n-4) Ex - F = 0.$$

&c sic deinceps.

Sit M aliquis ex coefficientibus æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0.$$

sintque L & N coefficientes ipsi M adjacentes; sitque  $m$  exponens coefficientis M, (per exponens coefficientis intelligo numerum, qui denotat locum, quem coefficientis aliquod occupat inter alia, sic si M representet coefficientis E ideoque  $L = D$ , &  $N = F$ , erit  $m = 4$ .) facile patebit, quod inter præcedentes æquationes ascendentes, illa cujus numerus absolutus est N hanc obtinebit formam

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \&c. \left( \frac{n-m}{m+1} \right) x^{m+1} - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) \left( \frac{n-3}{3} \right) \&c. \left( \frac{n-m}{m} \right)$$

$$Bx^m + (n-2) \left( \frac{n-2}{3} \right) \&c. \left( \frac{n-m}{m-1} \right) Cx^{m-1} - \&c. \pm (n-m+1) \left( \frac{n-m}{2} \right)$$

$$Lx^2 \mp (n-m) \cdot Mx \pm N = 0.$$

Cujus omnes radices erunt reales, si sint reales radices æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm A = 0.$$

Sit  $N = F$ , erit  $M = E$ ,  $L = D$ , &  $m = 4$ .

Et æquatio, cujus numerus absolutus est F, erit

$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \left( \frac{n-3}{4} \right) \left( \frac{n-4}{5} \right) x^5 - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) \left( \frac{n-3}{3} \right) \left( \frac{n-4}{4} \right)$$

$$Bx^4 + (n-2) \left( \frac{n-3}{2} \right) \left( \frac{n-4}{3} \right) Cx^3 - (n-3) \left( \frac{n-4}{2} \right) Dx^2 + (n-4) Ex - F = 0.$$

# PROPOSITIO I.

Sit

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$$

æquatio cujuscunque dimensionis, cujus omnes radices sint reales; sit M aliquis coefficientis hujus æquationis; L & N coefficientes adjacentes;  $m$  exponens ipsius M. Erit quadratum coefficientis M ductum in fractionem

$\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$  semper majus L . N, rectangulo ex coefficientibus adjacentibus; sic in æquatione

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + E = 0,$$

n 3

ubi

ubi  $n = 4$ , faciendo  $M = C$ , ideoque  $L = B$ ,  $N = D$ , &  $m = 2$ ,  
erit  $\frac{2(4-2)}{(2+1)(4-2+1)} C^2$ , vel  $\frac{4}{9} C^2$  majus quam  $B \cdot D$ , dummodo  
omnes radices æquationis sint reales.

Quia (per Lem. III.) radices æquationis quadraticæ

$$x^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right) x^2 - (n-1) Bx + C = 0$$

sunt reales, erit (per Lem. I.)  $\frac{1}{4} (n-1)^2 \cdot B^2$  majus quam  $n \left(\frac{n-1}{2}\right) C$ ,  
& dividendo utrumque per  $\frac{n(n-1)}{2}$ , erit  $\left(\frac{n-1}{2n}\right) B^2$  majus quam  $1 \cdot C$ ,  
ideoque in æquatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm A = 0,$$

dimensionum  $n$ , & cujus omnes radices sunt reales, quadratum ipsius  $B$   
coefficientis secundi termini, ductum in fractionem  $\frac{n-1}{2n}$  majus est quam  
 $1 \cdot C$  rectangulum ex coefficientibus adjacentibus. Sed (per Lem. II.)  
omnes radices æquationis

$$Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - \&c. \pm Cx^2 \mp Bx \pm 1 = 0,$$

vel, dividendo per  $A$ , radices æquationis

$$x^n - \frac{b}{A} x^{n-1} + \frac{c}{A} x^{n-2} - \&c. \pm \frac{C}{A} x^2 \mp \frac{B}{A} x \pm \frac{1}{A} = 0,$$

sunt reales, ideoque (ex iis quæ modo diximus)  $\left(\frac{n-1}{2n}\right) \frac{b^2}{A^2}$  majus esse de-  
bet quam  $1 \cdot \frac{c}{A}$ , & per consequens  $\left(\frac{n-1}{2}\right) b^2$  majus est quam  $c \cdot A$ ; id-  
circo in æquatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm Cx^2 - Bx + A = 0,$$

dimensionum  $n$ , & cujus omnes radices sunt reales, quadratum coeffi-  
cientis  $x$  ductum in fractionem  $\frac{n-1}{2}$ , majus est rectangulo ex coeffi-  
ciente termini  $x^2$ , & numero absoluto; sed, (per Cor. Lem. III.) omnes  
radices æquationis —



$$n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \&c. \left( \frac{n-m}{m+1} \right) x^{m+1} - (n-1) \left( \frac{n-2}{2} \right) \&c. \left( \frac{n-m}{m} \right)$$

$$Bx^m + (n-2) \left( \frac{n-3}{2} \right) \&c. \left( \frac{n-m}{m-1} \right) Cx^{m-1} \&c. \pm (n-m+1) \left( \frac{n-m}{2} \right)$$

$$Lx^1 \mp (n-m) Mx \pm N = 0,$$

sunt reales; ideoque, cum hæc æquatio sit dimensionum  $(m+1)$ , quadratum  $(n-m)$  M ductum in fractionem  $\frac{(m+1)-1}{2(m+1)}$  majus erit quam re-

ctangulum ex  $(n-m+1) \left( \frac{n-m}{2} \right) L$  & N; id est  $\frac{m}{2(m+1)} (n-m)^2 M^2$

majus erit quam  $(n-m+1) \left( \frac{n-m}{2} \right) L \cdot N$ , ideoque dividendo utrum-

que per  $(n-m+1) \left( \frac{n-m}{2} \right)$ , erit  $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)} \cdot M^2$  majus L.N. Q. E. D.

### COROLLARIUM.

Fiat series fractionum  $\frac{n}{1}$ ,  $\frac{n-1}{2}$ ,  $\frac{n-2}{3}$ ,  $\frac{n-3}{4}$  &c. usque ad  $\frac{1}{n}$ , quarum denominatores sint numeri in progressionē arithmetica, 1, 2, 3, 4, &c. usque ad numerum  $n$ , qui indicat dimensionēs æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm A = 0;$$

numeratores sint in eadem progressionē sed inversa; dividatur secunda harum fractionum per primam, tertia per secundam, & sic deinceps, & ponantur fractionēs, quæ ex hisce divisionibus oriuntur, supra medios terminos æquationis, hoc modo.

$$\frac{n-1}{2n}, \frac{2(n-2)}{3(n-1)}, \frac{3(n-3)}{4(n-2)}, \frac{4(n-4)}{5(n-3)} \&c.$$

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0.$$

Tunc si omnes radices æquationis sunt reales, quadratum cujusvis coefficientis, ductum in fractionem, quæ supereminet, majus erit reſtangulo ex coefficientibus adjacentibus. Hoc corollarium converti non potest, innumeræ enim dantur æquationes, in quibus quadratum coefficientis cujuscunque, ductum in fractionem supereminentem majus esse potest producto ex coefficientibus adjacentibus, & tamen aliquæ vel forte omnes radices possunt esse imagi-

na-

nariz. Idcirco, ubi quadratum coefficientis ductum in fractionem supereminentem majus est producto ex coefficientibus adjacentibus, nihil inde potest concludi, quoad possibilitatem radicum æquationis; sed ubi tale quadratum ita multiplicatum, minus est ejusmodi producto, id certum est indicium duas dari radices impossibiles.

Ex dictis, immediate deducitur demonstratio regulæ, quam dedit illustrissimus NEWTONUS, qua determinatur numerus radicum impossibilium, in quavis data æquatione.

## S C H O L I U M.

Æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} + \&c. \pm A = 0$$

radices designentur litteris  $a, b, c, d, e, f, g, \&c.$  erit (ut notum est) B summa omnium radicum

$$= a + b + c + d + e + f + g + \&c.$$

C summa productorum ex binis radicibus

$$= ab + ac + ad + ae + af + ag + \&c.$$

D summa productorum ex ternis radicibus

$$= abc + abe + abf + abg + \&c.$$

$$E = abcd + abcf + abeg + \&c.$$

$$F = abcde + abcdf + abcdg + bcd ef + \&c,$$

& ita deinceps. Representet, ut in Propositione, M aliquod ex coefficientibus, L & N coefficientes adjacentes; sit  $m$  exponent ipsius M; sit Z summa quadratorum omnium differentiarum, quæ dari possunt inter terminos coefficientis M; sit  $\alpha$  summa ex omnibus dictis quadratis quorum termini differunt una littera,  $\beta$  summa illorum quadratorum, quorum termini duabus differunt litteris;  $\gamma$  summa illorum, quorum termini tribus differunt litteris;  $\delta$  summa illorum, quorum termini quatuor differunt litteris, & de ceteris. Si M sit æquale

$$F = abcde + abcdf + abcdg + \&c.$$

erit

$$Z = (abcde - abcd f)^2 + (abcde - abcd g)^2 + (abcde - abcd h)^2 + (bcdef - ab f g h)^2 + \&c.$$

$\alpha =$

$$\alpha = (abcde - abcdf)^2 + (abcde - abedg)^2 + (abcde - abcdh)^2 + (bcdef - bcdeg)^2 + \&c.$$

$$\beta = (abcde - abcfg)^2 + (abcde - abcfh)^2 + (bcdef - bcdgh)^2 + \&c.$$

$$\gamma = (abcde - abfgh)^2 + (abcdf - abefgh)^2 + \&c.$$

$$\delta = (abcde - afgbh)^2 + (acdfg - abefhk)^2 + \&c.$$

Hicce positis, dico, quod quadratum cujusvis coefficientis, ut M, ductum in fractionem  $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$  excedit rectangulum ex coefficientibus adjacentibus L. N, quantitate

$$\frac{(n+1)Z}{(m+1)(n-m+1)} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta - \&c.$$

Series  $-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta - \&c.$  tot debet habere terminos, quot dantur unitates in  $m$ .

Sit æquatio

$$x^5 - Bx^4 + Cx^3 - Dx^2 + Ex - F = 0,$$

cujus radices sint  $a, b, c, d, e$ ; in quo casu  $n = 5$ . Sit  $M = B = a+b+c+d+e$ ; erit  $L = 1$ ,  $N = C$ ,  $m = 1$ .

$$Z = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 + (b-c)^2 + \&c. = \alpha.$$

Idcirco  $\frac{1(5-1)}{(1+1)(5-1+1)} \cdot B^2$  vel  $\frac{2}{5} B^2$  excedet 1. C quantitate

$$\frac{(5+1)Z}{(1+1)(5-1+1)} - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{5}Z - \frac{1}{2}\alpha = (\text{quia } Z = \alpha) \frac{1}{10}Z = \frac{1}{10}$$

$$(a-b)^2 + \frac{1}{10}(a-c)^2 + \frac{1}{10}(a-d)^2 + \&c. \text{ qui semper est numerus positivus,}$$

cum radices  $a, b, c, d, e$  sunt reales, sive sint positivæ, sive negativæ.

$$\text{Si } M = C = ab + ac + ad + ae + bc + \&c,$$

$$\text{erit } L = B, N = D, m = 2,$$

$$Z = (ab-ac)^2 + (ab-ad)^2 + (ab-ae)^2 + (ab-de)^2 + \&c.$$

$$\alpha = (ab-ac)^2 + (ab-ad)^2 + (ab-ae)^2 + \&c.$$

Tom. II.

$\beta =$

$$\beta = (ab-cd)^2 + (ab-ce)^2 + (ab-de)^2 + \&c.$$

ideo  $\frac{2(5-2)}{(2+1)(5-2+1)} \cdot C^2$  vel  $\frac{1}{2} C^2$  excedet B.D quantitate

$$\frac{(5+1)Z}{(2+1)(5-2+1)} - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{3} \beta = (\text{quia } Z = \alpha + \beta)$$

$$\frac{1}{6} \beta = \frac{1}{6} (ab-cd)^2 + \frac{1}{6} (ab-ce)^2 + \frac{1}{6} (ab-de)^2 + \&c.$$

qui semper est numerus positivus, cum radices  $a, b, c, d, e$ , sunt reales, siue sint positivæ, siue negativæ.

$$\text{Sit } M = D = abc + abd + abe + acd + ace + \&c$$

$$\text{erit } L = C, N = E, m = 3.$$

$$Z = (abc-abd)^2 + (abc-abe)^2 + (abc-acd)^2 + \&c.$$

$$\alpha = (abc-abd)^2 + (abc-abe)^2 + (abc-acd)^2 + \&c.$$

$$\beta = (abc-ade)^2 + (abc-cde)^2 + (abc-bde)^2 + \&c.$$

$\gamma = 0$ . Ideo  $\frac{3(5-3)}{(3+1)(5-3+1)} D^2$ , vel  $\frac{1}{2} D^2$  excedet C. quantitate

$$\frac{(5+1)Z}{(3+1)(5-3+1)} - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{3} \beta = (\text{quia } Z = \alpha + \beta) \frac{1}{6} \beta =$$

$\frac{1}{6} (abc-ade)^2 + \frac{1}{6} (abc-bde)^2 + \&c$ , qui semper est numerus positivus, ubi radices sunt reales.

$$\text{Sit } M = E = abed + abce + abde + bde + \&c.$$

$$\text{erit } L = D, N = A, m = 4,$$

$$Z = (abcd-abce)^2 + (abcd-abde)^2 + (abcd-bcde)^2 + \&c. = \alpha;$$

$\beta = 0 = \gamma = \delta$ . Ideo  $\frac{4(5-4)}{(4+1)(5-4+1)} E^2$ , vel  $\frac{2}{5} E^2$  excedet D.A

$$\text{quantitate } \frac{(5+1)Z}{(4+1)(5-4+1)} - \frac{1}{2} \alpha = \frac{3}{5} Z - \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{10} Z = \frac{1}{10}$$

$(abcd-abce)^2 + \frac{1}{10} (abcd-bcde)^2 + \&c$ . qui numerus est semper positivus, si radices sint numeri reales.

PROPOSITIO II.

Sit

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0$$

æquatio cujuscunque dimensionis, cujus radices cum ipsarum signis exprimentur litteris  $a, b, c, d, e, f, \&c.$  Sit  $M$  coefficientis quicunque hujus æquationis, sint  $L$  &  $N$  coefficientes adjacentes ipsi  $M$ ;  $K, O$ , coefficientes adjacentes ipsis  $L$  &  $N$ ;  $I, P$  adjacentes ipsis  $K, \& O$ ;  $H, Q$ , ipsis  $I$  &  $P$ , & sic deinceps. Sit  $m$  exponens coefficientis  $M$ ; &  $Z$ , ut in Scholio, = summæ omnium quadratorum, quæ fieri possunt ex differentiis terminorum ipsius  $M$ . Quadratum cujuscunque coefficientis, ut  $M$ ,

$$\text{ductum in hanc fractionem } \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n \left( \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \&c. \left( \frac{n-m-1}{m} \right) \right)} \right)$$

excedit  $L \cdot N - K \cdot O + I \cdot P - H \cdot Q + \&c.$  quantitate

$$\frac{\frac{1}{2} Z}{n \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{3} \right) \&c. \left( \frac{n-m-1}{m} \right)}, \text{ quæ quantitas semper est numerus positivus, cum radices } a, b, c, d, \&c. \text{ sunt reales, sive positivæ, sive negativæ.}$$

Sit æquatio septem dimensionum, ut

$$x^7 - Bx^6 + Cx^5 - Dx^4 + Ex^3 - Fx^2 + Gx - A = 0.$$

cujus radices sint  $a, b, c, d, e, f, g.$  in hoc casu  $n = 7$ . Sit

$$M = E = abcd + abce + abcf + abcg + bcde + \&c.$$

erit  $m = 4$ ,  $L = -D$ ,  $N = -F$ ,  $K = C$ ,  $O = G$ ,  $I = -B$ ,  $P = -A$ ;

$$Z = (abcd - abce)^2 + (abcd - abcf)^2 + (abcd - abcg)^2 + \&c.$$

$$\text{Idcirco } \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{7 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4}} \right) E^2 \text{ vel } \frac{17}{35} E^2 \text{ excedet } D \cdot F - C \cdot G +$$

$$B \cdot A, \text{ quantitate } \frac{\frac{1}{2} Z}{7 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4}} \text{ vel } \frac{Z}{70} = \frac{1}{70} (abcd - abce)^2 + \frac{1}{70} (abcd - abcf)^2 + \&c. \quad \text{Ex}$$

Ex hac propositione deducitur sequens regula determinandi numerum radicum impossibilium in data æquatione.

E binomio elevato ad potentiam, cujus index exprimit dimensiones æquationis propositæ, fumantur uncia terminorum mediorum, unitate depressæ; quævis uncia sic deminuta, dividatur per respondentem unciam duplicatam, & fractiones, quæ inde oriuntur, ponantur supra medios terminos correspondentes in data æquatione: & si quadratum cujusvis termini ductum in fractionem supereminentem majus sit quam rectangulum e terminis immediate adjacentibus, minus rectangulo ex proxime utrinque jacentibus, plus rectangulo ex utrinque sequentibus, minus &c, tunc signum + ponatur sub ipsum terminum, cujus quadratum fuit multiplicatum per fractionem supereminentem; sin minus, ponatur signum negativum, atque sub primum & ultimum terminum ponatur signum +. Tot ad minimum erunt radices impossibiles, quot dantur mutationes in serie signorum a signo + ad signum —, vel a —, ad +.

Ex. gr. determinandæ sint radices impossibiles in æquatione hac,

$$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0.$$

Unciæ terminorum intermediorum in septima potentia cujusvis binomii sunt 7, 21, 35, 35, 21, 7. ex quibus subtrahendo unitatem, & dividendo reliquum per ipsam unciam duplicatam, quotientis erunt

$$\frac{6}{14}, \frac{20}{42}, \frac{34}{70}, \frac{34}{70}, \frac{20}{42}, \frac{6}{14} \text{ vel } \frac{3}{7}, \frac{10}{21}, \frac{17}{35}, \frac{17}{35}, \frac{10}{21}, \frac{3}{7};$$

quæ fractiones ponendæ sunt supra medios terminos datæ æquationis hoc modo.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & & \frac{10}{21} & & \frac{17}{35} & & \frac{17}{35} & & \frac{10}{21} & & \frac{3}{7} \\ x^7 & - & 5x^6 & + & 15x^5 & - & 23x^4 & + & 18x^3 & + & 10x^2 & - & 28x & + & 24 & = & 0. \\ + & - & & + & & - & & + & & - & & + & & + \end{array}$$

Deinde, quia quadratum ipsius  $5x^6$  ductum in fractionem supereminentem  $\frac{3}{7}$ , idest  $\frac{3}{7}x^{11}$  minus est quam  $x^7 \cdot 15x^5$ , idest quam  $15x^{12}$ , pono signum — sub terminum  $5x^6$ . Porro, quia quadratum ipsius  $15x^5$  ductum in fractionem supereminentem  $\frac{10}{21}$ , idest  $\frac{750}{7}x^{10}$  majus est quam  $(-5x^6 \cdot -23x^4) = (x^7 \cdot 18x^3) = 97x^{10}$ , pono signum + sub terminum  $15x^5$ . Video etiam quod  $\frac{8223}{35}x^8$  (quadratum termini  $23x^4$  ductum in fractionem  $\frac{17}{35}$ ) minus est, quam  $(15x^5 \cdot 18x^3) - (5x^6 \cdot 10x^2) + (x^7 \cdot -28x)$

$= 292x^8$ , pono signum — sub terminum  $23x^4$ . Deinde quia  $(18x^3)^2 \cdot \frac{17}{35}$ ,  
 id est  $\frac{5508}{35} x^6$ , majus quam  $(-23x^4 \cdot 10x^4)(-15x^5 \cdot -28x) - (5x^6 \cdot 24)$   
 $= 70x^6$ , pono signum + sub terminum  $18x^3$ . Porro, cum  $(10x^3)^2 \cdot \frac{10}{21}$ ,  
 vel  $\frac{1000}{21} x^4$ , minus sit quam

$$(18x^3 \cdot -28x) - (23x^4 \cdot 24) = 48x^4,$$

pono signum —, sub terminum  $10x^3$ . Tandem, quia  $(28x)^2 \cdot \frac{3}{7}$ , vel  
 $336x^4$ , majus est quam  $10x^3 \cdot 24 = 240x^3$ , pono sub  $28x$  signum +; &c,  
 ut dixi, sub primum atque ultimum terminum scribo +. Cum autem sint  
 sex mutationes in signis, video sex dari radices impossibiles.

Si radices impossibiles fuissent inveniendæ per regulam NEWTONIANAM, sic fuisset operandum.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3}{7} & \frac{5}{9} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{9} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & - 5x^6 & + 15x^5 & - 23x^4 & + 18x^3 & + 10x^2 & - 28x + 24 = 0. \\ + & - & + & - & + & - & + \end{array}$$

per quam regulam duæ tantum radices impossibiles inveniuntur, cum den-  
 tur sex, scilicet  $1 + \sqrt{-3}$ ,  $1 - \sqrt{-3}$ ,  $1 + \sqrt{-3}$ ,  $1 - \sqrt{-3}$ ,  $1 + \sqrt{-3}$ ,  $1 - \sqrt{-3}$ ,  
 $1 + \sqrt{-3} = 1$ ,  $1 - \sqrt{-3} = 1$ , septima radix est  $-1$ .

## DEMONSTRATIO

*Theorematis de Potentiis radicum &c.*

AUCTORE GEORGIO FRIDER. BAERMANNO

L. A. M. &amp; Math. Prof. Vitembergæ.

IN excellenti Opere ISAACI NEWTONI, quod *Aritmetica Universalis* inscriptum est, extat inter bene multa eximia inventa, quibus incomparabilis ille mathematicus Algebrae fines prorogavit, perlegans quoddam theorema, quo ille in loco de limitibus radicum æquationum usus est. Legitur id hisce verbis enuntiatum. „Ponamus cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse  $p, q, r, s, t, v$ , &c. eam nempe secundi  $p$ , tertii  $q$ , quarti  $r$ , quinti  $s$ , & sic deinceps; & signis terminorum probe observatis, fiat  $p = a, pa + 2q = b, pb + qa + 3r = c, pc + qb + ra + 4s = d, pd + qc + rb + sa + st = e, pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$ , & sic in infinitum, observata serie progressionis. Et erit  $a$  summa radicum,  $b$  summa quadratorum ex singulis radicibus,  $c$  summa cuborum,  $d$  summa quadrato-quadratorum,  $e$  summa quadrato-cuborum,  $f$  summa cubo-cuborum, & sic in reliquis.” Cujus regulæ cum aliquoties magnum usum, non solum in theoria de limitibus æquationum, sed & in aliis quæstionibus tractandis, expertus essem; non contentus ejus per inductionem probatione, perfectam demonstrationem habere exoptabam. Sed ut ipse hujus theorematis inventor id sine omni demonstratione vel analysi exposuit; ita nec ab aliis mathematicis, quorum scripta evolvere mihi licuit, ejus aliquam demonstrationem traditam reperi. Ego vero demonstrationem hujus regulæ aliquoties pertentans, quoniam ex theoria formationis potestatum eam ducendam esse falso persuasus eram, semper in inductionem valde incompletam, & jam in casu quintarum potestatum nimis intricatam, rejectus, scopum meum haud eram assecutus. Nuper autem cum JOANNIS BERNOULLII Opera evolvens, forte incidissem in locum, in quo illustris ille Geometra se *Newtoniani* istius theorematis, quod elegantissimum appellat, demonstrationem invenisse dicit, (\*) eamque iisdem operibus frustra quævissem: incitabatur animus, ut rem denuo aggrederer, & aliam nunc viam ingressus ad veram ejus regulæ demonstrationem per-

ve-

(\*) Vide Operum Tom. IV. p. 22.



venisse mihi video. Quam ergo inveni laudati theorematism demonstrationem, eam nunc, hac descriptione analytice exponere constitui.

§. I.. Sint series sequentes.

I.	II.	III.	IV.	V.
<i>a</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
<i>b</i>	<i>ab</i>	<i>o</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
<i>c</i>	<i>ac, bc</i>	<i>abc</i>	<i>o</i>	<i>o</i>
<i>d</i>	<i>ad, bd, cd,</i>	<i>abd, acd, bcd</i>	<i>abcd</i>	<i>o</i>
<i>e</i>	<i>ae, be, ce, de</i>	<i>abe, ace, bce, ade, bde, cde</i>	<i>abce, abde, acde, bcde</i>	<i>abcde</i>
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Termini seriei primitivæ *a, b, c* &c. sunt qualibet quantitates sub signis suis + vel —. In qualibet autem secundarum serierum terminus ordinis *n* (initio numerandi facto a cyphris) formatus est ex *n — 1* terminis seriei proximæ præcedentis, multiplicando singulos per terminum *n<sup>um</sup>* in serie I. Commata, quibus uniuscujusque termini partes distinctæ sunt, signa + vel — denotant, quæ iis partibus ex lege multiplicationis conveniunt.

§. II. Sit summa *n* terminorum sub signis suis in serie I. = *α*, summa *n* terminorum sub signis suis in serie II. = *β*, summa *n* terminorum in serie III. = *γ*, in serie IV. = *δ*, in serie V. = *ε*, & sic deinceps. Evidens ergo est fore.

*β* = summæ productorum ex singulis binis inter *n* terminos seriei I.

*γ* = summæ productorum ex singulis ternis *n* terminos ejusdem seriei

*δ* = summæ productorum ex singulis quaternis

*ε* = summæ productorum ex singulis quinis &c. &c.

§. III. Quoniam, si numerus terminorum *n* in serie I. unitate crescere ponitur, terminus ordinis *n + 1* fit incrementum summæ *α*, vocabimus terminum *da*. Si e. gr. *n* = 4, est *da* = *e*, fin *n* = 3, est *da* = *d*. Similiter, quia, si *n* transit in *n + 1*, *β* crescit termino (*n + 1*)<sup>to</sup> seriei II: appellabimus hunc terminum *dβ*. Sic, si iterum fuerit *n* = 4, erit *dβ* = *ac, bc, ce, de*. Eadem ratione terminus ordinis *n + 1* in serie III dicatur = *dγ*; terminus ordinis *n + 1* in serie IV = *dδ*; in serie V = *dε*, & sic porro. Ex his & lege formandarum illarum serierum (§. 1.) apparet, esse

$$\begin{aligned}
 d\beta &= \alpha da \\
 d\gamma &= \beta da \\
 d\delta &= \gamma da \\
 d\epsilon &= \delta da \\
 \&c. &\&c.
 \end{aligned}$$

Et

Et generaliter: si in serie §. 2.  $\alpha, \beta, \gamma$  &c. sit quantitas  $\vee$  ordinis  $m$ , &c terminus  $\tau$  ordinis  $m - 1$ , fore  $d\vee = \tau d\alpha$ .

§. IV. Si porro summa  $n$  terminorum seriei I. ( $= a$ )  $= A$ , summa quadratorum ex totidem terminis seriei I.  $= B$ , summa cuborum ex totidem terminis seriei I. sub signis suis  $= C$ , summa biquadratorum  $= D$ , summa quintarum potestatum sub signis suis  $= E$ , &c. Manifestum inde est, si iterum littera  $d$  incrementum designemus, quod summa potestatum ex  $n$  terminis seriei primæ capit, dum  $n$  unitate crescit, fore.

$$\begin{aligned} dA &= d\alpha \\ dB &= d\alpha^2 \\ dC &= d\alpha^3 \\ dD &= d\alpha^4 \\ dE &= d\alpha^5 \end{aligned}$$

Et generatim: Si  $V$  sit summa potestatum gradus  $m$  ex singulis  $n$  terminis seriei primitivæ, fore  $dV = d\alpha^m$ . Nam e. gr.  $dC$  notat incrementum, quod accipit summa cuborum ex  $n$  terminis primitivæ seriei, dum  $n$  transit in  $n + 1$ .  $C$  ergo crescit cubo termini ordinis  $n + 1$  in eadem serie; qui terminus cum sit  $d\alpha$  (§. 3). necesse est ut sic  $dC = d\alpha^3$ .

§. V. Ex his autem & iis, quæ §. 3. dicta sunt, sequitur esse.

$d\alpha dB$	$= dC$	$d\beta dB$	$= \alpha dC$	$d\gamma dB$	$= \beta dC$	&c.
$d\alpha dC$	$= dD$	$d\beta dC$	$= \alpha dD$	$d\gamma dC$	$= \beta dD$	&c.
$d\alpha dD$	$= dE$	$d\beta dD$	$= \alpha dE$	$d\gamma dD$	$= \beta dE$	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Et generaliter: Si  $\tau, \xi$  sint duo termini in serie §. 2. continui, atque  $T, V$  duo termini in serie §. 4. se invicem, nullo interposito, excipientes, erit  $d\xi dT = \tau dV$ . Etenim (§. 3)  $d\xi = \tau d\alpha$ , & posito  $dT = d\alpha^{n-1}$ , erit  $dV = d\alpha^n$ . Ergo  $d\xi dT = \tau d\alpha^n = \tau dV$ .

§. VI. Jam primo, ut inveniam relationem inter  $A, B, \alpha$  &  $\beta$ , intueor æquationem (§. 3.)  $d\beta = \alpha d\alpha$ , & dispicio, quænam, per methodum incrementorum, addi debeant secundo membro, ut id quantitas incrementalis completa fiat. Deinde, his ad posterius membrum additis, & iisdem (vel totidem aliis, sed illis sigillatim æqualibus) quantitativis priori membro adjunctis, ut æqualitas utrinque conservetur, redeo ad summas terminorum, quæ relationem quæsitam inter  $A, B, \alpha$  &  $\beta$  ostendunt. Itaque cum quantitati  $\alpha d\alpha$  addendæ sint  $\alpha d\alpha + d\alpha^2$ , ut quantitas incrementalis completa habeatur (\*); sit autem  $d\alpha^2 = dB$ : ad æquationem  $d\beta = \alpha d\alpha$

addo æquationem  $d\beta + dB = \alpha d\alpha + d\alpha^2$ ; sit  $2d\beta + dB = d. \alpha\alpha$ .

Hinc

(\*) Si hujus demonstrationem desideras, vide §. 12.

Hinc redeundo ad summas invenitur

$$2\beta + B = ax = Ax.$$

§. 7. Secundo investigaturus relationem inter  $A, B, C, a, \beta, \gamma$ , sumo sequentem æquationem §. 3.  $dy = \beta da$ . Cujus posteriori membro, ut id completa incrementalis fiat, addere oportet  $ad\beta + d\beta da$ . Est autem  $ad\beta = Aada$  (§. 3. 4), &  $d\beta da = ada^2$  (§. 3.) =  $adB$  (§. 4). Ergo ad æquationem  $dy = \beta da$

addita æquatione  $Aada + adB = ad\beta + d\beta da$ , fit

$$dy + Aada + adB = d. A\beta$$

Nunc, ex §. 6. substituitur valor quantitatis  $Ax$ ; & prodibit sequens æquatio

$$dy + 2\beta da + Bda = d. A\beta,$$

quæ, cum sit  $\beta da = dy$ , huic æquipollet

$$3dy + Bda = d. A\beta.$$

Denique, ut compleatur quantitas incrementalis in secundo termino obvia, addatur æquatio  $dxdB - dC = 0$  (§. 5); & habebimus

$$3dy + Bda - dC = d. A\beta.$$

Unde, capiendo summas singulorum terminorum, invenitur

$$3\gamma + Bx - C = A\beta.$$

§. 8. Similiter, ut definiatur relatio inter  $A, B, C, D, a, \beta, \gamma$  &  $\delta$ , consideremus æquationem §. 3.  $d\delta = \gamma da$ .

Hujus secundo membro, ut id summabile fiat, addi debent quantitates  $ady + d\gamma da$ . Atqui est  $ady = A\beta da$  (§. 3. & 4), atque  $d\gamma da = \beta da^2 = \beta dB$  (§. 4). Ergo, ad æqualia æqualibus adjectis, fit

$$d\delta + A\beta da + \beta dB = d. A\gamma.$$

Et in locum quantitatis  $A\beta$  substituto ipsius valore ex æquatione ultima §. 7. fit.

$$d\delta + 3\gamma d\alpha + B\delta d\alpha + C\delta d\alpha + \delta d\beta = d. A\gamma,$$

$$\text{seu, quia } 3\gamma d\alpha = 3\delta\delta, \text{ \&c. } d\alpha = d\beta \text{ (§. 3),}$$

$$4d\delta + B\delta d\beta + C\delta d\alpha = d. A\gamma.$$

$$+ \delta d\beta$$

Quare, addita æquatione  $d\beta d\beta = adC \rightarrow dadC + dD = 0$  (§. 5), habemus

$$\begin{aligned} 4d\delta + C\delta d\beta + C\delta d\alpha + dD &= d. A\gamma. \\ + \delta dC &= adC \\ + d\beta dC &= dadC \end{aligned}$$

Ex quâ æquatione, summas singulorum terminorum capiendò, elicitur hæc

$$4\delta + B\beta = C\alpha + D = A\gamma.$$

§. 9. Eadem via relationem inter  $A, B, C, D, E, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ , &c. invenire, & continue ad altiora progressum facere licet. Sed ut, quæ ad perfectam *Newtoniani* theorematism demonstrationem adhuc requiri videntur, generatim & univèrse persequamur, sequens theorema ostendere lubet.

Sint in serie quantitatum  $A, B, C$ , &c. §. 4. expositarum tres quævis  $S, T, V$ , se invicem ordine excipientes, & postrema quidem  $V$  sit summa potestatum gradus  $m + 1$  ex quotvis singulis terminis seriei primæ §. 1. præcedens autem  $T$  summa potestatum gradus  $m$  ex totidem terminis; sint porro  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \tau, \nu$  in serie quantitatum  $\alpha, \beta, \gamma$ , &c. §. 2. expositarum sese ordinatim excipientes, sic ut ultima quidem  $\nu$  sit summa productorum ex singulis  $(m + 1)^{\text{enis}}$  terminis seriei primæ §. 1. præcedens vero  $\tau$  summa productorum ex singulis  $m^{\text{enis}}$  terminis ejusdem seriei, &c. Dico, si fuerit

$$m\tau + B\epsilon = C\tau + D\delta \dots S\alpha + T = A\epsilon$$

signis litterarum  $B, C, D, \dots$  alternantibus, fore

$$(m + 1)\nu + B\tau = C\delta + D\epsilon \dots T\alpha + V = A\tau.$$

Nam inter æquationes §. 3. sumta illâ, quæ est ordinis  $m$ , scilicet  $dv = d\alpha$ , ut secundum ejus membrum quantitas incrementalis completa reddatur, addere illi oportet  $ad\tau + d\tau d\alpha$ . Sed (§. 3.)  $ad\tau = A\delta d\alpha$ , &  $d\tau d\alpha = d\alpha$  (§. 4). Ergo generatim habemus

$$1). dv + \delta dB + A\delta d\alpha = d. A\tau.$$

Jam substituto hic pro  $A\epsilon$  ipsius valore, erit

(2)

$$2) \quad dv + edB + mda + Bda + Cda + Dda \dots \pm Sda \pm Tda = d. Ar.$$

Atqui per æquationem initio sumtam est  $mda = mdo$ , ideoque  $dv + mda = (m + 1) dv$ , & cum  $e, o$  sint quantitates in serie §. 2. continuæ, evidens est ex §. 3. fore  $eda = de$ . Eadem ratione patet, esse  $nda = de$ ,  $oda = de$ , &c. Itaque, substitutione rite facta, habetur

$$3) \quad (m + 1) dv + edB = Cde + Dd\pi \dots \pm Tda = d. Ar.$$

Cujus æquationis priori membro addatur  $\mp dv$ , & suppleantur in singulis ejusdem membri terminis eæ quantitates, quæ accedere debent, ut ex quolibet termino quantitas integralis seu summa erui possit. Quibus factis præcedens æquatio sub nova tantum specie redibit

$$4) \quad \begin{array}{rcl} (m + 1) dv + edB & = & Cde + Dd\pi \dots \pm Tda \mp dv = d. Ar. \\ & + & Cdo \quad \quad \quad edC + \pi dD \quad \quad \quad \pm adT \\ & + & d\pi dB \quad \quad \quad d\pi dC + d\pi dD \quad \quad \quad \pm dadT \end{array}$$

Etenim vi §. 5.  $d\pi dB = edC = 0$ , &  $d\pi dC + \pi dD = 0$  &c. Ergo ejusque terminorum, qui secundum terminum sequuntur, pars media, & pars ima termini præcedentis, se mutuo destruant. Denique esse quoque  $\pm dadT \pm dv = 0$ , ex §. 5. apparet. Ergo æquationem 3) sub membrorum æqualitate in 4) transmutari posse, certum est. Quod cum ita sit, eliciendo ex singulis terminis æquationis 4) quantitates integrales,

$$(m + 1) v + B\sigma = C\epsilon + D\pi \dots T\alpha \mp V = Ar.$$

§. 10. Hocce theorema legem progressus æquationum, quibus relationes inter quotvis ex quantitatibus  $A, B, C, D$ , &c. & totidem ex quantitatibus  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  &c. definiuntur, in se continet. Nimirum, quia invenimus (§. 6. 7. 8.)

$$\begin{array}{rcl} 2 \beta + B & = & A\alpha \\ 3 \gamma + Ba & = & C = A\beta \\ 4 \delta + B\beta & = & Ca + D = A\gamma: \text{erit vi theor. §. 9;} \\ 5 \epsilon + B\gamma & = & C\beta + Da = E = A\delta \\ 6 \zeta + B\delta & = & C\gamma + D\beta = Ea + F = A\epsilon \\ & & \&c. \quad \quad \quad \&c. \end{array}$$

Verum, ut clarior fiat illa progressionis lex, & verbis possit distinctius exprimi, terminos harum æquationum, alio ordine positos, hic infra exhibebo.

$$\begin{array}{rcl} B & = & A\alpha \quad \quad \quad 2\beta. \\ C & = & Ba \quad \quad \quad A\beta + 3\gamma. \\ D & = & Ca \quad \quad \quad B\beta + A\gamma \quad \quad \quad 4\delta. \\ E & = & Da \quad \quad \quad C\beta + B\gamma \quad \quad \quad A\delta + 5\epsilon. \\ F & = & Ea \quad \quad \quad D\beta + C\gamma \quad \quad \quad B\delta + A\epsilon \quad \quad \quad 6\zeta. \\ \&c. & & \&c. \end{array}$$

Manifestum igitur est, ad inveniendum valorem quantitatis littera aliqua majuscula in serie §. 4. expressæ, scribendas esse omnes majusculas illam antecedentes, secundum alphabeti ordinem, inchoando ab ea quæ illi proxima est; deinde singulas majusculas ducendas esse in litteras alphabeti græci, ordine succedentes, sic ut prima majuscula in  $\alpha$ , sequens in  $\beta$ , & sic porro, ducatur; ultimo autem horum productorum jungendum factum ex sequenti littera græca in numerum, qui ejus in alphabeto locum indicat; tandem seriei sic formatæ terminis præfigenda esse signa + & — alternatim, incipiendo a signo +.

§. 11. Et hæc quidem, quas postremo loco receasui æquationes, ex ipse sunt, quæ in theoremate *Newtoniano*, quod demonstrandum mihi sumiseram, traduntur. Constat enim, cognitam quantitatem secundi termini in omni æquatione, signo ejus mutato, esse summæ omnium radicum æquationis æqualem. Hinc, si series prima §. 1. sit series radicum alicujus æquationis erit nostrum  $A$  vel  $\alpha = a$  vel  $p$  in formulis *NEWTONI*. Coefficientis cognita tertii termini æquationis, quæ *NEWTONO* est —  $q$ , æqualis est aggregato productorum ex singulis binis radicibus sub signis suis, quod nobis erat  $= \beta$ . Cognita quantitas quarti termini æquationis, signo ipsius mutato, quam *NEWTONUS* dixit  $r$ , est summa factorum ex singulis ternis radicibus, quam nos posuimus  $= \gamma$ . Cognita quantitas quinti, signo ejus manente, & quæ ergo ex *NEWTONI* denominatione erit  $= -s$ , est summa productorum ex singulis quaternis radicibus, quam nos vocavimus  $\delta$ . Coefficientis termini sexti sub signo contrario, quæ *NEWTONO* est  $= t$ , quia æquatur aggregato productorum ex singulis quintis radicibus, in nostra nomenclatura est  $= e$ ; & sic deinceps. Ergo pro  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, e$  &c. in posterioribus formulis §. 10. scriptis  $p, -q, r, -s, t$  &c. respective, & pro  $A, B, C, D$  &c. substitutis litteris *NEWTONI*  $a, b, c, d$  &c. fit.

Summa quadratorum  $b = ap + 2q$

cuborum  $c = bq + aq + 3r$

biquadratorum  $d = cp + bq + ar + 4s$

quadrato-cubor.  $e = dp + cq + br + as + 5t$   
&c. &c.

§. 12. Quæ in superioribus de incrementis quantitatum variabilium, & de inventionem æquationis integralis ex æquatione incrementalī, sine demonstratione assumi, ne filum analyseos rumperem, ea in gratiam eorum lectorum, quibus forte methodus incrementorum nota vel familiaris non est, hoc loco, quoniam id breviter fieri potest, demonstrabo.

Intelligantur duæ quantitates variabiles  $A, B$ , & dum altera earum  $A$  crescit quantitate  $\alpha$ , altera  $B$  ponatur crescere quantitate  $\beta$ . Dico producti ex utraque  $AB$  incrementum simultaneum esse  $B\alpha + A\beta + \alpha\beta$ . Nam quia  $A, B$  crescendo factæ sunt  $A + \alpha, B + \beta$ : necesse est ut productum ex iis nunc factum sit  $(A + \alpha)(B + \beta) = AB + B\alpha + A\beta + \alpha\beta$ . Verum

in

in primo earum quantitatum statu erat productum ex ipsis  $AB$ . Evidens itaque est, incrementum hujus producti esse  $B\alpha + A\beta + \alpha\beta$ . Cui consequens est, incrementum, quod capit  $AA$ , dum  $A$  crescende fit  $A + \alpha$ , esse  $2A\alpha + \alpha\alpha$ . E converso igitur, si  $B\alpha + A\beta + \alpha\beta$  spectari potest ut quantitas incrementalis (potest autem ut talis spectari, si constet,  $\alpha$  esse incrementum variabilis  $A$ , &  $\beta$ , simultaneum incrementum variabilis  $B$ ): quantitas integralis, seu summa, ad quam istud incrementum pertinet, erit  $AB$ .

Porro, sint plures  $A, B, C$ , &c. quarum relatio generaliter & perpetuo definiatur æquatione e. gr. hac,  $A - B = C$ . Sint earum valores præsentis simultanei  $a, b, c$  respective, & incrementa, quæ mox, cum mutabuntur, accipiant,  $\alpha, \beta, \gamma$  respective. Ergo in statu præsentis illarum variabilium obtinet hæc æquatio  $a - b = c$ ; & in statu mox futuro locum habebit hæc,  $a + \alpha - b - \beta = c + \gamma$ . Igitur, præcedente æquatione huic subtracta, necesse est, ut sit etiam  $\alpha - \beta = \gamma$ . Quare, e converso, obsecrum esse nequit, ex æquatione incrementalī completa, velut  $\alpha - \beta = \gamma$ , recte colligi æquationem integram  $A - B = C$ , quæ variabilium constantem ad se mutuo relationem definiat. Atque hæc quidem eorum, quæ in superioribus sumpta fuere, illustrationi sufficiunt.

## ABRAHAM I GOTTELPHI KÆSTNER

PROFESSORIS GOTTINGENSIS

## DEMONSTRATIO

*Theorematis Harriotti.*

## PROPOSITIO I.

IN ÆQUATIONE quadratica tot sunt permutationes quot radices positiva, & adeo tot successiones quot negativa. Pono autem hic & semper in sequentibus, nisi contrarium moneatur, omnes radices esse reales.

DEM. SIT. (1)  $x^2 + px + q = 0$ , (2)  $x^2 - px + q = 0$  (3)  $x^2 + px - q = 0$   
(4)  $x^2 - px - q = 0$ , erit pro duobus prioribus casibus  $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}$

& pro posterioribus  $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + q\right)}$ , notante puncto signum ipsius

$p$  signo in æquatione oppositum. Jam, erit casibus primis  $\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}$  minor  $\frac{1}{2}p$

& adeo casu 1. utraque radix negativa, sunt vero & duæ successiones, casu 2. altera positiva altera negativa, adest vero successio & permutatio.

Deinde casibus postremis est  $\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + q\right)}$  major  $\frac{1}{2}p$  unde tam casu 3 quam 4,

erit una radix positiva altera negativa, adest vero etiam utroque casu una successio & una permutatio. Q. E. D.

## PROP. II. LEMMA.

SERIES signorum + & —, utcunque permixtorum, habet permutationes numero *pari*, si finiat per +, *impari* si finiat per —

DEM. PONATUR series aliquot ejusmodi signorum augeri accedente uno, ita tamen ut & in serie aucta, primum signum sit + & ultimum adhuc + vel — prout erat antea: Dico permutationum numerum vel non augeri



geri, vel augeri binario. Inferatur enim novum signum utcumque in mediam feriem, & ponetur vel inter duo similia (puta + inter duo +, aut - inter duo -) tumque permutatio nulla accedit, vel inter duo dissimilia, acceduntque permutationes duæ, vel inter simile & dissimile, destruiturque permutatio quæ ante erat inter hæc duos, accedit vero alia permutatio loco ejus, atque nova etiam successio. Si vero accedens signum debet addi ante primum vel post ultimum, oportet ut ei simile sit, adeoque addat successiorem, non permutationem. Omnibus ergo his casibus vel non augentur permutationes, vel augentur binario. Quibus intellectis perspicitur, si in una aliqua serie signis quam paucissimis constante propositio vera sit, veram etiam fore in alia quavis plura signa habente. Sed serierum, quæ a signo + incipientes per + finiunt, atque permutationes habent, paucissimis terminis constans, est + - + in qua sunt permutationes numero pari, quare si augeatur in ea signorum multitudo ita tamen ut extrema maneat +, vel non crescat permutationum numerus vel crescat binario, manebitque adeo semper par.

INTER eas vero series quæ finiunt per -, paucissimis terminis constat hæc + - - habens permutationem unicam. Igitur permutationum numerus, vel non crescens vel crescens binario, semper manet impar. Q.E.D.

## P R O P. III.

CURVA quam æquatio  $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + tx + u = y$  definit, intellecto per  $m$  numero positivo integro, duobus crinibus divergit in infinitum, ad eandem axis partes si ferit  $m$  par, ad diversas si  $m$  impar, potest vero axem secare  $m$  vicibus & quavis intersectione transit  $y$  in oppositum.\*

DEM. SIT  $AP = x$ ,  $PM = y$ , cadant vero abscissæ positivæ ad dextram puncti  $A$ , ordinatæ positivæ supra axem. Jam ad  $x = \infty$  est  $y = x^m$  infinitum, positivum quidem si  $m$  sit par, quaecumque signum habeat  $x$ , sed negativum pro  $x$  negativo si sit  $m$  impar. Porro æquatio determinata quæ prodit ponendo  $y = 0$  habet radices  $m$ , unde potest  $y$  evanescere  $m$  vicibus, si earum radices omnes sint reales. Denique ad quamvis intersectionem, puta ad  $E$ , curva axem transit, & proinde  $y$  etiam transit in oppositum, nisi forte cocuntibus duabus intersectionibus curva axem tangat. Q.E.D.

COR. I. COGITETUR alia curva, pro qua sit  $mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} + \dots + t = Z$ , erunt  $Z$  ut  $dy$ , posita  $dx = 1$ . Hæc igitur curva potest præcedentis differentialis vocari. Et sic pergi potest, formando hujus fluxionalis fluxionalem, atque opus urgendo donec deveniatur ad lineam rectam, quæ erit curvæ *prop.* differentialis gradus  $m-1$ .

COR. II. AD ea  $x$  ad quæ est  $Z = 0$ , est quoque  $dy = 0$ , & adeo  $y$  maximum aut minimum, vel, si utrumque communi vocabulo complecti velis, *limes*. Sic si  $GH$  sit ordinata, negativarum inter  $C$  &  $D$ , maxima, erit

\* Vide fig. ad hanc pag.

*AG* abscissa, ad quam differentialis curvæ propositæ axem suum fecat; Vel si *KI* (= *AG* adeoque ad  $x$  idem;) *HI* ordinata minima positivarum quæ cadunt inter *C* & *D* in novum axem.

COR. III. SECEt curvæ axem  $m$  vicibus, & sit *F* ultima interseccio versus dextram, erit curvæ ad dextram puncti *F* perpetuo supra axem, & adeo ad sinistram infra. Unde ordinatæ inter *F* & intersectionem proximè præcedentem *E* sunt negativæ, & *VW* limes inter eos, est maximum negativum. Inter *E* & *D* vero limes *PM* est maximum positivum, & inter *D*, *C* rursus est *GH* maximum negativum, atque sic porro omnes limites sunt maxima, signis suis alternantia ab ultimo negativo, a quavis epim intersectione ad proximè præcedentem ordinatæ crescere atque rursus decrescere debent.

COR. IV. PROINDE si ad  $x$  aliquod ubi est  $dy = 0$ , sit  $y$  non maximum sed minimum, pereunt ibi duæ intersectiones & sunt in æquatione *Prop.* posito  $y = 0$ , duæ radices impossibiles. Sic si curvæ in *fig.* referatur ad axem per *K* transeuntem, spectabit ad æquationem quinti gradus cujus quatuor radices sunt impossibiles, duæ propter minimum *HI*, duæ propter minimum *WX*. Nam si  $y$  fiat minimum, necesse est ut antea decreverit & post rursus crescat, & proinde si tale  $y$  non sit ultimus ex limitibus, sed ex intermediis ut *HI*, ordinatæ, nec ante ex infinito decreverunt, nec post in infinitum crescunt, sed cadunt utrinque duo maxima *ST*, *MQ*, ejusdem cum minimo *HI* signi, patetque perire duas intersectiones *C* & *D* quæ contigissent si loco *HI* minimi, fuisset *GH* maximum maximis duobus *RS*, *PM* oppositum, curvæ relata ad axem *AF*, ubi spectasset ad æquationem quinque dimensionum, habentem omnes radices reales. Non dissimili ratiocinio ostenditur perire duas intersectiones ultimas, *E*, *F*, si limes ultimus ad *V* non sit maximum negativum ut *VW*, sed minimum positivum ut *WX*, nec non perire duas intersectiones maxime versus sinistram sitas *B*, *C*, si ad abscissam maximam negativam, ad quam est  $dy = 0$  (vel minimam positivam, si tales negativæ non adsint) limes est positivus in casu  $m$  par, negativus in casu  $m$  impar. Hæc autem latius persequi hic nihil attinet.

COR. V. SPECTET curvæ ad æquationem cujus radices omnes sunt reales, hoc est contingant intersectiones  $m$ , sint vero abscissæ positivæ ad quas cadunt limites, numero  $n$ , & erunt limites omnes maxima, signis suis alternantia, ita quidem ut si ultimus versus dextram, scilicet *VW*, dicatur  $n^{ius}$  & reliqui *MP*,  $n-1$  ac *GH*,  $n-2$  &c. sit

$n^{ius}$	negativus	$n-1^{ius}$	positivus
$n-2$	-	$n-3$	-
$n-4$	-	$n-5$	-
$n-2k$	-	$n-2k-1$	-

Proinde, si quæretur qualis sit primus ad abscissam *AG*, sitque  $n$  impar, patet esse debere  $n-2k = 1$  seu esse cum negativum, ut *GH* in *fig.* ubi

ubi  $n = 3$ ; si vero sit  $n$  par, erit  $n - 2k - 1 = 1$ , & limes maximum positivum.

COR. VI. IN HYPOTHESI *Cor. præc.* cadent semper non pauciores quam  $n$  intersectiones ad abscissas positivas. Nam inter quævis duo maxima proxime se sequentia, cum sint opposita (*Cor. 3.*), cadit intersectio, & adeo inter maxima  $n$  cadunt intersectiones  $n - 1$ . Porro cum ultimum maximum sit negativum (*Cor. 3.*); dabitur adhuc  $n^{\text{ta}}$  intersectio  $F$ , accedens prioribus  $n - 1$ , puta duabus  $E, D$ , quæ cadunt inter tria maxima  $VW, PM, GH$ .

COR. VII. SIT  $AG$  abscissa ad quam spectat maximum primum  $GH$  ex præfatis  $n$ , atque sit  $n$  impar, erit  $GH$  negativum, (*Cor. 5.*): sit æquationis *Prop.* ultimus terminus  $u$  positivus, seu sit  $+u$ , & ad  $x = 0$ , seu ad  $A$ , est curva supra axem. Unde debet axem inter  $G$  &  $A$  transire vel semel, vel ter, vel quinquies &c., numero impari. Sed cum inter quosvis duos transitus cadat maximum, darentur maxima adhuc inter  $G$  &  $A$ , adeoque ad abscissas positivas, *contra hyp.* Ergo transit axem saltem semel, ut in  $G$ . Si vero sit  $-u$ , est ad  $A$  infra axem, cumque adeo inter  $G$  &  $A$  vel non transit, vel transit bis, quater, &c., numero pari, quod rursus fieri nequit, ne plura quam  $n$  maxima oriantur. Ergo non transit. Proinde si sit  $n$  impar, erunt intersectiones ad abscissas positivas, numero  $n + 1$  si sit  $+u$ , &  $n$  si sit  $-u$ . Nam  $n$  semper sunt, etiam si nulla sit inter  $G$  &  $A$  (*Cor. præc.*)

COR. VIII. SI SIT  $n$  par, erit limes primus positivus (*Cor. 5.*) Unde similiter, ut ante, deducitur fore intersectiones numero  $n + 1$  si sit  $-u$ , &  $n$  si sit  $+u$ .

# PROP. IV.

ÆQUATIO determinata quæ prodit ponendo  $Z = 0$  in *Cor. 1. præc.*, habeat tot radices positivas quot habet permutationes; & numerus utrasque indicans sit  $n$ : dico & æquationem quæ prodit *Prop. III.*, facto  $y = 0$ , habere tot radices positivas, quot ipsa habet permutationes.

DEM. PER HYP. æquatio pro  $Z = 0$  habet tot permutationes, quot habet formula  $x^m \cdot px^m \cdot qx^{m-2} \cdot \dots \cdot tx$ . Sit primo  $n$  par, & per *Lemma* erit  $+tx$ . Ergo in æquatione *Prop. III.* vel est  $+tx + u$  vel  $+tx - u$ . Sunt vero intersectiones curvæ cum axe ad abscissas positivas, (hoc est radices positivæ æquationis quæ proditposito  $y = 0$ ) casu 1. numero  $n$  & casu 2. numero  $n + 1$ . At manifestum etiam est permutationibus  $n$  quæ erant in  $x^m \cdot px^{m-1} \cdot qx^{m-2} \cdot \dots \cdot tx$ , accedere nullam, si sit  $+u$ , unicam si sit  $-u$ .

DEINDE si sit  $n$  impar, erit vel  $-tx + u$  vel  $-tx - u$  (per *Lemma*) & casu 1. erunt radices positivæ  $n + 1$ , casu 2. saltem  $n$  (*Cor. 7. præc.*) rursus-que patet tot esse radices positivas quot sunt permutationes. Q. E. D.

## PROP. V.

IN OMNI æquatione tot sunt radices positivæ quot sunt permutationes, sub conditione *Prop. I.*

DEM. VALET enim hoc de quadratica *Prop. I.* Ergo per *Prop. IV.* de cubica, cujus differentialis est quadratica, ergo de ea cujus fluxionalis est cubica, hoc est de biquadratica, & sic in infinitum, cum quævis æquatio sit differentialis ejus, cujus gradus est proxime superior. Q. E. D.

COR. CUM æquatio gradus  $m$  habeat terminos & signa numero  $m+1$ , sequitur ut si habeat permutationes numero  $n$ , successiones sint numero  $m-n$ . Sed si radices positivæ sint numero  $n$ , erunt negativæ numero  $m-n$ , adeoque tot negativæ quot successiones. Casus si  $n=0$  tum in his continetur: tum etiam ex genesi æquationum perspicitur, cum in oculos incurrat, si omnes radices sint negativæ, meras dari successiones.

SCHOL. CUR regula non possit applicari si æquatio radices imaginarias contineat, patet ex *Cor. 4. Pr. III.*; pereuntibus enim intersectionibus, hoc est ingredientibus æquationem radicibus imaginariis, cessat hypothesis cui innititur *Cor. 5. 6. 7. 8. Pr. III.* & adeo tota hæc theoria. Ceterum ex harum curvarum consideratione perspicitur etiam, duobus modis inesse posse imaginarias. Vel enim differentialis æquationis radices quædam sunt imaginariæ; vel hæc quidem omnes reales sunt, efficiunt vero quosdam limites minima, quæ maxima efficere debebant. Postremum genus pendet a conditione termini ultimi in æquatione, adeoque eo mutato tollitur. Ita parabolis in fig. exhibita, si referatur ad  $KQ$  axem, spectabit ad æquationem gradus 7. habentem 4. imaginarias ob unicam intersectionem  $T$ . Jam sit applicata quævis  $MQ = w$  &  $AK = b$ , & ejusdem curvæ ad  $AP$  axem relatæ applicata quævis  $MP = y$  eritque  $y = w - b$ ; & si ante fuerit  $x^1. px^4 - \dots - tx.u = w$ , erit jam  $x^1. px^4 - \dots - tx.u - b = y$ , solaque mutarione ultimi termini ex  $u$  in  $u - b$ , abiit æquatio in talem cujus omnes radices sunt reales. Quando vero differentialis æquationis radices sunt imaginariæ, limites plane sunt impossibiles atque  $y$  continuo crescunt. Tunc autem principalis æquationis imaginarias ab ejus coefficientibus pendere manifestum est. Sit  $x^1 * px.r = y$  &  $3x^2 * q = Z$ , ubi  $Z = 0$  ad

$x = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{3}q}$ , patet si  $q$  in æquatione sit numerus positivus, fore ambas æquationis differentialis, & adeo duas cubicæ, radices imaginarias, & in genere in quacunque æquatione cujus secundus terminus deest, fore imaginarias, si tertii termini, seu ipsius  $x^{m-2}$ , coefficientens fuerit positivus, quod evincitur formando differentiales usque ad eam quæ sit quadratica (*Cor. 1. Pr. III.*) Porro, si in cubica ante adducta sit  $x^3 - qx$ , & adeo  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}q}$  quantitas possibilis, requireretur tamen, quo omnes cubicæ radices reales sint, ut adhibito ante dicto ipsius  $x$  valore cum signo inferiore, prodeat in cubica  $y$  positivum, & signo superiore  $y$  negativum (*Cor. 4.*

Pr.

Pr. III.), hoc est ut casu priore sit —  $\frac{1}{3}qV + \frac{1}{3}q + qV + \frac{1}{3}q + r$   
 quantitas positiva unde habetur  $\frac{1}{27}q^3$  major  $\frac{1}{4}r^2$ , quod idem etiam sequitur ex  
 altera hypothesi. His in vulgus notis, illustratur duplex modus, quo im-  
 possibiles æquationi inesse possunt. Inde etiam intelligitur quousque se ex-  
 tendant regulæ variæ a compluribus traditæ, pro impossibilibus cogno-  
 scendis. Quatenus enim inde pendent, ut datæ æquationis differentiales  
 formentur, usque ad eas quæ sunt quadraticæ, colligaturque si hæc habent  
 imaginarias, habituram etiam principalem, utique non possunt id imagina-  
 riarum genus detegere quod a solius ultimi termini conditionibus pendet.  
 Equidem quomodo substituendo radices æquationis differentialis in principa-  
 lem, possint hujus imaginariæ detegi perspicitur ex *Cor. 4. Pr. III.*; sed  
 quæ applicationem hujus methodi valde incommodam reddant quivis fa-  
 cile animadvertet.

## P. ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH

S. I. *Publici Matheſeos Profeſſoris in Collegio Romano.*

## OBSERVATIO

## IN PROBLEMA LVI.

**I**N Arithmetica Universali NEWTONI habetur problema 56. hujusmodi: *Cometæ motu uniformi rectilineo per Cælum trajicientis locis quatuor observatis, distantiam a terra, motusque determinationem in Hypothesi Copernicea colligere.* Hoc problema, ut hic a NEWTONO solvitur, congruit cum illo, quod habet Princ. lib. 1. prop. 26. corol. 1. ubi id ad simplices geometricas terminos reducit; sic autem ibi habet: *recta duci potest, cujus partes rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ datam habebunt proportionem ad invicem.* Nam ex quatuor observationibus cometæ visi e quatuor diversis Terræ locis redactis ad eclipticam, determinantur quatuor rectæ positione datæ, quæ nimirum tendunt a quatuor locis veris Terræ ad quatuor loca visa cometæ, & recta, quæ duci debet, est ipsa orbita cometæ redacta ad eclipticam, cujus partes, illis quatuor rectis positione datis interceptæ, sunt in hypothesi motus rectilinei, in ratione intervallorum temporis inter illas quatuor observationes, quæ ratio datur ex datis observationum momentis. Profert autem ibi tres ejus problematis constructiones, & innuit alias a Wrenno, & Wallisio ante ipsum excogitatas.

Cometæ distantiam a Terra is inquit lib. 3. lem. 4. quod consequitur Prop. 39., ac utitur hypothesi motus cometæ rectilinei & uniformis, negligendo nimirum inæqualitates, quæ habentur in orbe cometæ, qui orbis nec revera rectilincus est, nec motu uniformi percurritur. Solutio, quam ibi profert, reducit itidem ad solutionem ejusdem problematis, & ejus ope illud ipsum problema geometricum libri 1. resolvi facile posset reductione idonea adhibita, quæ aliam ejusdem solutionem exhiberet.

Addit ibidem NEWTONUS illud: *hic autem (locus cometæ in plano eclipticæ) orbe Jovis inferior esse solet.* Verum satis vereor, ne ipse numeros ad ejusmodi investigationem e selectis observationibus adhibere omiserit; quod si præstitisset, ego quidem arbitror, ipsum fuisse perspecturum, quam inepta sit ea methodus ad determinandam etiam crasso modo cometæ distantiam. Id ego casu comperi, & demonstravi in mea dissertatione de cometis edita anno 1744. Et quidem Eustachius Zanottus, Bononiensis Academiæ Astronomus, doctissimus sane, & tam geometriæ, quam

quam astronomiæ peritissimus, cum ad solutionem ejus problematis a NEWTONO traditam in Arithmetica Universali numeros applicuisset, usus observationibus Cometæ, quas censebat admodum accuratas, quæ vero a se invicem distarent per binos circiter dies, invenit distantiam prorsus absurdam, orbitam nimirum cometæ, qui apparuerat ad partes solis, invenit jacentem ad partes prorsus oppositas, sive, si quorundam Geometrarum vocabulis uti licet, distantiam invenit plusquam infinitam, quæ nimirum per infinitum traducta in negativam abierit e positiva, errore plusquam infinito. Et is quidem tum censuit errorem provenisse ex eo, quod observationes assumisset non satis proximas ad negligendam inæqualitatem motus cometæ, attributo errore non satis magnæ observationum propinquitati, qui ab ipsius methodi vitio pendet, ut ibidem ostendi.

Vitium autem methodi in eo consistit, quod problema determinans positionem rectæ a quatuor rectis positione datis sectæ dato ordine in ratione data, habet casum, in quo evadit indeterminatum, infinitas numero solutiones admittens, ita ut per quodvis punctum cujuscumque e quatuor rectis positione datis duci possit recta quæ ab iis eo dato ordine secetur in ea data ratione: & is ipse casus occurrit, si & motus cometæ & motus Terræ assumantur pro rectilineis & uniformibus. Nimirum inveni illud, si assumantur utcumque binæ rectæ, & in singulis tria segmenta eodem ordine jacentia versus plagam utramlibet, quæ sint ad se invicem in aliqua ratione data, ac per bina quævis homologa segmentorum extrema, ducantur rectæ, quæ erunt quatuor rectæ positione datæ; posse duci alias numero infinitas, nimirum aliam in quavis distantia ad arbitrium assumptam, quæ ab illis quatuor rectis secetur in illa eadem ratione data illo eodem ordine. Quamobrem si motus & Terræ & cometæ esset revera rectilineus, & uniformis, determinatio evaderet frustranea, ut in ejusmodi casibus accidit, in quibus problemata, quæ generaliter sunt determinata, evadunt indeterminata in quopiam casu particulari: & quoniam, quo magis ad rectilineum, & æquabilem accedit motus cometæ, quod non fit, nisi assumendo intervalla inter observationes minora, eo magis & motus Terræ accedit ad rectilineum & uniformem; idcirco, quo magis inter se proximæ assumantur observationes, eo magis ad indeterminatam problematis acceditur.

Determinatio igitur problematis oritur ab iis quantitativis, quibus ii bini motus recedunt a rectilineis & uniformibus, & quibus observationes aberrant a veris positionibus rectarum junctum vera loca Terræ, & loca cometæ redacta ad eclipticam; semper enim committuntur in observationibus erroruculi, utut exigui. Si motus cometæ parum ab ea hypothesi recederet, motus autem Terræ recederet, ita ut is recessus esset multo major quam recessus ille, & quam exigui observationum errores; tum determinatio haberetur veræ proxima. Sed quoniam recessus motus Terræ ab ea hypothesi est minor, quam recessus motus cometæ; determinatio oritur a quantitativis, quæ aberrant a positionibus pro ipsa determinatione faciendis; & si præterea exigua sunt temporum intervalla, uterque

recessus est exiguus etiam respectu errorum admissorum in observationibus; unde fit ut determinatio ipsa provenire possit utcumque remota a vera, nec nisi casu quodam, quo se errores omnes compensent, ad veram possit accedere; quam ob causam illud suspicor, NEWTONUM, cum aliunde nosset, cometas, ubi sub aspectum cadunt, infra Jovem descendere, methodi autem, quam proponebat, vitium nequaquam animadvertisset, illud affirmasse, distantiam ea methodo inveniri plerumque minorem distantia orbitæ Jovis. Id autem nihil omnino minuit æternum decus, quod sibi, ut ceteris tam multis & geometricis & astronomicis compertis, ita & hoc ex capite immortalis suæ cometarum theoriæ comparavit, quorum orbitæ qua ratione definiri debeant non in falsa hypothesi motus rectilinei, & uniformis, sed in vera motus facti in ellipsi, quæ ad parabolam accedat plurimum, comperit primus, & in eodem Principiorum lib. 3. exposuit, ac demonstravit.

Ut ea, quæ ad hanc problematis indeterminationem pertinent, demonstrentur omnia, proponam analysim geometricam problematis rectæ ducendæ inter quatuor rectas positione datas, ex qua orietur constructio fere prorsus congruens cum ea, quam admodum simplicem proposuit Simpsonus in suis Geometriæ elementis, quam tantummodo reddet paullo simplicior: ex ea vero casus hic indeterminatus sponte fluat.

Quatuor rectæ positione datæ sint in fig. 1.\* AB, AC, DE, FG, inter quas oporteat ducere rectam HL ita, ut ejus segmenta HI, IK, KL, iis intercepta, sint in ratione datarum TV, VX, XY.

Sit factum, & occurfus primæ e rectis datis cum quarta sit in F, secundæ cum primâ, & quarta, in A, & Q; ac tertiæ cum iisdem in D, & P; concipiantur autem per K, & I, rectæ parallelæ primæ, & quartæ, quæ sibi invicem occurrant in N, ac prior quartæ in O, posterior primæ in M: concipiatur præterea recta per A, N, occurrens quartæ in S, & recta per P, N, occurrens primæ in R: patet, fore similia triangula IMH, INK, LOK a lateribus parallelis constituta; ac rectas parallelas MN, FG a rectis FM, QI, SN, transeuntibus per idem punctum A fecari debere in eadem ratione, ut & ON, FR, a rectis FO, DK, RN, transeuntibus per idem punctum P itidem in ratione communi utrique. Hinc habebuntur hujusmodi proportionces

$$\begin{array}{l} FQ . QS :: MI . IN :: HI . IK :: TV . VX \\ FD . DR :: OK . KN :: LK . KI :: XY . VX \end{array}$$

Datur igitur ratio datarum FQ, FD ad rectas QS, DR, adeoque dantur & hæ rectæ, proinde etiam puncta S, R, adeoque & rectæ AS, RP, ex quarum concursu N ductæ rectæ NO, NM, parallelæ rectæ primæ & quartæ, per suos concursus cum tertiâ in K, & secunda in I, determinabunt positionem IK rectæ quæsitæ HL, adeoque ipsam rectam. Q.E.F.

Ex hac analysi sponte consequitur hujusmodi constructio. Fiat QS ad FQ,

\* Illarum, quæ ad hanc commentationem pertinent, quod & de reliquis intelligendum est.



FQ, ut VX ad VT, & DR ad FD, ut VX ad XY. Per A, S, & R, P, ducantur rectæ, ex quarum concursu N ducantur NK, NI parallelæ, illa primæ, hæc quartæ e rectis datis, & occurrentes illa tertiæ in K, hæc secundæ in I, ducaturque per I, & K, recta occurrens primæ in H, quartæ in L; & dico, rectam HL fore sectam in I, & K in eadem ratione, in qua recta TY secatur in V, X.

Productis enim rectis NI, NK, donec occurrant primæ, & quartæ in M, O, erunt similia triangula IMH, INK, LOK, a lateribus parallelis constituta, & rectæ parallelæ MN, FS, a rectis FM, QI, SN, transeuntibus per idem punctum A, secabuntur in eadem ratione; ac ON, FR, a rectis FO, DK, RN, transeuntibus per idem punctum P itidem in eadem ratione. Quamobrem habebuntur hujusmodi proportionales

$$\begin{array}{l} \text{HI} \cdot \text{IK} :: \text{MI} \cdot \text{IN} :: \text{FQ} \cdot \text{QS} :: \text{TV} \cdot \text{VX} \\ \text{IK} \cdot \text{KL} :: \text{NK} \cdot \text{KO} :: \text{RD} \cdot \text{DF} :: \text{VX} \cdot \text{XY} \end{array}$$

Sunt igitur tres rectæ HI, IK, KL inter se, ut TV, VX, XY inter se. Q. E. F.

In hac generali constructione concursus rectarum AS, RP, in N problema determinat, quod unicam solutionem habet determinatam, si illæ binæ rectæ in unicam non coalescunt; at iis coalescentibus in unicam rectam, problema evadit indeterminatum. Si nimirum punctum S abeat in P, & R in A; rectæ AS, RP, congruent, & in ea unica recta assumi poterit punctum N quodcumque, quod solutionem exhibebit. Tum autem casus redibit ad sequentem positionem, atque constructionem.

Sint in fig. 2. eadem rectæ AB, AC, DE, FG, quæ in prima, ac sit FQ. QP :: TV. VX, & FD. DA :: XY. VX; dico solutiones problematis fore numero infinitas. Ducta enim per A, & P, recta, assumatur in ipsa quodcumque punctum N, & per ipsum ducantur rectæ NKO, NIM parallelæ primæ, & quartæ e rectis datis, & recta HL ducta per I, & K problema solvet. Erit enim, ut in solutione generali

$$\begin{array}{l} \text{HI} \cdot \text{IK} :: \text{MI} \cdot \text{IN} :: \text{FQ} \cdot \text{QP} :: \text{TV} \cdot \text{VX} \\ \text{IK} \cdot \text{KL} :: \text{NK} \cdot \text{KO} :: \text{AD} \cdot \text{DF} :: \text{VX} \cdot \text{XY} \end{array}$$

Problema igitur in hoc casu evadit indeterminatum. Potest autem duci recta quæsitæ in quacumque distantia. Assumpto enim in recta AC, vel DE quovis puncto I, vel K, duci potest IN parallela FG, vel KN parallela AB, quæ in recta AP determinabit punctum N, & per ipsum ducta NK, vel NI, habebuntur puncta, I, K, & tota recta HL.

Quoniam autem licet considerare quovis ordine rectas datas, appellando primam, secundam, &c. quam libuerit, & semper dabitur ratio segmentorum rectæ ducendæ interceptorum iis consideratis eo ordine; potest per quodvis punctum cujusvis ex rectis datis duci recta quæsitæ; efficiendo nimirum, ut ea recta data consideretur tanquam secunda, vel tertia e datis quatuor.

Sint

Sint jam in fig. 3. binæ rectæ HL, HL' sectæ in I, K, & T, K' in eadem ratione, & per puncta H, H'; I, I'; K, K'; L, L'; transeant quatuor rectæ AB, AC, DE, FG; oportet ostendere, hunc esse casum indeterminatæ problematis, ita ut inter hujusmodi rectas infinitæ aliæ duci possint, quæ in eadem illa ratione secantur ab iisdem quatuor rectis, ac in data quavis distantia duci possit ejusmodi recta.

Ducantur per I, & I', rectæ parallelæ FG occurrentes AB in M, M'; tum per K, K', rectæ parallelæ AB occurrentes rectæ FG in O, O', & rectis, MI, M'I', in N, N'. Erit MI.IN :: HI.IK :: HI'.IK' :: M'I'.IN'. Quare tres rectæ M'M, I'I, N'N convergant ad punctum commune, adeoque ad punctum P. Est igitur APNN' unica recta, & idcirco est FQ.QP :: MI.IN :: HI.IK, & DF.DA :: OK.KN :: LK.KI. Sunt igitur FQ ad QP, & FD ad DA in ea ratione, quam debent habere extrema e tribus segmentis rectæ ducendæ ad medium, quod indeterminatæm expositam inducit.

Patent igitur omnia, quæ fuerant proposita, nimirum haberi casum in hoc problemate, in quo id evadat indeterminatum, & hanc ipsum esse casum, quo motus Terræ, & cometæ accipiantur pro uniformibus, & rectilineis, quo nimirum quatuor rectæ positione datæ transeant per puncta binarum rectarum sectarum in eadem quapiam ratione, quo nimirum casu infinitæ aliæ duci possunt eodem modo sectæ, ita ut in quavis distantia possit duci aliqua; unde consequitur, ex datis positione ejusmodi quatuor rectis, & ea ratione segmentorum rectæ inter eas interjacentis, non posse determinari hujus distantiam.

Præter hunc casum indeterminatum hujusce problematis, sunt & alii ex generali constructione evolvendi, in quorum quibusdam oportet ipsam etiam constructionem generalem nonnihil immutare.

In primis si in fig. 1. binæ rectæ AS, RP evadant parallelæ, punctum N abit in infinitum, ita ut nusquam jam sit. Tum & recta quesita in infinitum ita abit, ut nusquam jam sit; ac problema haberi potest pro impossibili. Nimirum eo casu nulla recta ita duci potest, ut a rectis positione datis secetur in illa ratione data. Is casus habetur, ubi sit FS.FP :: FA.FR. Facile autem eructur determinatio ejusdem casus per rectas FQ, FP, FD, FA, datas, & per segmenta datæ rectæ TY. Nam ex proportionem posita erit FS.FR = FP.FA. Porro cum sit FQ.QS ::

TV.VX, erit TV.TX :: FQ.FS =  $\frac{TX.FQ}{TV}$ , & eodem pacto

FR =  $\frac{VY.FD}{XY}$ . Hinc FS ad FR =  $\frac{TX.VY}{TV}$  ad  $\frac{FQ.FD}{XY}$ . Cum igitur

is valor debeat æquari FP.FA, erit TV.XY ad TX.VY :: FQ.FD ad FP.FA, quæ ratio si habeatur, problema nullam solutionem admittet.

Quod si in fig. 1. evanesceret FD vel FE, tribus rectis transeuntibus per idem punctum; oporteret in eo casu assumere ad arbitrium in prima recta punctum *f*, vel in quarta *f*, & ducere rectam *fs* parallelam quartæ e qua-

quatuor rectis datis, vel *fr* parallelam primæ, donec occurrat illa secundæ in *i*, vel hæc tertiæ in *d*, ac in iisdem assumere *is* ad *if*, vel *dr* ad *df* in ratione VX ad TV, vel ad XY, & occurfus rectarum transeuntium per *As*, & *Pr* exhiberet illud idem punctum M, quod eodem modo problema solveret. Esset enim.

$$\begin{aligned} \text{HI} \cdot \text{IK} &:: \text{MI} \cdot \text{IN} :: \text{fi} \cdot \text{is} :: \text{TV} \cdot \text{VX}. \\ \text{IK} \cdot \text{KL} &:: \text{NK} \cdot \text{KO} :: \text{rd} \cdot \text{df} :: \text{VX} \cdot \text{XY}. \end{aligned}$$

Si autem evanescerent & FD, & FQ; tunc omnes quatuor datæ rectæ transirent per idem punctum F, in quod idcirco abirent omnia quatuor puncta A, D, Q, P. Eo casu rectæ *As*, *Pr* transirent itidem per punctum F, & vel nusquam alibi sibi invicem occurrerent, abeunte & N eodem, vel abirent in unicam rectam, congruentes simul. Priorem casum exprimit figura 4., ubi quatuor rectis FB, FC, FE, FG transeuntibus per idem punctum F, ac assumptis *Ff*, *Fa* ad arbitrium, & factis, ut prius TV. VX :: *fi*. *is*, ac XY. VX :: *ad*. *dr*, binæ rectæ *Fs*, *Fr* nusquam concurrunt, nisi in F; posterior autem casus habetur in fig. 5., ubi eadem constructione facta, rectæ *Fr*, *Fs* in unicam coalescunt. In primo casu solutio nulla haberi potest cum nullum occurrat punctum N, quod in utraque e rectis *Fr*, *Fs* simul positum, possit exhibere simul illas duas rationes TV. VX, & VX. XY: in secundo casu problema est indeterminatum infinitas numero solutiones admittens. Assumpto enim ubicumque puncto N in recta *Frs*, & reliqua constructione peracta, ut in solutione generali, habebitur.

$$\begin{aligned} \text{HI} \cdot \text{IK} &:: \text{MI} \cdot \text{IN} :: \text{fi} \cdot \text{is} :: \text{TV} \cdot \text{VX}. \\ \text{IK} \cdot \text{KL} &:: \text{NK} \cdot \text{KO} :: \text{rd} \cdot \text{da} :: \text{VX} \cdot \text{XY}. \end{aligned}$$

Hic posterior casus pertinet ad illud ipsum problema indeterminatum, quod in fig. 2. exhibuerant rectæ AS, RP figuræ primæ, coalescentes in unicam AP ipsius figuræ 2.

Quod si prima, & secunda, vel tertia, & quarta e rectis datis essent inter se parallelæ; abiret punctum A, vel P in infinitum; & tunc in fig. 1. per S, vel *s* ducenda esset recta parallela primæ, & secundæ, vel per R, vel *r* ducenda esset recta parallela tertiæ, & quartæ, quorum concursus in N cum RP, vel *Pr*, vel cum AS, vel *As* solutionem exhiberet, congruente in primo casu, SN cum ON, & in secundo recta QC existente parallela primæ FB, & factis TV. VX :: FQ. QS ducenda est recta SKN parallela rectis QC, FB, cujus concursus in N cum recta RP determinata eodem pacto, quo in figura 1., exhibet constructionem, ducta itidem NIM parallela GF, & per I, K quæsitæ recta HIKL. Ex eo autem casu patet etiam secundus.

Quod si tres e rectis datis, vel omnes quatuor, forent inter se parallelæ; problema aut esset impossibile, aut haberet solutiones numero infinitas;

tas: verum eo casu generalis illa constructio locum non haberet, sed longiore ambitu alia inde derivari deberet, quæ in sequentem admodum expeditam desineret.

Sint in fig. 7. tres rectæ datæ inter se parallelæ  $AB$ ,  $A'C$ ,  $DE$ , quas secet in  $F$ ,  $Q$ ,  $P$  quarta  $FG$ . Si  $FQ$ ,  $QP$  non sunt, ut  $TV$ ,  $VX$ , patet problema fore impossibile; quia ducta quavis  $HIKL$ , erunt  $HI$ ,  $IK$ , ut  $FQ$ ,  $QP$ . Si autem hæ sunt in illa ratione; assumpta  $PL$  ad  $PQ$ , uti est  $XY$  ad  $XV$ , quævis recta  $LH$  ducta per  $L$ , & nulla alia, solvet problema. Patet primum, quia  $HI$ ,  $IK$ ,  $KL$  erunt ut  $FQ$ ,  $QP$ ,  $PL$ , sive ut  $TV$ ,  $VX$ ,  $XY$ . Patet secundum, quia quævis alia, quæ occurrat ipsi  $FG$  alicubi in  $I$ , habebit  $Ik$  ad  $ki$ , ut  $IP$  ad  $PQ$ , adeoque non ut  $LP$  ad  $PQ$ , & proinde nec ut  $XY$  ad  $XV$ .

Sed si & quarta sit itidem parallela, ut  $G'F'$ , & ducta quavis  $FQPL$ , ipsa non fuerit secta ut  $TVXY$ ; nulla alia  $hikL'$  erit ita secta, cum debeant ejus segmenta esse, ut segmenta rectæ  $FQPL$ .

Si autem  $FQPL$  fuerit ita secta, quævis alia  $hikL'$  ducta in quacumque distantia, & in quacumque directione erit itidem secta in eadem ratione. Cum autem & distantia puncti  $L'$  per quod recta ducatur, & ejus inclinatio variari possint utcumque; patet, tum solutiones fore infinitas infinitas, & problema indeterminatum indeterminatione secundi ordinis.

Hi sunt casus præcipui hujus problematis, quod, ut plerumque generalia problemata, casus habet plurimos, qui evolutionem particularem exigant singuli suam, & occurrunt casus, in quibus evadit impossibile, ac casus, in quibus evadit indeterminatum. In hoc problemate illud est dolendum maxime, quod unus ex casibus indeterminatis ibi potissimum accidat, ubi ipsum problema maxime usum habere posset, & pro quo in primis fuerat consideratum.

# MONITUM EDITORIS.

Quamquam pro viribus laboraverim, ut opellam hanc tibi approbarem, benigne LECTOR; tamen nonnulla mutanda & explicanda video, doctus ab Amico harum rerum peritissimo; nonnulla explanda & addenda ipse intelligo.

Quoniam in Dictionario eruditi MARCHAND, articulo S' GRAVE-SANDE; edita est epistola a me ad illustrem hunc virum scripta ipsis Kal. Juliis anni 1740. quæ continet totam hujus commentarii delineationem, quam probavit vir summus, dicere debeo cur multa deleverim, & aliam faciem commentario induxerim.

Primo, brevitati consulens, omisi nonnullas demonstrationes, quæ aliis in libris impressæ leguntur. Hujusmodi est demonstratio theorematum, quæ pro *inventione Divisorum* tradidit noster, excogitata tum a S' GRAVE-SANDE tum a Nic. BERNOULLIO. Hujusmodi pariter est *Geometria CURVARUM*, quam post hunc commentarium inceptum plures docti viri pertractarunt, inter quos eminent *Gabriel CRAMMERUS* & *Leonardus EULERUS*. Præterea non prorsus hanc tractationem flagitabat institutum nostrum. Hujusmodi pariter sunt *Physices*, *Astronomiæ* &c. principia, quæ necessaria sunt ut intelligantur nonnulla problemata a NEWTONO soluta, & quæ ideo pollicitus fueram, ne tiro ad alios libros confugere cogeretur. Tunc scilicet, quæ est Juvenum confidentia, sperabam me conscribere posse librum, quem tiro sine duce posset intelligere; nunc autem viginti annorum in docendo consumptorum experientia doctus, fateor me rem tunc aggressum esse, quam nec ego, nec nemo, puto, perficere potest. Quis enim asserere potest notiones prorsus omnes, quæ insunt in argumento quodam? Sed ex notionibus, quæ omittuntur, has facile supplet hic, ille difficile, alter ne difficile quidem. Hinc fit ut idem liber pro Lectorum ingenio, videatur perspicuus huic, illi obscurus. Præceptore opus est, qui intelligat quas notiones auditor supplere nequit, & illas ipsas enucleandas suscipiat, reliquas negligens, quæ discipulo sponte se sistunt.

Ceterum in Tomo I. longior videri potest demonstratio theorematum *binomialis*, quæ est pag. 25..34. N<sup>o</sup>. 94...133. Sed excusatum, obsecro, me habeat Lector rem a primis principiis deducere satagentem. & quatuor diversa theoremata demonstrantem. Nam a N<sup>o</sup>. 94. ad totum 110. trado *regulam pro multiplicandis binomiis quibuslibet*, quæ in Algebra fortasse non inutilis comperietur. A N<sup>o</sup>. 111. ad 114. *regulam pro multiplicandis binomiis unum Factorem communem habentibus*, quæ pariter sæpe uluvenit, præsertim in evolvendis æquationum proprietatibus. Ipsum *theorema binomiale*, quando nempe integer est exponent, traditur a N<sup>o</sup>. 115. ad 122. Reliqui complectuntur theorema pertinens ad *infinitimum*.

Pag. 104. & 105. Docet NEWTONUS quomodo eliminetur quantitas multarum dimensionum. Has regulas inexplicatas reliqui, tum quia habentur explanatæ a Gabriele CRAMERO ad calcem *Geometriae curvarum*, tum quia

quia sine multis ambagibus res explicari non poterat; & cum hæ regulæ minus utiles sint ad intelligendum totum librum NEWTONI, Lector, quando iis opus habebit, ad CRAMERUM confugere potest, vel ad ea quæ alio loco tradam a me de hac re excogitata ante hos aliquot annos.

Pag. 113. col. 1., ut ostendam quantitatem imaginariam esse,  $\sqrt{-7}$ , provo-  
co ad Sect. I. N°. 80. Eo loco est ostensum quadratum esse positivum,  
seu radix sit positiva, seu negativa. Ergo quadratum negativum radicem  
neque positivam neque negativam habet, id est vere quadratum non est,  
quod ipsum exponit vox *imaginarium*.

Eadem pag. 113. col. 2. ex

$$x+z=30; \& x.y::y.z; \text{ ac } y+z=36, \text{ fit } y=6+x$$

quod multo facilius confici poterat. Quia enim

$$x+z=30, \& y+z=36; \text{ erit } y+z-x-z=y-x=36-30=6.$$

Nunc pauca ad Tomum II. Siquis contentus non sit demonstrationibus;  
quibus confirmatur theorema enunciatum pag. 19. N°. 45. quod nempe  
omnis æquatio rationalis quæ dividi potest per  $x+m+n\sqrt{p}=0$ , dividi  
potest etiam per  $x+m-n\sqrt{p}=0$ , videat an hæc sufficere possit.

Quoniam æquatio proposita dividi potest per

$$x+m+n\sqrt{p}=0; \text{ est } x=-m-n\sqrt{p}, \& 0=Q(m+n\sqrt{p})$$

Nam ultimus terminus æquationis conficitur per multiplicationem ex omni-  
bus quantitibus cognitis Factorum simplicium; inter quas est  $m+n\sqrt{p}$ ;  
& factum ex reliquis dico  $=Q$ .

Cum vero sit  $x=-m-n\sqrt{p}$ , poterit in proposita poni  $-m-n\sqrt{p}$ ,  
atque hujus potestates, pro  $x$  & ejus potestatibus. Quo facto proposita evadet

$$0=Q(m+n\sqrt{p})+N(-m-n\sqrt{p})+M(-m-n\sqrt{p})^2+L(-m-n\sqrt{p})^3+K(-m-n\sqrt{p})^4+\&c.$$

Hinc scribendo potestates ipsas, & separando terminos. rationales, ac irra-  
tionales, erit per Num 38. ejusdem loci,

$$0=Qm-Nm+M(m^2+n^2p)+L(-m^3-3m^2n\sqrt{p})+\&c.$$

&c

$$0=Qn\sqrt{p}-Nn\sqrt{p}+2Mmn\sqrt{p}+L(-3m^2n\sqrt{p}-n^3p\sqrt{p})+\&c.$$

Ergo subducendo æqualia ab æqualibus, secundam a prima

$$0=Qm-Qn\sqrt{p}-Nm+Nn\sqrt{p}+M(m^2-2mn\sqrt{p}+n^2p)+L(-m^3+3m^2n\sqrt{p}-3mn^2p+n^3p\sqrt{p})+\&c.$$

id est

$$0 = Q(m - n\sqrt{p}) + N(-m + n\sqrt{p}) + M(-m + n\sqrt{p})^2 + L(-m + n\sqrt{p})^3 + \&c.$$

Hæc autem æquatio dividi potest per  $m - n\sqrt{p}$ ; & substituendo  $x$  & ejus potestates pro hoc binomio & ejus potestates, restituit propositam. Ergo quando

$$x = -m - n\sqrt{p}; \text{ etiam } x = -m + n\sqrt{p}, \text{ \& } x + m - n\sqrt{p} = 0.$$

Negotium facere potest ultimus terminus. Sed dico necessario esse  $Q = R(m - n\sqrt{p})$ . Quandoquidem

Per hypothesin, est  $O$  quantitas rationalis: hoc posito nequit esse  $Q$  quantitas rationalis; nam tunc  $O = Q(m + n\sqrt{p})$  esset quantitas irrationalis, contra hypothesin. Sed neque potest esse  $Q$  quantitas surda unius nominis; ex. gr.  $Q = a\sqrt{\beta}$ ; quia tunc esset  $O = am\sqrt{\beta} + an\sqrt{\beta}p$ , & saltem irrationalis esset pars  $am\sqrt{\beta}$ . Neque potest pars radicalis habere exponentem  $r$  a binario diversum. Si enim esset  $Q = R(\gamma + a\sqrt[r]{\beta})$ , esset

$$O = QL(m + n\sqrt{p}) = R(\gamma + a\sqrt[r]{\beta})(m + n\sqrt{p}) = R(m\gamma + ma\sqrt{\beta} + \gamma n\sqrt{p} + \gamma n\sqrt{\beta}\sqrt{p})$$

& esset quantitas irrationalis. Sit ergo  $r = 2$ . Erit

$$m\gamma + \gamma n a\sqrt{\beta} + \gamma n\sqrt{p} + \gamma n\sqrt{\beta}\sqrt{p} = m\gamma + m a\sqrt{\beta} + \gamma n\sqrt{p} + \gamma n\sqrt{\beta}p$$

quæ quantitas debet esse rationalis. Hoc autem fieri nequit, nisi

$$m a\sqrt{\beta} + \gamma n\sqrt{p} = 0; m a\sqrt{\beta} = -\gamma n\sqrt{p}; \text{ \& } m = \gamma; \text{ ac } a\sqrt{\beta} = -n\sqrt{p}.$$

Quare est

$$Q = R(m - n\sqrt{p}) \text{ \& } O = R(m - n\sqrt{p})(m + n\sqrt{p})$$

id est ultimus æquationis rationalis terminus, qui dividi potest per  $m + n\sqrt{p}$ , dividi etiam potest per  $m - n\sqrt{p}$ .

Tunc ergo, post substitutionem, separationem, & subductionem, habebimus

$$0 = R(m^2 - n^2p) + N(-m + n\sqrt{p}) + M(-m + n\sqrt{p})^2 + L(-m + n\sqrt{p})^3 + \&c.$$

in qua omnes termini dividuntur per  $-m + n\sqrt{p}$ .

Theorema quod habetur pag. 29. sub N°. 88. Sic explicio. Proposita æquatio sit

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots + O = 0$$

atque hæc consistet ex

$$(x + \beta)(x^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} \dots + p) = 0$$

1.3

erit,

erit, multiplicando,

$$\begin{array}{cccccccc} +\beta & +a\beta & +b\beta & +c\beta & & & & \\ x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & x^{n-3} & x^{n-4} & \dots & +p\beta & = 0, \\ +a & +b & +c & +d & & & & \end{array}$$

quæ æquatio non tantum propositæ æqualis est, sed *identica*; ita ut tota æquatio totam æquet, & singuli termini singulos terminos. Est igitur

$$A = a + \beta; B = b + a\beta; C = c + b\beta \text{ \&c.}$$

Neque difficilius explicantur Ni. 8...10. pag. 58, 59; qui pariter obscuriores visi sunt. Nam

In æquatione proposita litera  $x$  exponit ambigue omnes radices, sive positivas, sive negativas.

Quando ipsius  $x$  exponentes duo  $n-r$ , &  $n-s$  sunt pares, potestates ipsæ  $x^{n-r}$ ; &  $x^{n-s}$  sunt positivæ, sive  $x$  exponat unam e radicibus positivis, sive unam e radicibus negativis.

Sint ergo duo quivis propositæ termini

$$+Mx^{n-r}; \text{ \& } -Px^{n-s},$$

quatenus exponentes sunt pares, unus Factor ipsius  $+Mx^{n-r}$  est  $+x^{n-r}$ , quare alter est  $+M$ : sed unus Factor ipsius  $-Px^{n-s}$  est  $+x^{n-s}$ ; & alter  $-P$ .

Igitur sive radices maneant *quales sunt*, id est positivæ quæ erant positivæ, & negativæ, quæ erant negativæ; sive mutantur in contrarias, ita ut negativæ fiant quæ erant positivæ, & positivæ quæ erant negativæ; manebunt *quales erant* termini æquationis propositæ, in quibus  $x$  habet exponentem parem.

Sed quando exponentes  $n-r$  &  $n-s$  sunt numeri impares, potestates ipsæ  $x^{n-r}$ ; &  $x^{n-s}$  sunt positivæ, quando  $x$  exponit unam e radicibus positivis, & negativæ quando  $x$  exponit unam e radicibus negativis. Cum autem  $x$  exponat ambigue radices positivas vel negativas, unus Factor ipsius  $+Mx^{n-r}$ , erit  $\pm x^{n-r}$ ; atque ideo alter  $\pm M$ ; pariter unus Factor ipsius  $-Px^{n-s}$  erit  $\pm x^{n-s}$ ; atque idcirco alter  $\mp P$ . Sed coefficientes  $M$  &  $P$  non mutantur quando radices positivæ fiunt negativæ & contra; mutantur autem ipsæ potestates, & fiunt  $\mp x^{n-r}$ ; &  $\mp x^{n-s}$  atque est

$$\pm M. \mp x^{n-r} = -Mx^{n-r}; \text{ \& } \mp P. \mp x^{n-s} = +Px^{n-s}.$$

Mutantur ergo signa terminorum in quibus  $x$  habet exponentes integros, quando radices positivæ mutantur in negativas, & negativæ in positivas.

Atque hæc sufficiant. Plura quæ emendanda proculdubio comperiet Lector, ipsius ingenio corrigenda, & benignitati condonanda relinquo.

F I N I S.



## ERRATA

## TOMI II.

## CORRIGE

Pag. 22. lin. 2. inter, & A  
 pag. 29. lin. 3. Factoribus rationalibus  
 pag. 82. lin. 16.  $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$

pag. 104. lin. 5. a fine

$$x^4 - 26x^3 + 151x^2 - 246x + 80 = 0$$

Ibidem lin. 3. a fine

$$4x^3 - 78x^2 + 302x - 246$$

Ibidem lin. ultima

$$2x^3 - 39x^2 + 151x - 123$$

inter 1, & A

Factoribus irrationalibus

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$

$$x^4 - 26x^3 + 231x^2 - 806x + 880 = 0$$

$$4x^3 - 78x^2 + 462x - 806$$

$$2x^3 - 39x^2 - 231x - 403$$

The first part of the paper is devoted to a discussion of the general principles of the theory of the structure of the atom. It is shown that the structure of the atom is determined by the laws of quantum mechanics, and that the laws of quantum mechanics are determined by the laws of the theory of the structure of the atom. This is a circular argument, but it is the only way to proceed.

It is shown that the structure of the atom is determined by the laws of quantum mechanics, and that the laws of quantum mechanics are determined by the laws of the theory of the structure of the atom. This is a circular argument, but it is the only way to proceed.

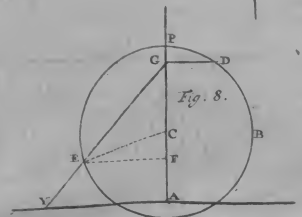
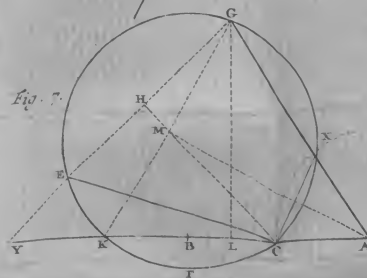
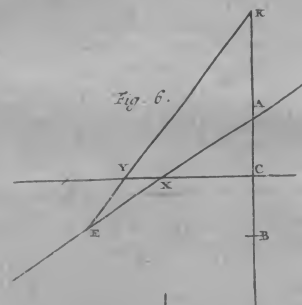
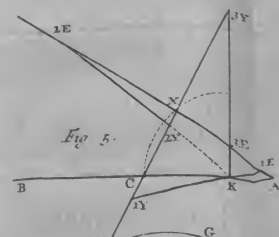
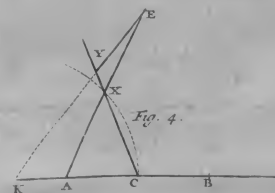
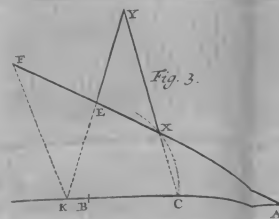
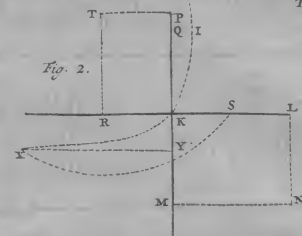
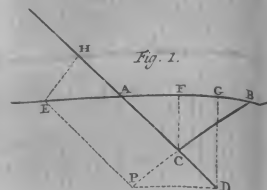
It is shown that the structure of the atom is determined by the laws of quantum mechanics, and that the laws of quantum mechanics are determined by the laws of the theory of the structure of the atom. This is a circular argument, but it is the only way to proceed.

It is shown that the structure of the atom is determined by the laws of quantum mechanics, and that the laws of quantum mechanics are determined by the laws of the theory of the structure of the atom. This is a circular argument, but it is the only way to proceed.

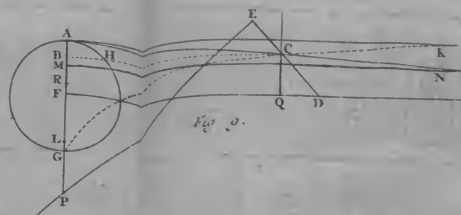
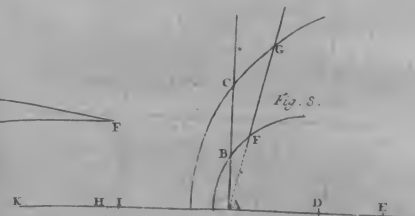
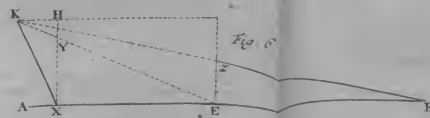
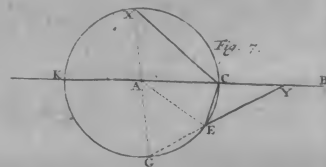
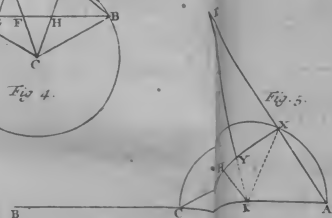
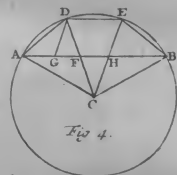
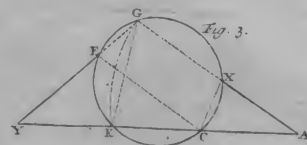
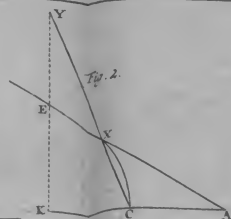
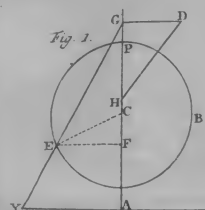
It is shown that the structure of the atom is determined by the laws of quantum mechanics, and that the laws of quantum mechanics are determined by the laws of the theory of the structure of the atom. This is a circular argument, but it is the only way to proceed.

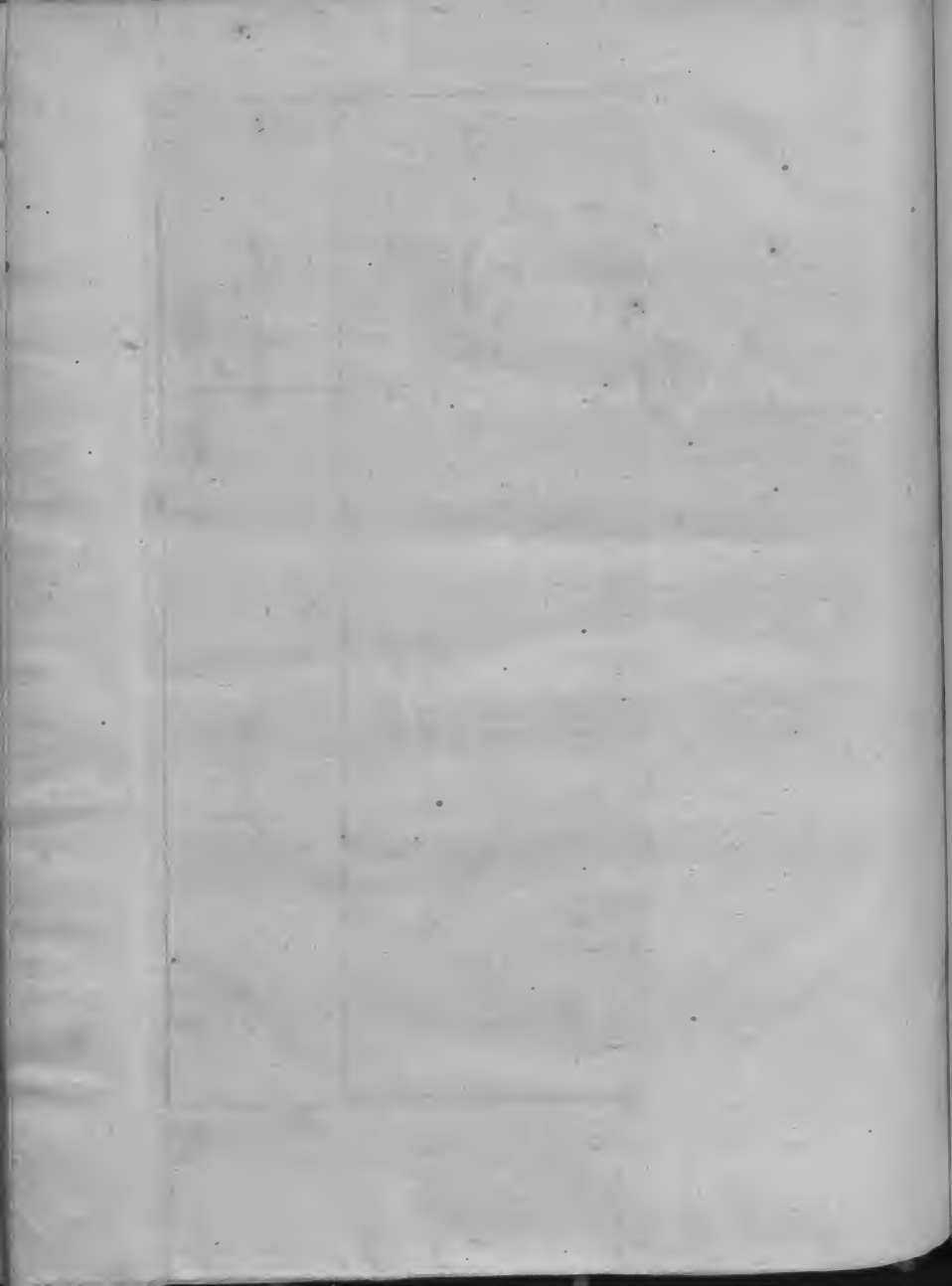
It is shown that the structure of the atom is determined by the laws of quantum mechanics, and that the laws of quantum mechanics are determined by the laws of the theory of the structure of the atom. This is a circular argument, but it is the only way to proceed.

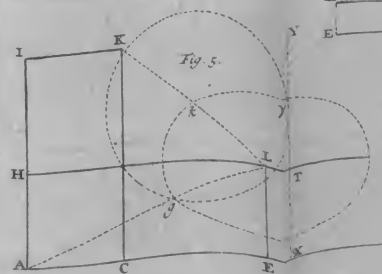
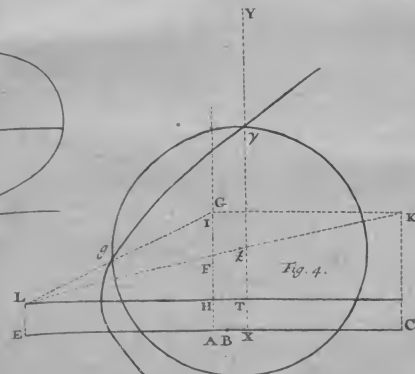
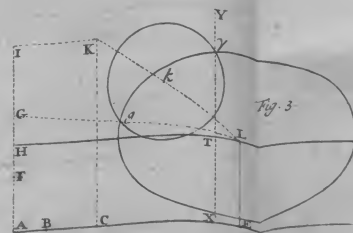
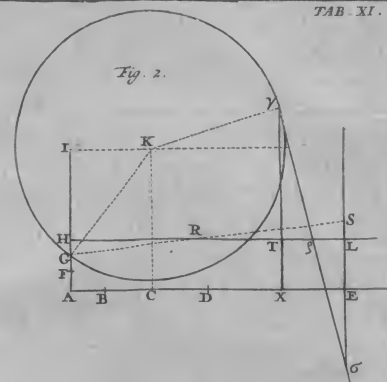
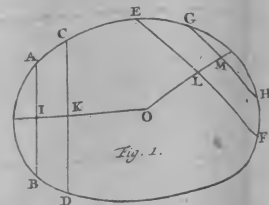
It is shown that the structure of the atom is determined by the laws of quantum mechanics, and that the laws of quantum mechanics are determined by the laws of the theory of the structure of the atom. This is a circular argument, but it is the only way to proceed.











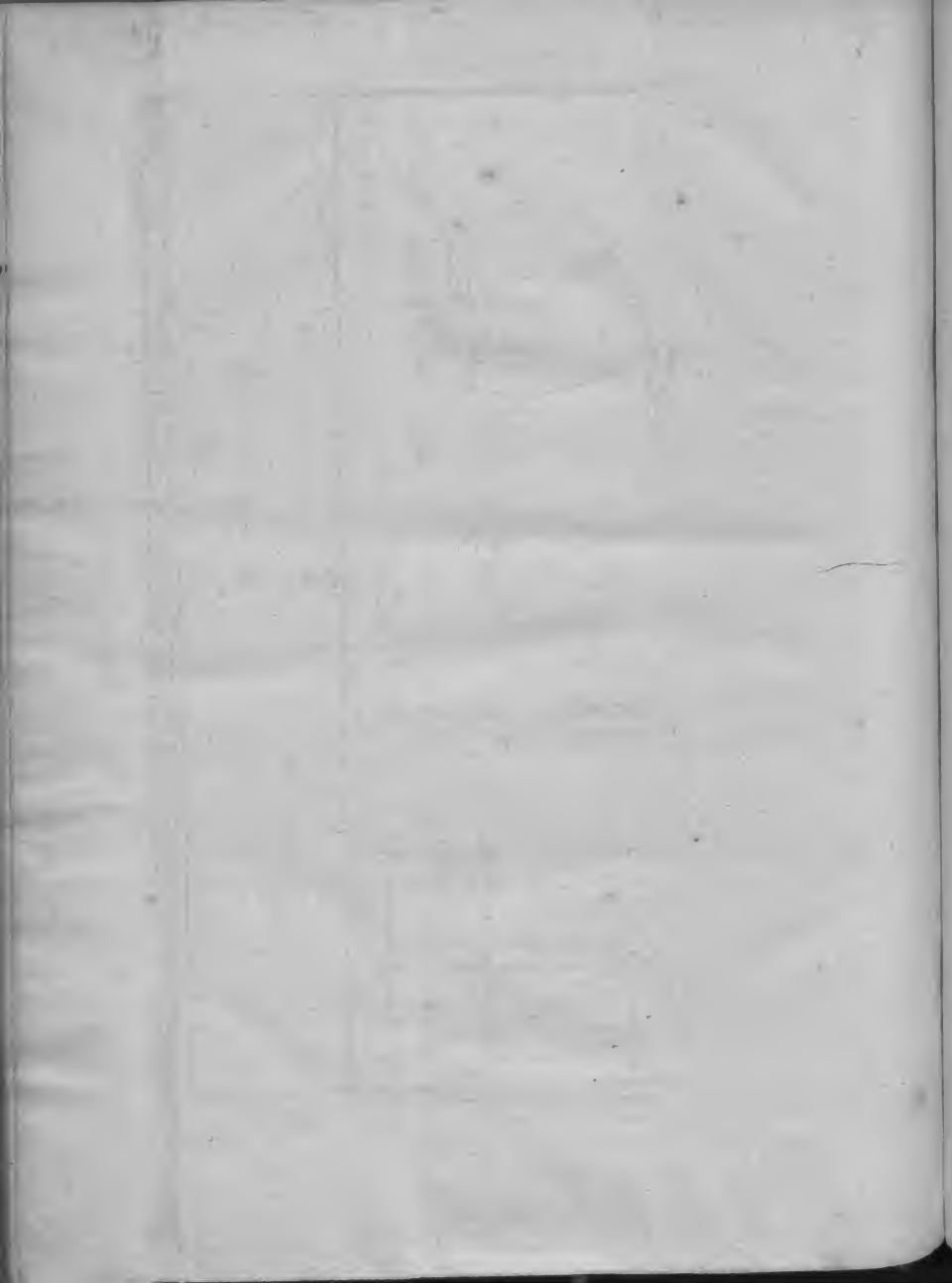




Fig. 1.

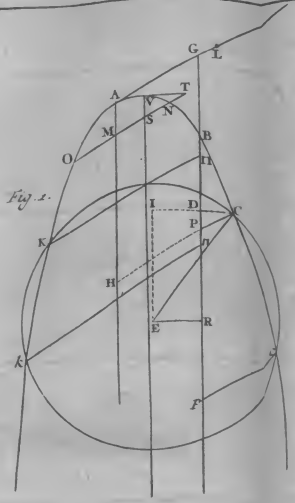


Fig. 2.

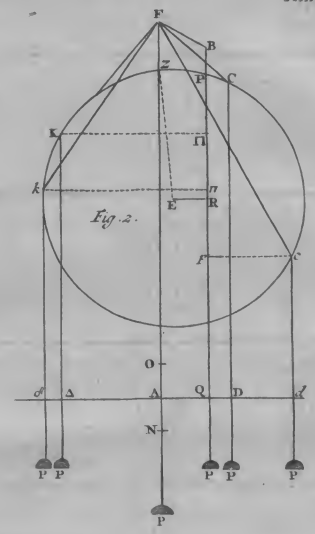


Fig. 3.

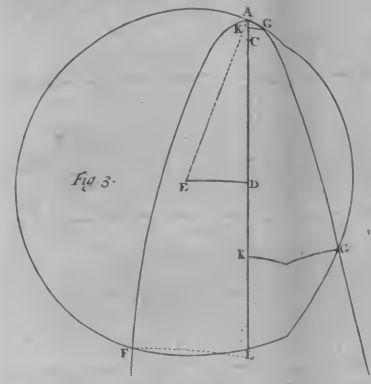
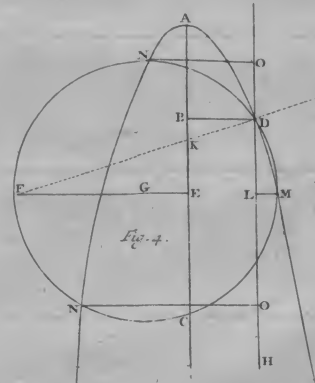
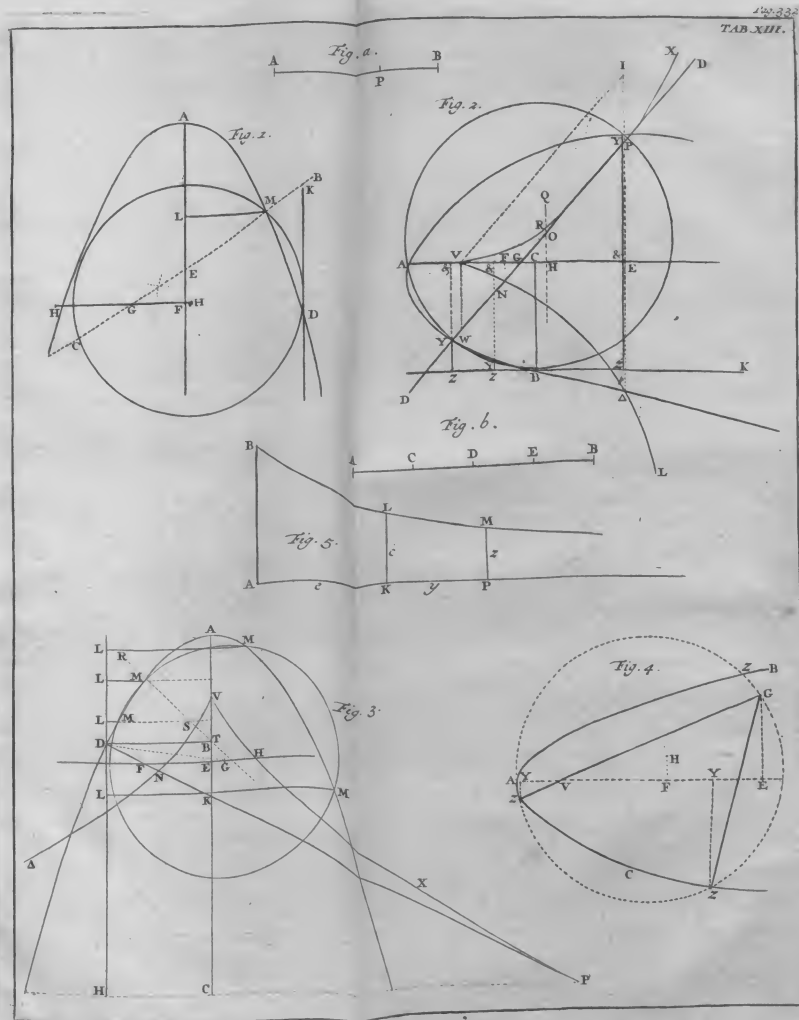
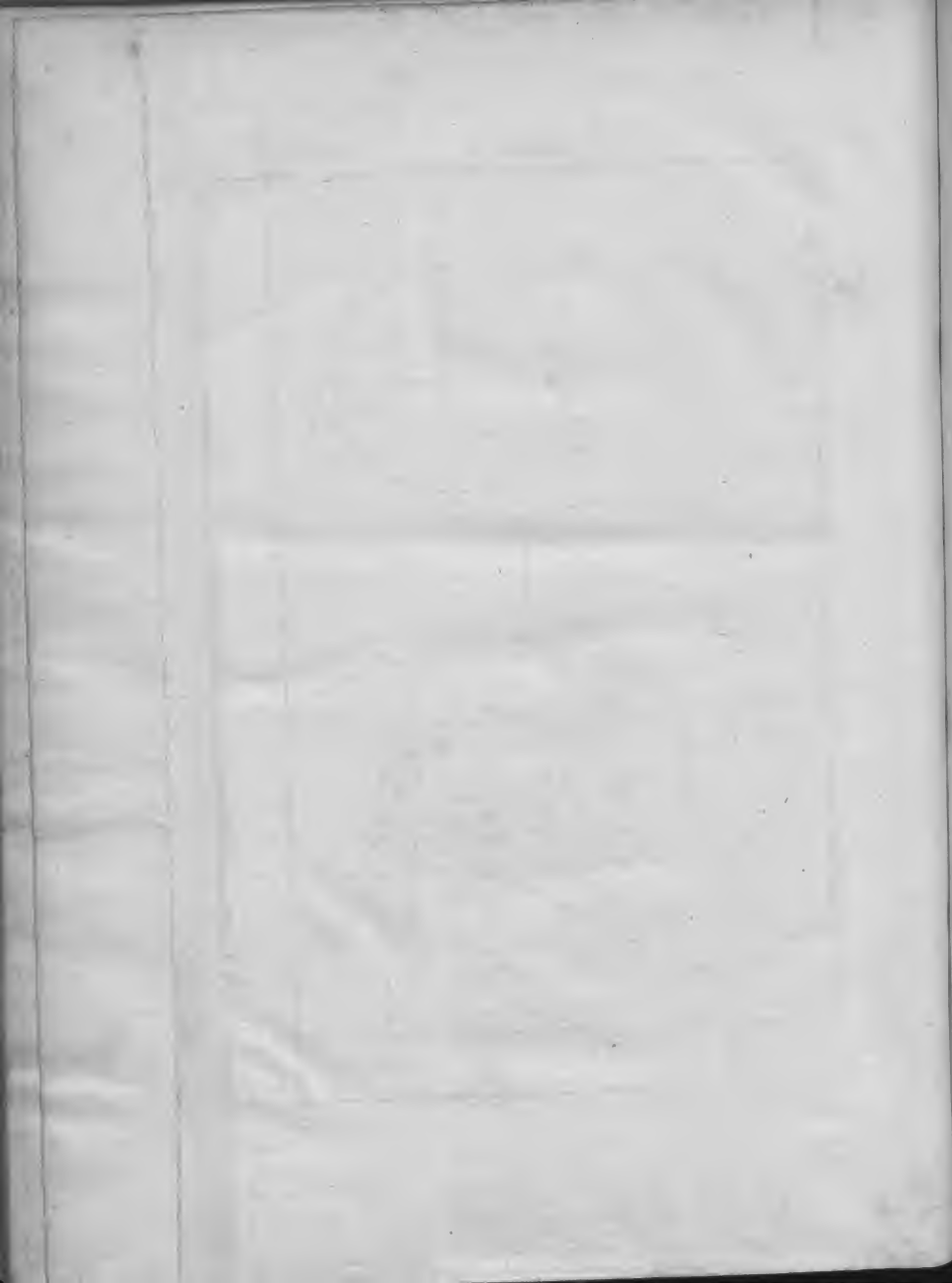


Fig. 4.

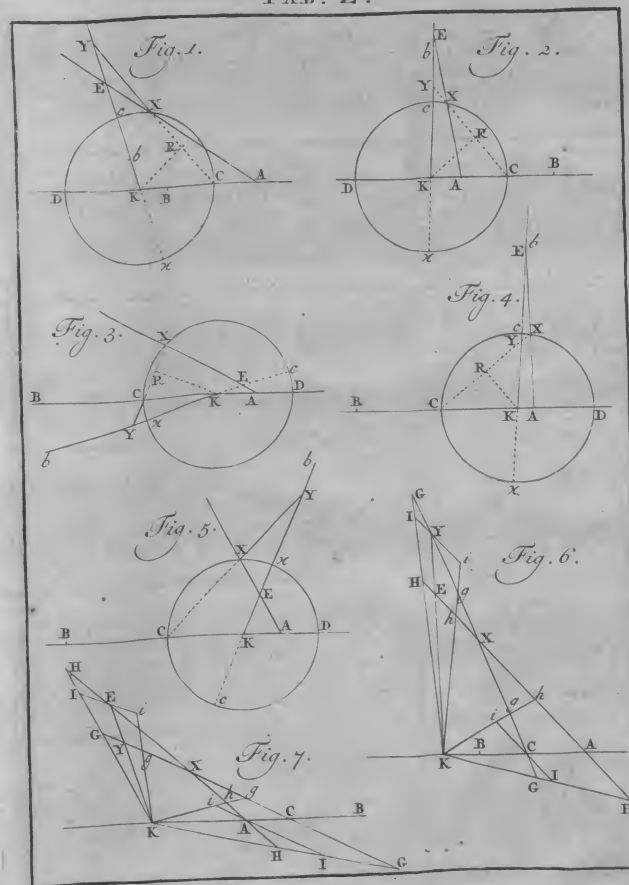






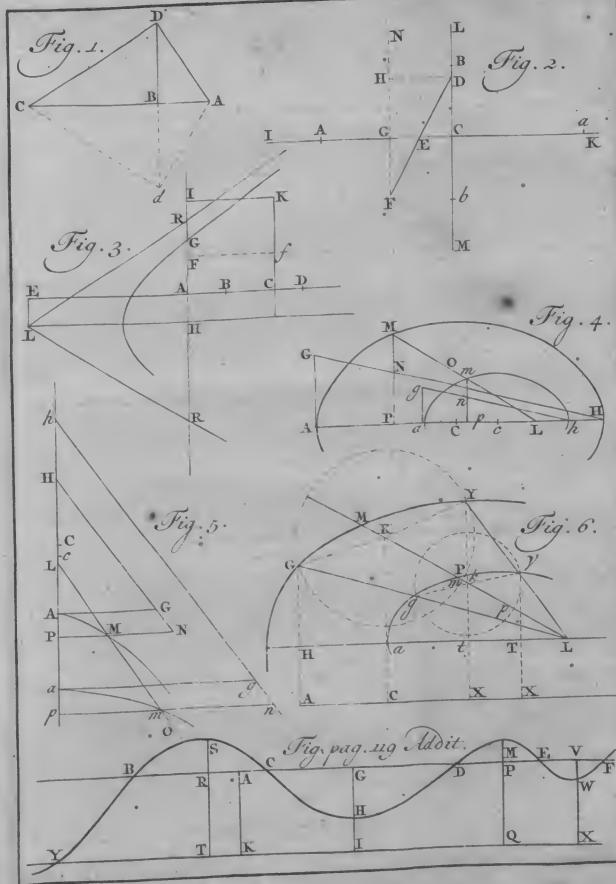


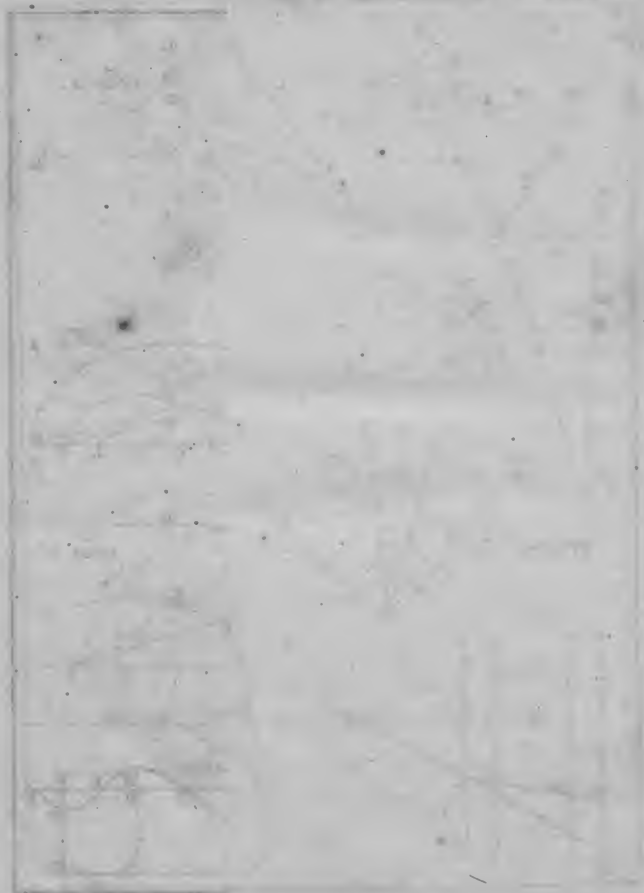
TAB. Z.





TAB. a.







TAB. 6. A. v. P. Bosch. observ. pag. 126. &c. Addit.

